Avril 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

I

1. L'ensemble $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ est non-vide, car il contient les fonctions constantes et toute fonction lipschitzienne est continue sur I. Donc $\mathcal{L}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

   Soient f et g deux fonctions lipschitziennes, de constantes de Lipschitz respectives K_f et K_g, et λ un réel. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}|(f(x)+\lambda g(x))-(f(y)+\lambda g(y))| &\leqslant |f(x)-f(y)|+|\lambda||g(x)-g(y)| \\ &\leqslant (K_f+|\lambda|K_g)|x-y|,\end{aligned}$$

   ce qui implique que $f+\lambda g$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz $K_f+|\lambda|K_g$. Donc $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

   L'existence de K_f découle directement du théorème de la borne supérieure : toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

2. Soit $f, g \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ deux fonctions bornées et M_1 et M_2 des majorants respectifs de $|f|$ et de $|g|$. Pour tout $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leqslant |f(x)g(x)-f(x)g(y)|+|f(x)g(y)-f(y)g(y)| \\ &\leqslant M_1|g(x)-g(y)|+M_2|f(x)-f(y)| \\ &\leqslant (M_1K_g+M_2K_f)|x-y|,\end{aligned}$$

   donc fg appartient à $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$.

   Prenons $I=\mathbb{R}$, $f=g : x \mapsto x$, f et g sont trivialement des fonctions lipschitziennes, mais le produit $fg : x \mapsto x^2$, n'est pas une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car, pour $x=n\in\mathbb{N}^*$ et $y=0$, on a, $\left|\frac{n^2-0}{n-0}\right| = n$ non borné.

3. Supposons l'intervalle I compact. Soient f_1 et f_2 deux fonctions lipschitziennes, elles sont donc continues sur I.
   Puisque I est compact et f_1, f_2 continues, elles sont bornées sur I. Par la question précédente la fonction f_1f_2 est lipschitzienne.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(0)| \leq K_f|x|$, ce qui implique

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad |f(x)| \leq |f(0)| + K_f|x|\,.$$

   D'où le résultat demandé avec, en particulier, $A=|f(0)|$ et $B=K_f$.

5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est lipschitzienne, pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant K_f \,,$$

comme x est arbitrairement pris dans I, on a $\sup_{x \in I} |f'(x)| \leq K_f$.
Inversement, soit $x, y \in I$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in \,]\min(x,y), \max(x,y)[$ tel que

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leq \sup_{x \in I} |f'(x)| \,,$$

ce qui montre que f est lipschitzienne et que $K_f \leqslant \sup_{x \in I} |f'(x)|$.
D'où l'équivalence souhaitée et $K_f = \sup_{x \in I} |f'(x)|$.

6. Soient M un majorant de la suite $(K_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $x, y \in I$, on a $|f_n(y) - f_n(x)| \leq K_{f_n}|y - x| \leq M|y - x|$, en particulier, $|f_n(y) - f_n(x)| \leq M|y - x|$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient, $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. D'où f est lipschitzienne et $K_f \leq M$.

7. Soit $g \in \mathcal{L}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $K_g \leq 1$. On considère la fonction $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\widetilde{g}(x) = g(x - n) + n(g(1) - g(0))$ pour tout x dans $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$.

   (a) La fonction $\widetilde{g}$ est clairement continue comme composée est somme de fonctions continues. Montrons qu'elle est lipschitzienne : soit $x, y \in \mathbb{R}$ distincts et supposons sans perte de généralité que $x < y$. Si x et y sont dans un même intervalle $[n, n+1]$, il est clair que $|\widetilde{g}(y) - \widetilde{g}(x)| \leq |y - x|$. Sinon, il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $k \leq x \leq k+1 \leq \ell \leq y \leq \ell + 1$, on a

$$\begin{aligned}
|\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(y)| &\leq |\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(k+1)| + |\widetilde{g}(k+1) - \widetilde{g}(\ell)| + |\widetilde{g}(\ell) - \widetilde{g}(y)| \\
&\leq (k+1-x) + |(\ell - k - 1)(g(1) - g(0))| + (y - \ell) \\
&\leq (k+1-x) + (\ell - k - 1) + (y - \ell) \;=\; y - x \,.
\end{aligned}$$

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $g_n'(x) = n\big(\widetilde{g}(x + \frac{1}{n}) - \widetilde{g}(x)\big)$ et $\widetilde{g}$ est continue, donc g_n est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$|g_n'(x)| \leq n|\widetilde{g}(x + \frac{1}{n}) - \widetilde{g}(x)| \leq n(x + \frac{1}{n} - x) = 1 \,.$$

   (c) Le changement de variable $u = n(t - x)$ donne $g_n(x) = \int_0^1 \widetilde{g}(x + \frac{u}{n})\, du$ et comme $\widetilde{g}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz plus petite ou égale à 1, on a

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - \widetilde{g}(x)| &\leqslant \int_0^1 |\widetilde{g}(x + \frac{u}{n}) - \widetilde{g}(x)|\, du \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{u}{n}\, du = \frac{1}{2n} \,.
\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \{|g_n(x) - \widetilde{g}(x)|\} \leq \dfrac{1}{2n}$ et donc la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ vers $\widetilde{g}$.

II

1. Raisonnement par récurrence : la formule (2) est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie au rang n, l'application de la formule (1) en $x + na$ donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ &= \lambda^n \big[\lambda F(x+(n+1)a) + f(x+na)\big] + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \\ &= \lambda^{n+1} F(x+(n+1)a) + \sum_{k=0}^{n} \lambda^k f(x+ka)\,, \end{aligned}$$

   ce qui est la formule au rang $n+1$.

   On procède également par récurrence : la formule (1) appliquée en $x - a$ donne

$$F(x) = \frac{1}{\lambda} F(x-a) - \frac{1}{\lambda} f(x-a)$$

   qui est la formule (3) au rang 1. On obtient le passage du rang n au rang $n+1$ en appliquant la formule précédente en $x - na$.

2. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

   (a) Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, d'après la question **I**. 4., il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \le A|x| + B$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\lambda^n f(x+na)| \leqslant |\lambda|^n (A|x+na| + B) \leqslant (A|x| + B)|\lambda|^n + A|an||\lambda|^n.$$

   Comme les séries de termes positifs $|\lambda|^n$ et $n|\lambda|^n$ sont convergentes ($|\lambda| < 1$), il en est de même pour la série de terme général $|\lambda^n f(x+na)|$.

   (b) Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$, on a

$$F(x) - \lambda F(x+a) = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n \geqslant 0} \lambda^{n+1} f(x+(n+1)a) = f(x)\,,$$

   donc F vérifie (1).
   Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \big[f(x+na) - f(y+na)\big] \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K_f |x-y|\ .$$

   Donc $|F(x) - F(y)| \leqslant \dfrac{K_f}{1 - |\lambda|}\ |x-y|$. Donc $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   Reste à montrer que F est unique. Soit G une autre fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

(1). Par ce qui précède et **I.** 1., $G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par la formule (2), elle vérifie

$$(G-F)(x) = \lambda(G-F)(x+a) = \lambda^n (G-F)(x+na),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après **I.** 4., il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|(G-F)(x)| \leqslant |\lambda|^n \left(A|x+na| + B\right) , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle, donc $G-F$ est nulle. Donc F est l'unique fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(c) Les dérivées des fonctions f_1 et f_2 sont bornées, donc elles sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On a

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cos(x+na) \quad \text{et} \quad F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sin(x+na)\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^n \cos(x+na)$ et $\lambda^n \sin(x+na)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $\lambda^n e^{i(x+na)} = e^{ix}(\lambda e^{ia})^n$.
On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \exp\left(i(x+na)\right) = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1-\lambda \mathrm{e}^{ia}} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \lambda \mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a + \lambda^2}\ .$$

F_1 et F_2 sont les parties réelle et imaginaire de la somme qui vient d'être calculée :

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ , \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\,. \tag{4}$$

3. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

(a) Même démonstration que dans **II.** 2. (a). Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que $|f(x)| \leq A|x| + B$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$|\lambda^{-n} f(x-na)| \leqslant |\lambda|^{-n}(A|x-na|+B) \leqslant (A|x|+B)|\lambda|^{-n} + A|an||\lambda|^{-n}.$$

Comme les séries de termes positifs $|\lambda|^{-n}$ et $|n||\lambda|^{-n}$ sont convergentes ($|\lambda|^{-1} < 1$), il en est de même pour la série de terme général $|\lambda^{-n} f(x-na)|$.

(b) On suit la même preuve que dans **II.** 2. (b).
Soit F définie par $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^n} f(x-na)$, on a

$$F(x) - \lambda F(x+a) = -\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{-n} f(x-na) + \sum_{n\geqslant 1} \lambda^{-n+1} f(x-(n-1)a) = f(x)\,,$$

donc F vérifie (1).
Soit $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(x)-F(y)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n}\big[f(x-na) - f(y-na)\big]\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda|^{-n} K_f |x-y|\ .$$

Donc $|F(x)-F(y)| \leqslant K_f \dfrac{|\lambda|^{-1}}{1-|\lambda|^{-1}}\ |x-y| = \dfrac{K_f}{|\lambda|-1}$. Donc $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
De même, l'unicité se démontre exactement comme dans **II.** 2. (b). Soit G une autre fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1), alors $G-F$ est une fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie,

$$(G-F)(x) = \lambda^{-1}(G-F)(x-a) = \lambda^{-n}(G-F)(x-na)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
D'après **I.** 4., il exste $A > 0$ et $B > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|(G-F)(x)| \leqslant |\lambda|^{-n}\left(A|x-na|+B\right)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite de limite nulle quand $n \uparrow +\infty$, donc $G-F$ est nulle. F est l'unique fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(c) Même calcul que dans **II** 2. (c). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre complexe suivant

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} \exp\left(i(x-na)\right) = -\frac{\lambda^{-1}\mathrm{e}^{i(x-a)}}{1-\lambda^{-1}\mathrm{e}^{-ia}} = -\frac{\lambda \mathrm{e}^{i(x-a)} - \mathrm{e}^{ix}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ .$$

F_1 et F_2 ont la même expression qu'en **II.** 2. (c) :

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2} \quad , \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\ .$$

4. On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

(a) Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, $F(x)-F(x+a) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. D'où $|f(x)| \leqslant K_F|a|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est donc bornée.

(b) Si $f = 0$, les fonctions constantes ou les fonctions lipschitziennes périodiques de période a conviennent, par exemple $F(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$.

(c) Si $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie (1), pour toute fonction G lipschitzienne périodique de période a, la fonction $F+G$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie également (1). La fonction F n'est donc pas unique.

(d) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = f_2(x) = \sin x$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question **II.** 2. (c), formule (4), pour tout $-1 < \lambda < 1$,

$$F_2(x) - \lambda F_2(x+a)\ =\ \sin(x)\,,$$

où F_2 est donnée par la formule (4) (elle dépend naturellement de λ). En faisant tendre λ vers 1, on obtient l'expression

$$F(x) - F(x+a)\ =\ \sin(x)\,,$$

où $F(x) = \dfrac{\sin x - \sin(x-a)}{2(1-\cos a)}$ $(\cos a \neq 1)$. Cette fonction F est lipschitzienne comme combinaison linéaire de deux fonctions de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifie (1) pour $\lambda = 1$. Elle répond donc à la question.

(ii) Supposons que $a = 2\pi$. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (1) pour $\lambda = 1$. D'après la formule (2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F(x) = F(x + 2n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x + 2k\pi) = F(x + 2n\pi) + n \sin x\,,$$

en particulier, pour $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$F(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = F(\frac{3\pi}{2}) + n \quad \text{ et } \quad F(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = F(\frac{\pi}{2}) - n\,,$$

ce qui donne, pour tout n, $F(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) - F(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 2n + F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2})$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $\lambda = 1$.

5. On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

(a) On cherche une fonction F de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $F(x) = -F(x + a)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $F(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ est une fonction vérifiant cette identité.

(b) Pour toute constante C, la fonction CF vérifie (1), où F est la fonction de la question précédente. Il n'y a donc pas d'unicité.

(c) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \sin x$.

(i) On procéde comme dans la question **II.** 4. (b). (i). Pour tout $-1 < \lambda < 1$,

$$F_2(x) - \lambda F_2(x + a) \;=\; \sin(x)\,,$$

où F_2 est donnée par la formule (4). En faisant tendre λ vers -1, on obtient l'expression $F(x) = \dfrac{\sin x + \sin(x - a)}{2(1 + \cos a)}$ $(\cos a \neq -1)$. Cette fonction F est lipschitzienne et répond à la question.

(ii) Supposons que $a = \pi$. Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (1) pour $\lambda = -1$. D'après la formule (2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F(x) = (-1)^n F(x + n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin(x + k\pi) = (-1)^n F(x + n\pi) + n \sin x\,,$$

en particulier, pour $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ et un entier $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$F(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = F(\frac{3\pi}{2}) + 2n \quad \text{ et } \quad F(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = F(\frac{\pi}{2}) - 2n\,,$$

ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) - F(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 4n + F(\frac{3\pi}{2}) - F(\frac{\pi}{2})$, ce qui contredit l'hypothèse $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'équation (1) n'admet donc aucune solution dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $\lambda = -1$.