ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1ère Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1 Exercice :

On considère une fonction φ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, continue, réelle, décroissante, strictement positive.

1. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$ est convergente.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$ est convergente pour tout $h > 0$.
   (b) Déterminer la limite de sa somme lorsque h tend vers 0.
2. On suppose seulement que φ est intégrable sur $]0,1]$. On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x et on pose :

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k) & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$$c_k = \int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt - \varphi(k), \quad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$C = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$

$$\psi(x) = s(x) - \int_0^x \varphi(t)dt + C, \quad \text{pour tout } x \geq 0\ .$$

   (a) Démontrer que C existe effectivement.
   (b) Montrer que $|\psi(x)| \leq |\varphi(x)|$, pour $x \in]0,+\infty[$.
   Indication : on pourra distinguer deux cas selon que $x < 1$ ou $x \geq 1$.

2 Problème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \ .$$

On considère la série de fonctions $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1. Déterminer le domaine de convergence de cette série de fonctions, c'est-à-dire l'ensemble

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \ \text{ converge } \right\} .$$

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont la valeur en chaque réel x est donnée par la somme de la série de terme général $u_n(x)$. Cette fonction F est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

   (a) Soit $r > 0$ un réel strictement positif, montrer que la série dérivée de terme général $u_n'(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2}$ est normalement convergente sur $[-r, r]$.

   (b) Montrer que F est deux fois dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et exprimer en tout point $x \in \mathbb{R}$, les dérivées $F'(x)$ et $F''(x)$ en sommes de séries.

   (c) Étudier la convexité du graphe de F.

3. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par les relations suivantes :

$$v_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n \ ; \quad w_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}4^n \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   avec $0! = 1$.

   On désigne par ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ .$$

   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

   (b) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!} \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   puis une majoration, sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$, de la fonction F à l'aide de fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(2x)$.

(c) Démontrer de même une minoration, sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$, de la fonction F à l'aide de fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x}$.

(d) Pour tout réel x strictement positif, soient $G(x)$ et $\Phi(x)$ deux fonctions définies par

$$G(x) = \sqrt{\mathrm{ch}(2x)\frac{\mathrm{sh}(2x)}{2x}}\ , \quad \Phi(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\ , \quad x \in]0,\infty[\ .$$

Comparer les deux fonctions G et Φ à l'infini.

4. Le but de cette partie est de calculer les transformées de Laplace des fonctions F et Φ.

Étant donnée une fonction $f : t \mapsto f(t)$ définie, continue sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ et intégrable sur tout intervalle semi-ouvert $]0,a]$, (a est un réel positif quelconque), la transformée de Laplace de f notée $L(f)$, si elle existe, est définie par la relation suivante:

$$L(f)(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt\ .$$

Fomesoutra.com ça soutra Docs à portée de main

(a) Soit $x \in]0,\infty[$ un réel strictement positif ; calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_k suivante :

$$I_k = \int_0^\infty t^k e^{-xt}dt\ .$$

(b) Démontrer que la fonction $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,\infty[$ dès que le réel x est strictement supérieur à 2. Déterminer la fonction $L(F)$ en calculant $L(F)(x)$ au moyen de la somme d'une série.

(c) Soit g la somme d'une série entière définie par la relation suivante :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}t^{2n}\ .$$

Déterminer l'intervalle ouvert $]-R,R[$ de définition de la fonction g. Déterminer au moyen de fonctions élémentaires l'expression de $g(t)$ en utilisant par exemple le développement en série de la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$.

(d) En déduire l'expression, pour tout réel x supérieur strictement à 2, de la transformée de Laplace de la fonction F.

(e) Déterminer, en précisant son ensemble de définition, la transformée de Laplace de la fonction Φ.
On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.