CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Avril 2011

Exercice

1. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k = xB(x)$$

avec

$$B(x) = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^{k-1} = C_{2n}^1 + \sum_{k=2}^{2n-1} C_{2n}^k x^{k-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n-1}.$$

Donc, le polynôme B est de degré $2n-1$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant b_0 vaut $C_{2n}^1 = 2n$.

2. z est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n} = 1$ ce qui équivaut à $z + 1 = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2n}\right)$ où k est un entier compris entre 0 et $2n-1$. Donc les racines de A sont $z_0 = 0$ et $z_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$ avec k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

3. (a) Faisons dans P_n le changement d'indice $\ell = 2n - k$. Alors :

$$P_n = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-\ell)\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{\ell\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$$

car $\sin(\pi - x) = \sin x$.
On en déduit que

$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2.$$

De plus, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$, $\dfrac{k\pi}{2n}$ appartient à $[0, \pi]$ donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$ ce qui implique que P_n et Q_n sont positifs. Par conséquent, $P_n = \sqrt{Q_n}$.

(b) On a $B(x) = \prod_{k=1}^{k=2n-1} (x - z_k)$ donc $B(0) = (-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = b_0$, soit

$$\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = -b_0 = -2n\,.$$

D'autre part, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$:

$$z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\,,$$

donc,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{k=2n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i\frac{k\pi}{2n}} \\ &= 2^{2n-1} i^{2n-1} \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\sum_{k=1}^{k=2n-1} k\right) \prod_{k=1}^{k=2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = 2^{2n-1}\frac{(-1)^n}{i}\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right) Q_n;$$

or $\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right) = e^{in\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^n}{i}$ d'où

$$Q_n = 2n \times 2^{1-2n} = \frac{n}{4^{n-1}} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Problème

I. Continuité et dérivation sous le signe $\int$.

1. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable sur $[a,b]$. La fonction g est ainsi bien définie.

   Soient $x_0 \in I$ et $r > 0$, tel que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$, ce qui est possible puisque I est ouvert. Le pavé $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$ est une partie compact de $\mathbb{R}^2$ (il est fermé et borné). La fonction f est donc uniformément continue sur $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in [x_0 - r, x_0 + r]$ et pour tout $t, t' \in [a,b]$, on a

   $$(|t - t'| \le \eta \quad \text{et} \quad |x - x'| \le \eta) \implies \Big|f(x,t) - f(x',t')\Big| \le \varepsilon\,.$$

   Soit x et x' appartenant à $[x_0 - r, x_0 + r]$. Nous avons

   $$\big|g(x) - g(x')\big| = \Big|\int_a^b \big(f(x,t) - f(x',t)\big)dt\Big| \le \int_a^b \big|f(x,t) - f(x',t)\big|dt\,.$$

   Appliquons l'uniforme continuité de f sur $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$ en choisissant $t = t'$. Si $|x - x'| \le \eta$, alors on a $\big|f(x,t) - f(x',t)\big| \le \varepsilon$ quel que soit $t \in [a,b]$, d'où

$\int_a^b \left|f(x,t) - f(x',t)\right| dt \leq \varepsilon(b-a)$. Ainsi on a $\left|g(x) - g(x')\right| \leq \varepsilon(b-a)$ dès que x et x' appartiennent à $[x_0 - r, x_0 + r]$. Cela montre que g est uniformément continue sur $[x_0 - r, x_0 + r]$, en particulier g est continue au point x_0.
Le point x_0 étant pris arbitrairement dans I, cela entraine que g est continue sur I.

2. (a) La fonction φ est dérivable sur I, car elle est somme de fonctions dérivables et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,.$$

Soient $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Soit $r > 0$, tel que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$, ce qui est possible puisque I est ouvert. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur le compact $K = [x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$, il existe donc $\varrho > 0$ tel que pour tout $(t,x), (t',x') \in K$, on ait :

$$(|t - t'| \leq \varrho \quad \text{et} \quad |x - x'| \leq \varrho) \implies \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x',t')\right| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui, en prenant $\eta = \min(\varrho, r)$, donne

$$\forall t \in [a,b]\,, \quad \forall x \in I\ ; \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varepsilon\,.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$, par la question précédente, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I\,, \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \forall t \in [a,b]\,, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varepsilon\,. \tag{1}$$

Soit $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et $t \in [a,b]$, par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]\min(x_0,x), \max(x_0,x)[$ tel que $\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t) = (x - x_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,t)$. Comme $\varphi(x_0,t) = 0$ et $\xi \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, par (1), $|\varphi(x,t)| \leq |x - x_0|\varepsilon$. Ce qui donne,

$$x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \Longrightarrow |\varphi(x,t)| \leq |x - x_0|\varepsilon\,, \quad \forall t \in [a,b].$$

(c) Soit $x_0 \in I$ fixé. En intégrant la fonction φ entre a et b on a pour tout $x \in I$,

$$\left|g(x) - g(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| = \left|\int_a^b \varphi(x,t)dt\right|.$$

D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I\,, \ |x - x_0| \leq \eta \implies \left|g(x) - g(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| \leq \varepsilon|x - x_0||b - a|\,.$$

La fonction g est ainsi dérivable en x_0 avec pour dérivée :

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\,.$$

Enfin, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant continue, le théorème de continuité sous le signe $\int$ démontré dans **I**. 1., nous donne la continuité de g'.

3. C'est une simple récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, la démonstration à l'ordre $k=1$, est traitée dans la partie **I**.2. Supposons que la relation est vraie jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ et supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I \times [a,b]$. Alors, par l'hypothèse de récurrence g est de classe $\mathcal{C}^k$ et
$$g^{(k)} = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt\,.$$
Comme f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I \times [a,b]$, la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $I \times [a,b]$. On applique le résultat de la récurrence pour $k=1$ à la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ et on obtient immédiatement le résultat à l'ordre $k+1$.

II.

1. Soit $x > 0$, comme l'intégrale $Sf(x)$ converge, la somme partielle $\sum_{n=0}^N u_n(x) = \int_0^{N+1} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt$ converge vers $Sf(x)$ quand N tend vers $+\infty$. Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et a pour somme Sf.

2. On utilise le résultat de la première partie : l'application $(x,t) \mapsto \frac{tf(t)}{x^2+t^2}$ de $\mathbb{R}_+^* \times [n,n+1]$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction u_n est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n^{(k)}(x) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)dt.$

3. On a $x^2+t^2 = (x-it)(x+it)$. Par les méthodes classiques on décompose la fraction rationnelle $\frac{t}{x^2+t^2}$ en éléments simples, on trouve $\alpha = -\frac{i}{2}$ et $\beta = \bar{\alpha} = \frac{i}{2}$:
$$\frac{t}{x^2+t^2} = -\frac{i}{2}\frac{1}{x-it} + \frac{i}{2}\frac{1}{x+it}\,. \tag{2}$$
Or, pour tout $k \in N^*$,
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{1}{x-it}\Big) = \frac{(-1)^k k!}{(x-it)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{1}{x+it}\Big) = \frac{(-1)^k k!}{(x+it)^{k+1}}\,.$$
d'où
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) = (-1)^{k+1} i \frac{k!}{2}\Big[\frac{1}{(x-it)^{k+1}} - \frac{1}{(x+it)^{k+1}}\Big]\,.$$
Pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$, on a $|x-it| = |x+it| = (x^2+t^2)^{\frac{1}{2}}$ et
$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\Big| &\leq \frac{k!}{2}\Big[\frac{1}{|x-it|^{k+1}} + \frac{1}{|x+it|^{k+1}}\Big] \\ &= \frac{k!}{\big(x^2+t^2\big)^{\frac{k+1}{2}}}\,.\end{aligned}$$

4. Rappelons que d'après la question II, b, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*\,, \quad u_n^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} f(t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)dt.$$

La fonction f étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, la quantité $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| \in \mathbb{R}_+$ est finie. Posons $A_k = Mk!$. On a pour tout $x \in [a, +\infty[$

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}\,.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$ est convergente (car $k+1 \geq 2$ et $\frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \sim \frac{1}{t^{k+1}}$), la série de terme général $A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$ est convergente, ce qui prouve la convergence normale sur $[a, +\infty[$ de la série $\sum u_n^{(k)}$.

5. On démontre par récurrence la propriété suivante, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, Sf appartient à $\mathcal{C}^k$ et

$$\big(Sf\big)^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) f(t)dt\,.$$

Démontrons la propriété pour $k=1$, la preuve du passage de k à $k+1$ est identique à celle pour $k=1$. Soit $a>0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ est convergente sur $[a,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, de plus la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme la fonction $Sf = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et pour tout $x \in [a,+\infty[$,

$$(Sf)'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) f(t)dt\,.$$

Enfin, comme $a>0$ est arbitraire, Sf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.

1. Posons $u(t) = \frac{t}{x^2+t^2}$ et $v(t) = -\cos(t)$. Par intégration par parties, on obtient, pour tout $T>0$,

$$\int_0^T \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt = -\frac{T\cos(T)}{x^2+T^2} + \int_0^T \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt\,.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt$ est absolument convergente puisque

$$\Big|\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)\Big| \leq \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{1}{x^2+t^2}\,.$$

Par ailleurs $\left|\frac{T\cos(T)}{x^2+T^2}\right| \leq \frac{T}{x^2+T^2} \to 0$ quand $T \to +\infty$. Il en résulte que $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt$ est convergente et $g \in \mathcal{E}$. De plus

$$Sg(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt\,. \tag{3}$$

2. (a) En utilisant la décomposition (2), on vérifie que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) = -\frac{i}{(x-it)^3} + \frac{i}{(x+it)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)$$

(b) D'après la question précédente et II. 5, on a

$$(Sg)''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)dt\,.$$

On intégre une première fois par parties, on a

$$\begin{aligned}(Sg)''(x) &= -\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\cos(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\cos(t)dt\,,\end{aligned}$$

car $\Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)\Big| \leq \Big|\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\Big| \to 0$ quand t tend vers $+\infty$. Par une deuxième intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}(Sg)''(x) &= \Big[\frac{t}{x^2+t^2}\cos(t)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt \\ &= (Sg)(x)\,,\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\cos(t) = 0$.

(c) L'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des fonctions y de la forme $y : x \to ae^x + be^{-x}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. (a) D'après (3),

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt\Big| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2}dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}dt\,.\end{aligned}$$

Puis par le changement de variable $u = x/t$ on obtient,

$$(Sg)(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}dt = \frac{1}{x}\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}\,.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty}(Sg)(x) = 0$.

(b) La fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est prolongeable par continuité au point zéro, elle est donc intégrable au voisinage de zéro et sur tout intervalle de type $[0, M]$, en particulier sur $[0, \pi/2]$. Montrons la convergence de l'intégrale sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$. Par une intégration par parties, pour tout $M > \pi/2$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\sin(t)}{t}dt = -\frac{\cos(M)}{M} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\cos(t)}{t^2}dt\,.$$

L'absolue convergence de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{\cos(M)}{M} = 0$ implique la convergence de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et par suite celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt &= -x^2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x^2+t^2)}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda\end{aligned}$$

par le changement de variables $t = x\lambda$.
Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \le |u|$. Donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda\Big| &\le \int_0^{+\infty} \frac{x\lambda}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda \\ &= x\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2+1} \\ &= \frac{\pi}{2}x\,.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et $Sg(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0.

(c) D'après les questions (b) et (c) de **III**. 2., il existe deux constantes a et b telles que $Sg(x) = ae^x + be^{-x}$, pour tout $x > 0$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Sg(x) = 0$, la constante a est nulle, $a = 0$ et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Sg(x) = \frac{\pi}{2}$, on a $b = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,, \quad Sg(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}\,.$$