ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels. Quel que soit le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on identifie le polynôme P et la fonction $x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est naturellement associée.
Soit n un entier naturel non nul. On considère le polynôme $A(x) = (x+1)^{2n} - 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $A(x) = x \times B(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

3. On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

   (a) Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \displaystyle\prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$.

   En déduire que, si $Q_n = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

   (b) Calculer de deux façons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin, P_n.

Problème

I. Continuité et dérivation sous le signe $\int$.

Soient $a < b$ deux nombres réels, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et

$$f : \begin{cases} I \times [a,b] & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto f(x,t) \end{cases}$$

une application continue. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \int_a^b f(x,t)dt.$$

1. Montrer que g est continue.

2. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur $I \times [a,b]$. Soit $x_0 \in I$; posons pour $x \in I$:

$$\varphi(x,t) = f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t).$$

   (a) Montrer que la fonction φ est dérivable par rapport à x sur I et pour tout $x_0 \in I$,

$$\forall \varepsilon > 0\,,\quad \exists \eta > 0\,,\quad \forall t \in [a,b]\,,\quad \forall x \in I \quad ; \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\Big| \leq \varepsilon\,.$$

   (b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\quad \exists \eta > 0\,,\quad \forall x \in I\,,\quad |x - x_0| \leq \eta \implies \forall t \in [a,b]\,,\quad \Big|\varphi(x,t)\Big| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

   (c) Montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\,.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si f admet k dérivées partielles par rapport à x, qui sont toutes continues sur $I \times [a,b]$, alors la fonction g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$g^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt\,.$$

II. On désigne par $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues et bornées f sur $[0,+\infty[$, et telles que pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt$ soit convergente.

On considère l'application S qui à tout élément f de $\mathcal{E}$, fait correspondre la fonction Sf définie sur $]0,+\infty[$ par

$$Sf(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt\,.$$

Soient f un élément quelconque de $\mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par u_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt\,.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers Sf.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n appartient à $\mathcal{C}^\infty$.

3. Déterminer $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que,

$$\frac{t}{x^2+t^2} = \frac{\alpha}{x - it} + \frac{\beta}{x + it}\,,\ \text{pour tout couple } (x,t) \neq (0,0).$$

   Utiliser cette égalité pour calculer $\displaystyle\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)$ et en déduire que, pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$ on a :

$$\Big|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\Big| \leq \frac{k!}{\big(x^2+t^2\big)^{\frac{k+1}{2}}}\,.$$

4. On note $u_n^{(k)}$ la dérivée k-ème de la fonction u_n. Soit $a \in]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe une constante A_k telle que, pour tout $x \geq a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} .$$

En déduire que la série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]a, +\infty[$.

5. Montrer que la fonction Sf appartient à $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(Sf\right)^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) f(t)dt .$$

III. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \sin(t)$.

1. Montrer que pour tout nombre positif T, on a

$$\int_0^T \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt = -\frac{T\cos(T)}{x^2+T^2} + \int_0^T \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt . \qquad (1)$$

En déduire que g appartient à $\mathcal{E}$.

2. Le but de cette partie est de détérminer une équation différentielle dont Sg est solution.

(a) Prouver que pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$ on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right) = 0 .$$

(b) En déduire que sur $]0, +\infty[$, la fonction Sg est solution de l'équation différentielle

$$y" - y = 0. \qquad (E)$$

Indication : on pourra utiliser II, 5 et faire deux intégrations par parties successives.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

3. Détermination explicite de Sg.

(a) Prouver que pour tout $x > 0$, on a

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt\right| \leq \frac{\pi}{2x} .$$

Indication : on pourra utiliser l'égalité (1).
En déduire la limite de $(Sg)(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente et que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda .$$

Déduire de cette égalité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

(c) On admet sans démonstration que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Expliciter la fonction Sg.