ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1ère Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Premier Problème

I : Moyenne de Cesàro d'une suite

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa moyenne de Cesàro définie par $y_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Cesàro converge aussi vers ℓ.

2. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que,

$$\lim_{n\to+\infty} (z_{n+1} - z_n) = t\ .$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{z_n}{n} = t$.

II : Recherche d'équivalents

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, telle que $f(x) = x\big(1 - ax^\alpha\varphi(x)\big)$, où $a > 0$, $\alpha > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$.

1. Montrer qu'il exist $\rho \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{2} \leq \displaystyle\sup_{x\in[0,\rho]} \varphi(x) \leq \dfrac{3}{2}$ et en déduire que pour tout $x \in [0,\rho]$, $0 \leq f(x) \leq x$.

2. Soit $u_0 \in [0,\rho]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donné de u_o et la releation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers 0 en décroissant.

3. Prouver que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}\right) = a\alpha$. En déduire que $u_n \sim \frac{K}{n^{1/\alpha}}$ quand $n \to +\infty$, où K est une constante.

4. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Trouver un équivalent de u_n.

Deuxième Problème

Définitions et notations

On désigne par $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ des fonctions numériques continues et bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\forall f \in \mathcal{B}, \; \|f\| = \sup\{|f(x)| \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$

Pour $a > 0$, on appelle moyenne spatiale de paramètre a d'un élément f de $\mathcal{E}$, l'application $m_a(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \big[m_a(f)\big](x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$$

I : Étude analytique

Dans cette partie f désigne un élément de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $m_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $m_a(f)$ est constante si, et seulement si, f est périodique de période $2a$.
3. Étudier la parité de $m_a(f)$ en fonction de celle de f.
4. Étudier la monotonie de $m_a(f)$ lorsque f est monotone.
5. Un élément f de $\mathcal{E}$ est dit *à support borné* s'il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $|x| \geq A$.
   (a) Montrer que si f est à support borné, $m_a(f)$ l'est aussi.
   (b) Montrer que si f vérifie $f(x) = 0$ pour $|x| \geqslant A$, alors
   $$\int_{-A-a}^{A+a} m_a(f)(t)\,dt = \int_{-A}^{A} f(t)\,dt\,.$$
   On pourra utliser une intégration par parties.

II : Étude de norme sur $\mathcal{B}$

1. On considère les fonctions f, g et h de $\mathcal{B}$ définies par
   $$f(x) = \cos\frac{2\pi x}{a}, \; g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \; h(x) = \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$
   (a) Calculer $\|f\|$, $\|g\|$, $\|h\|$, $\|m_a(f)\|$ et $\|m_a(h)\|$.
   (b) Montrer que la fonction $m_a(g)$ est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$, puis calculer $\|m_a(g)\|$.
2. Montrer que pour tout élément $f \in \mathcal{B}$, $\|m_a(f)\| \leq \|f\|$.
3. Déterminer $N(m_a) = \sup\{\|m_a(f)\| \,/\, f \in \mathcal{B}, \|f\| = 1\}$.

III : Polynômes de Tchébychev

On appelle polynômes de Tchébychev, la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = \frac{1}{a}X, \quad \text{et } \forall p \in \mathbb{N},\ T_{p+2} = \frac{2}{a}XT_{p+1} - T_p\ .$$

1. (a) Montrer que pour tout entier p, $T_p(a\cos x) = \cos px$.
   (b) Calculer $T_p(0)$ et $T'_p(a)$.
   (c) Étudier la parité du polynôme T_p.

2. (a) Déterminer le coefficient dominant de T_p.
   (b) Montrer que $T_p^{(p-1)}(a) = \dfrac{2^{p-1}p!}{a^{p-1}}$ pour tout entier p non nul.
3. Calculer $\big[m_a(T_p)\big](0)$ en fonction de p.
4. (a) Déterminer $\big[m_a(T_p)\big]'(0)$ et $\big[m_a(T_p)\big]''(0)$ en fonction de p.
   (b) Montrer que $\big[m_a(T_p)\big]^{(p)}(0) = \dfrac{1}{a}T_p^{(p-1)}(a) = \dfrac{2^{p-1}p!}{a^p}$.
5. Déduire des résultats précédents
   (a) le développement limité à l'ordre 2 de $m_a(T_p)$ en 0 pour $p > 1$;
   (b) un équivalent de $m_a(T_p)(x)$ lorsque x tend vers l'infini.