ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x - y|\ .$$

I

Dans cette partie nous allons étudier quelques propriétés des fonctions lipschitziennes.

1. Montrer que $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
   Si $f \in \mathcal{L}(I,\mathbb{R})$, justifier l'existence du réel K_f défini par
   $$K_f = \sup\left\{\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|\ \mid\ (x,y) \in I^2\ ,\quad x \neq y\right\}.$$
   Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f.

2. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$. Montrer que leur produit fg est aussi une fonction de $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

3. On suppose dans cette question que I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que si f et g sont des éléments de $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$, le produit fg est aussi une fonction de $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Montrer que f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.
   Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz de f à l'aide de f'.

6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f. On suppose de plus que $\sup\left\{K_{f_n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}<\infty$. Montrer que $f\in\mathcal{L}(I,\mathbb{R})$.

7. Soit $g\in\mathcal{L}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $K_g\leq 1$. On considère la fonction $\widetilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par $\widetilde{g}(x)=g(x-n)+n(g(1)-g(0))$ pour tout x dans $[n,n+1]$, $n\in\mathbb{Z}$.

   (a) Montrer que $\widetilde{g}\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que
   $$\widetilde{g}(x)=g(x)\ ,\quad \forall x\in[0,1]\qquad \text{et}\quad K_{\widetilde{g}}\leq 1\,.$$

   (b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ on pose $g_n(x)=n\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}}\widetilde{g}(t)dt$. Montrer que g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à dérivée bornée par 1.

   (c) Montrer que la suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widetilde{g}$.

II

Le but de cette partie est de rechercher les fonctions $F\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)-\lambda F(x+a)=f(x)\,, \tag{1}$$
où f est une fonction de $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls, donnés.

1. Soit $F\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$F(x)=\lambda^n F(x+na)+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k f(x+ka)\,, \tag{2}$$
$$F(x)=\lambda^{-n}F(x-na)-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{-k}f(x-ka). \tag{3}$$

2. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda|<1$.

   (a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser la Question **I**.4).

   (b) Montrer que
   $$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x+na)$$
   vérifie (1) et appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En déduire que F est l'unique fonction ayant ces propriétés.

(c) Soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) \;=\; \cos(x) \quad \text{ et } \quad f_2(x) \;=\; \sin(x).$$

Montrer que f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que les fonctions F_1 et F_2 correspondantes sont données par

$$F_1(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\,, \quad F_2(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\,. \tag{4}$$

3. On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$ est absolument convergente.

(b) Montrer que

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na)$$

vérifie (1) et appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En déduire que F est l'unique fonction ayant ces propriétés.

(c) Soient f_1 et f_2 les fonctions définies par

$$f_1(x) = \cos x \qquad \text{et} \quad f_2(x) = \sin x\,.$$

Calculer les fonctions F_1 et F_2 correspondantes.

4. On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

(a) Montrer que, si il existe une fonction $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1), alors f est bornée.

(b) Montrer, en construisant un exemple, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x+a) = 0$.

(c) Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1). La fonction F est-elle unique ?

(d) On suppose dans cette question que la fonction f est définie par $f(x) = f_2(x) = \sin x$.

(i) Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par la formule (4), on obtient une fonction $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(ii) Si $a = 2\pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

5. On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

(a) Montrer, en construisant un exemple, qu'il existe des fonctions $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+a) = 0$.

(b) Soit $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1). La fonction F est-elle unique ?

(c) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = f_2(x) = \sin x$.

(i) Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(ii) Si $a = \pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant (1).