

2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1^{ère} Composition de Mathématiques



Premier Problème

I : Moyenne de Cesàro d'une suite

1. Soit $\epsilon > 0$, comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : (n \geq n_1) \implies |x_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, puisque la suite (x_n) est convergente, elle est bornée :

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M,$$

on a alors lorsque $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} |y_n - \ell| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_1-1} |x_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_1}^n |x_k - \ell| \\ &< \frac{n_1}{n+1} (M + \ell) + \frac{n - n_1 + 1}{n+1} \times \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{n_1}{n+1} (M + \ell) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$n \geq n_1 \implies |y_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Puisque ϵ est arbitraire, ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ell$.

2. On a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k) = \frac{z_{n+1}}{n+1} - \frac{z_0}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_0}{n+1} = 0$, il suffit d'utiliser le résultat de la première question à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = z_{n+1} - z_n$.

II : Recherche d'équivalents

1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1$, on a

$$(\forall \epsilon > 0), (\exists 0 < \eta < 1) : 0 < x < \eta \implies -\epsilon + 1 < \varphi(x) < \epsilon + 1,$$

en particulier pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \rho \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in]0, \rho[, \frac{1}{2} < \varphi(x) < \frac{3}{2}$. D'où l'existence de $\rho \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} \leq \sup_{x \in [0, \rho]} \varphi(x) \leq \frac{3}{2}$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n \leq \rho$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \rho$. La suite (u_n) est alors décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite ℓ . Par la continuité de f , on a $f(\ell) = \ell$ et $\ell \in [0, \rho]$, d'où $0 \leq f(\ell) \leq \ell(1 - \frac{\alpha}{2}\ell^\alpha)$, ce qui exige que $\ell = 0$; (car sinon, alors $0 \leq f(\ell) < \ell$, ce qui est en contradiction avec le fait que $f(\ell) = \ell$)

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} &= \frac{u_n^\alpha - u_n^\alpha(1 - au_n^\alpha \varphi(u_n))^\alpha}{u_n^\alpha u_{n+1}^\alpha} \\ &= \frac{1 - (1 - au_n^\alpha \varphi(u_n))^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \\ &= \frac{1 - [1 - \alpha au_n^\alpha \varphi(u_n) + o(u_n^\alpha \varphi(u_n))]}{u_{n+1}^\alpha} \\ &= \frac{\alpha au_n^\alpha \varphi(u_n) + o(u_n^\alpha)}{u_{n+1}^\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - au_n^\alpha \varphi(u_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \varphi(u_n) = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \right) = \alpha a.$$

D'après la question I.2. $\frac{1}{u_n^\alpha} \sim n\alpha a$, d'où

$$u_n \sim \left(\frac{1}{\alpha a n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

4. Il suffit d'appliquer les résultats des questions précédentes avec $a = \frac{1}{6}$ et $\alpha = 2$:

$$\sin(x) = x \left(1 - \frac{1}{6} x^2 \varphi(x) \right), \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = 6 \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

On trouve : $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Deuxième Problème

I : Étude analytique

1. Soient $f \in \mathcal{E}$ et F une primitive de f , alors

$$[m_a(f)](x) = \frac{1}{2a} (F(x+a) - F(x-a)) .$$

Puisque f est continue, sa primitive F est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $m_a(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$[m_a(f)]'(x) = \frac{1}{2a} (f(x+a) - f(x-a))$$

2. On a



$$\begin{aligned} m_a(f) \text{ est constante} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, [m_a(f)]'(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0 . \end{aligned}$$

En posant $y = x - a$ dans la dernière égalité, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0 \iff \forall y \in \mathbb{R}, f(y+2a) = f(y) .$$

On déduit alors des deux équivalences que $m_a(f)$ est constante si et seulement si f est $2a$ -périodique.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant le changement de variable $u = -t$ on a :

$$\begin{aligned} [m_a(f)](-x) &= \frac{1}{2a} \int_{-x-a}^{-x+a} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(-u) du \\ &= \begin{cases} [m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est paire} \\ -[m_a(f)](x) & \text{si } f \text{ est impaire} . \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $m_a(f)$ est donc de la même parité que f .

4. Comme la fonction $m_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est monotone si et seulement si $[m_a(f)]'$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent d'après 1. à $f(x+a) - f(x-a)$ est de signe constant, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si f est croissante, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) \geq 0$, ainsi $[m_a(f)]' \geq 0$ et $m_a(f)$ croissante; de même si f est décroissante alors $m_a(f)$ décroissante.

Ainsi $m_a(f)$ est de même monotonie que f .

5. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

(a) $m_a(f)$ est à support borné car :

- si $x \geq A + a$, $[x - a, x + a] \subset [A, +\infty[$, donc $[m_a(f)](x) = 0$,
 - si $x \leq -A - a$, $[x - a, x + a] \subset]-\infty, -A]$, donc $[m_a(f)](x) = 0$,
- donc $[m_a(f)](x) = 0$ pour $|x| \geq A + a$.

(b) Une première intégration par parties, en posant $u = m_a(f)$ et $v' = 1$ donne

$$\begin{aligned}
& \int_{-A-a}^{A+a} [m_a(f)](t) dt \\
&= \left[t[m_a(f)](t) \right]_{t=-A-a}^{t=A+a} - \int_{-A-a}^{A+a} t \frac{1}{2a} (f(t+a) - f(t-a)) dt \\
&= \frac{A+a}{2a} \left(\int_A^{A+2a} f(t) dt - \int_{-A-2a}^{-A} f(t) dt \right) \\
&\quad - \frac{1}{2a} \int_{-A-a}^{A+a} t (f(t+a) - f(t-a)) dt \\
&= -\frac{1}{2a} \int_{-A-a}^{A+a} t f(t+a) dt + \frac{1}{2a} \int_{-A-a}^{A+a} t f(t-a) dt.
\end{aligned}$$

car $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$

Puis, en effectuant les changements de variables $u = t + a$ (resp. $v = t - a$) sur la première (resp. la seconde) intégrale du membre de droite de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-A-a}^{A+a} [m_a(f)](t) dt &= \frac{1}{2a} \left(- \int_{-A}^{A+2a} (u-a) f(u) du + \int_{-A-2a}^A (v+a) f(v) dv \right) \\
&= \frac{1}{2a} \left(- \int_{-A}^A (u-a) f(u) du + \int_{-A}^A (v+a) f(v) dv \right) \\
&= \int_{-A}^A f(w) dw
\end{aligned}$$

car $f(x) = 0$ pour $|x| \geq A$.

Fomesoutra.com
sa soutra
Docs à portée de main

II : Étude de norme sur $\mathcal{B}$

- (a)
 - $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1$ et $f(0) = 1$ donc $\|f\| = 1$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq 1$ et $g(0) = 1$ donc $\|g\| = 1$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| = |\lambda|$ donc $\|h\| = |\lambda|$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[m_a(f)](x) &= \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \cos \frac{2\pi t}{a} dt = \frac{1}{2a} \frac{a}{2\pi} \left[\sin \frac{2\pi t}{a} \right]_{t=x-a}^{t=x+a} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{2\pi}{a} (x+a) - \sin \frac{2\pi}{a} (x-a) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\sin \left(\frac{2\pi x}{a} + 2\pi \right) - \sin \left(\frac{2\pi x}{a} - 2\pi \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\|m_a(f)\| = 0$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, |[m_a(h)](x)| = |\lambda|$ donc $\|m_a(h)\| = |\lambda|$.

(b) On a $[m_a(g)]'(x) = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{1+(x+a)^2} - \frac{1}{1+(x-a)^2} \right) \leq 0$ si $x \geq 0$, donc $m_a(g)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, positive, et admet un maximum en 0, de plus $m_a(g)$ est paire car g est paire, d'où, $[m_a(g)](0) = \frac{1}{2a} 2 \arctan a$, et donc $\|m_a(g)\| = \frac{\arctan a}{a}$.

2. Soit $f \in \mathcal{B}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |[m_a(f)](x)| &= \frac{1}{2a} \left| \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} \|f\| dt = \|f\| \end{aligned}$$

donc

$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad \|m_a(f)\| \leq \|f\|.$$

3. Si $\|f\| = 1$ alors $\|m_a(f)\| \leq \|f\| = 1$ et $\|m_a(f)\| = \|f\| = 1$ pour $f : x \mapsto 1$, donc :

$$N(m_a) = \sup_{\|f\|=1, f \in \mathcal{B}} \|m_a(f)\| = 1.$$

III : Polynômes de Tchébychev



1. (a) Raisonnement par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. Soit $p \geq 2$; on suppose la formule vraie jusqu'au rang p . En utilisant la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(p+1)x + \cos(p-1)x = 2 \cos x \cos px,$$

on a

$$\begin{aligned} T_{p+1}(a \cos x) &= \frac{2a \cos x}{a} T_p(a \cos x) - T_{p-1}(a \cos x) \\ &= 2 \cos x \cos px - \cos(p-1)x \\ &= \cos(p+1)x. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $(p+1)$.

Par le théorème de récurrence la formule est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) On prend $x = \frac{\pi}{2}$ dans la formule précédente et on obtient

$$T_p(0) = T_p(a \cos(\pi/2)) = \cos p \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ (-1)^{\frac{p}{2}} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

Dérivons les deux membres de l'identité $T_p(a \cos x) = \cos px$, $\forall x$, on a

$$-a \sin x T_p'(a \cos x) = -p \sin px, \quad \forall x.$$

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $T'_p(a \cos x) = \frac{p \sin px}{a \sin x}$, ce qui donne le résultat en faisant tendre x vers 0.

$$\begin{aligned} T'_p(a) &= \lim_{x \rightarrow 0} T'_p(a \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p^2 \sin px}{a} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{p^2}{a}. \end{aligned}$$

(c) Montrons, par récurrence sur p , que l'entier p et le polynôme T_p sont de même parité. La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. Soit $p \geq 2$; supposons la propriété vraie jusqu'au rang p ; alors les polynômes $\frac{2X}{a}T_p$ et T_{p-1} sont de même parité que $(p+1)$ et donc aussi de même parité que $T_{p+1} = \frac{2X}{a}T_p - T_{p-1}$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$. Le théorème de récurrence donne alors le résultat.

2. (a) Montrons, par récurrence sur p , que T_p est un polynôme de degré p et de terme dominant $\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$ pour $p \geq 1$.

La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$. Soit $p \geq 2$; supposons la propriété vraie jusqu'au rang p ; alors le terme dominant de T_{p+1} est la terme dominant de $\frac{2X}{a}T_p$, soit $\frac{2X}{a} \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$.

Le théorème de récurrence donne donc que T_p est un polynôme de degré p , de terme dominant $\frac{2^{p-1}}{a^p}X^p$ pour $p \geq 1$.

(b) Puisque T_p est un polynôme de même parité que p dont on connaît le terme dominant, pour $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$T_p = \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p + Q,$$



où Q est un polynôme de degré $\leq (p-2)$. En dérivant $(p-1)$ fois, on a

$$\begin{aligned} T_p^{(p-1)} &= \frac{2^{p-1}}{a^p}(X^p)^{(p-1)} + Q^{(p-1)} \\ &= \frac{2^{p-1}}{a^p} \frac{p!}{1!}X + 0 \end{aligned}$$

et en posant $X = a$, on obtient

$$T_p^{(p-1)}(a) = \frac{2^{p-1}}{a^{p-1}} p! \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, .$$

3. Puisque T_p est un polynôme de même parité que p , on a

$$[m_a(T_p)](0) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a T_p(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{a} \int_0^a T_p(t) dt & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

Calculons $m_a(T_{2k})(0)$. Par le changement de variable $t = a \cos u$, on a

$$\begin{aligned}
 m_a(T_{2k})(0) &= \frac{1}{a} \int_0^a T_{2k}(t) dt \\
 &= \frac{1}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 T_{2k}(a \cos u)(-a \sin u) du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos 2ku)(\sin u) du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2k+1)u - \sin(2k-1)u] du \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(2k+1)u}{2k+1} + \frac{\cos(2k-1)u}{2k-1} \right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = -\frac{1}{4k^2-1}
 \end{aligned}$$

D'où

$$[m_a(T_p)](0) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{1-p^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

4. (a) On a $[m_a(T_p)]'(x) = \frac{1}{2a}(T_p(x+a) - T_p(x-a))$, donc

$$\begin{aligned}
 [m_a(T_p)]'(0) &= \frac{1}{2a}[T_p(a) - T_p(-a)] \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{1}{a}T_p(a) = \frac{1}{a} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Remarquons que si T_p est paire alors T_p' est impaire et si T_p est impaire alors T_p' est paire, donc



$$\begin{aligned}
 [m_a(T_p)]''(0) &= \frac{1}{2a}[T_p'(a) - T_p'(-a)] \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{1}{a}T_p'(a) = \frac{p^2}{a^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}
 \end{aligned}$$

- (b) D'après la question **II : 2.(b)**, on a

$$[m_a(T_p)]^{(p)}(0) = \frac{1}{2a}[T_p^{(p-1)}(a) - T_p^{(p-1)}(-a)] = p! \frac{2^{p-1}}{a^p} .$$

5. (a) Le polynôme $m_a(T_p)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; son développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $x = 0$ est donné par

$$[m_a(T_p)](x) = [m_a(T_p)](0) + \frac{[m_a(T_p)]'(0)}{1!}x + \frac{[m_a(T_p)]''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) ,$$

ce qui donne

$$[m_a(T_p)](x) = \begin{cases} \frac{1}{1-p^2} + \frac{p^2}{2a^2}x^2 + o(x^2) & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{1}{a}x + o(x^2) & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

- (b) Remarquons que $m_a(T_p)$ est un polynôme de degré p dont le terme dominant est le terme dominant de T_p , donc

$$m_a(T_p) = \frac{2^{p-1}}{a^p}X^p + Q,$$



où Q est un polynôme de degré $\leq (p-1)$.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}$, $m_a(X^k)$ est un polynôme unitaire de degré k , ce qui montre, grâce à la linéarité de m_a , que

$$[m_a(T_p)](x) \sim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2^{p-1}}{a^p}x^p.$$