Avril 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Définitions et notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Si $A \subset B$ sont deux parties de $\mathbb{R}$, on note par $B \setminus A$ le complémentaire de A dans B. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{Z}_- = \{k \in \mathbb{Z} \quad : \quad k \leq 0\}$.

On admettra le dévellopement suivant de la fonction Cotangente :

$$\forall x \in]0, \pi[\,, \qquad \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}\,. \tag{1}$$

Première partie.

1- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par $u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, $n \geq 1$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, le terme $u_n(x)$ est négatif et on a $u_n(x) \sim -\frac{x^2}{n^2}$ quand $n \to +\infty$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur $[0, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et on a $u_n'(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

Soit $0 \leq a < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $r_n = \frac{2a}{n^2 - a^2}$. Pour tout $x \in [0, a]$, on a $|u_n'(x)| \leq r_n$ qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0, a]$.

c) Soit $0 \leq a < 1$, d'après la question précédente la série de fonction $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $[0, a]$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, la fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est de classe C^1 sur $[0, a]$ et on a

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Comme a est arbitrairement pris dans $[0, 1[$, on en déduit en utilisant le dévellopement (1) que F est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et

$$F'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$

d) En intégrant la dernière égalité de la question précédente, on obtient pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = \int_0^x \left\{ \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} \right\} du \, ,$$

comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \left[\ln \frac{\sin \pi u}{u} \right]_0^x = \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \ln \pi = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} \, .$$

2- Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \qquad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, désignons par $\lfloor y \rfloor$ sa partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$, à partir de $n \geq \lfloor |x| \rfloor$, la suite $(|(s_n(x))|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle est convergente. De plus, pour tout $n \geq \lfloor |x| \rfloor$, $s_{n-1}(x)$ et $s_n(x)$ sont de même signe. La suite $(s_n(x))_{n \geq \lfloor |x| \rfloor}$ est alors de signe constant, donc elle est convergente.
On en déduit que la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction s.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

(i) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} s_n(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) &= x \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \left((k-x)(k+x)\right) \\ &= \frac{x}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (k-x)(k+x). \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) D'après la question précédente

$$s_n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (k-x) \prod_{k=0}^{n} (k+x) \, ,$$

il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$s_n(x+1) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} (k-x-1) \prod_{k=0}^{n} (k+x+1) = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k-x) \prod_{k=1}^{n+1} (k+x) \, ,$$

et pour $n > |x|$,

$$\frac{s_n(x+1)}{s_n(x)} = \frac{-x}{n-x} \times \frac{n+1+x}{x} = -\frac{n+1+x}{n-x} \, ,$$

d'où l'égalité demandée.

(iii) Pour tout $n > |x|$, $s_n(x+1) = \dfrac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$. Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $s(x+1) = -s(x)$.

c) La fonction s est nulle en 0, car $s_n(0) = 0$ pour tout n.
Pour $x \in]0,1[$, on a $s_n(x) > 0$ et $\ln s_n(x) = \ln x + \sum_{k=1}^n u_k(x)$. D'après **1-, d)**, $\lim_{n\to+\infty} \ln s_n(x) = \ln x + \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi}$.
La fonction exponentielle est continue donc $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = e^{\ln \frac{\sin \pi x}{\pi}}$, soit

$$s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n = \lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On a donc $s(x) = (-1)^n s(x-n)$ et $x - n \in [0,1[$, ainsi $s(x) = (-1)^n \dfrac{\sin \pi(x-n)}{\pi}$.
On obtient donc $s(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Deuxième partie.

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

1- Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $n \geq p+1$, $f_n(-p) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-p) = 0$.

2- On suppose que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$.

a) Puisque $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \neq 0$ et

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Il s'en suit que pour tout $n \geq N_x = \max\{1, \lfloor -x \rfloor + 1\}$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 0$ et

$$\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = -x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir du rang N_x est convergente.

b) Pour tout $n \geq N_x$, notons

$$S_n(x) = \sum_{k=N_x}^{n} \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}.$$

Par télescopage des termes, pour tout $n \geq N_x$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-N_x} \ln f_{k+N_x+1}(x) - \sum_{k=0}^{n-N_x} \ln f_{k+N_x}(x) = \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)},$$

d'où $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x) e^{S_n(x)}$. Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0$, où $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

c) D'après la question précédente, et la question **1-, a)**,

$$f(x) = \begin{cases} f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$. Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $f(x) = xf(x+1)$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1) = 1$ donc $f(1) = 1$.
En utilisant la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n, que

$$f(n) = \frac{1}{(n-1)!}, \qquad \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N}^*.$$

3- Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après (2) on a

$$\begin{aligned} f_n(x)f_n(1-x) &= \frac{n^{-x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \times \frac{n^{-1+x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(-x+k+1) \\ &= \frac{1}{n!(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k) \times \prod_{k=1}^{n}(k-x) \\ &= \frac{n}{n+x}\frac{x}{(n!)^2}\prod_{k=1}^{n}(x+k)(k-x) \\ &= \frac{n}{n+x}s_n(x). \end{aligned}$$

Le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ donne la relation demandée,

$$f(x)f(1-x) = s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

4- On se propose dans cette question de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right). \qquad (*)$$

a) (i) Pour $p = 1$ la relation $(*)$ est trivialement vérifiée.

(ii) Supposons que $p \geq 2$ et $px = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f(px) = 0$ d'après **1-**. D'autre part, remarquons que le membre de droite de l'égalité $(*)$ peut également s'écrire

$$(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{-n+k}{p}\right)$$

et parmi les entiers $\{-n+k \ : k = 0, \cdots, p-1\}$ il en existe un, noté k_0 tel que $(-n+k_0)/p$ soit un entier de $\mathbb{Z}_-$. D'après **1-**, le terme de droite dans $(*)$ est donc nul, d'où le résultat.
Montrons la propriété utilisée : il existe $k_0 \in \{0, \cdots, p-1\}$ tel que $-n+k_0 \in p\mathbb{Z}-$. Par la division euclidienne de n par p dans $\mathbb{N}$, il existe $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ tel que $n = pq + r$. Pour $k_0 = r$, on a $-n + k_0 = -pq$, ce qu'il fallait démontrer.

b) On suppose que $px \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$. Soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. Par la définition de f_n, on a d'une part,

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1} n^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{j=0}^{pn-1}(px+j),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{n^{-\left(x+\frac{k}{p}\right)}}{(n-1)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(x + \frac{k}{p} + i\right)\right) \\ &= \frac{n^{-\left(px + \frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(px+k+ip)\right), \end{aligned}$$

puis en utilisant des changement d'indices et la commutativité de la multiplication,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) &= \frac{n^{-\left(px+\frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p}\frac{1}{p^{pn}}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\prod_{\ell=ip}^{(i+1)p-1}(px+\ell)\right)\\ &= \frac{n^{-\left(px+\frac{p-1}{2}\right)}}{[(n-1)!]^p}\frac{1}{p^{pn}}\prod_{j=0}^{pn-1}(px+j)\,,\end{aligned}$$

car $\cup_{i=0}^{n-1}\{ip,\cdots,(i+1)p-1\}=\{0,\cdots,np-1\}$.
Il en résulte que

$$\frac{p^{px-1}f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right)} = p^{pn-1}n^{\frac{p-1}{2}}\frac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!} := A_p(n)$$

qui est strictement positif et ne dépend pas de x.
Le terme de gauche admet une limite égale à $\dfrac{p^{px-1}f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right)}$ lorsque $n\to+\infty$. Il en résulte que la suite $(A_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et admet une limite, positive ou nulle. On note $A_p=\lim\limits_{n\to+\infty}A_p(n)$, on obtient l'égalité demandée :

$$f(px)=A_p\,p^{-px+1}\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right). \tag{3}$$

c) D'après la question **2-**, **e)**, $f(1)=1$, en écrivant la relation ci-dessus pour $x=\dfrac{1}{p}$, on a

$$f(1)=1=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k+1}{p}\right)=A_p\prod_{k=1}^{p} f\left(\frac{k}{p}\right)=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right).$$

Le changement d'indices $k\to p-k$ donne

$$1=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right)=A_p\prod_{k=1}^{p-1} f\left(1-\frac{k}{p}\right).$$

Calculons A_p^2 : par l'égalité précédente et le résultat de la question **3-**, on a

$$1=A_p^2\prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right)f\left(1-\frac{k}{p}\right)=A_p^2\prod_{k=1}^{p-1}\frac{\sin\frac{k\pi}{p}}{\pi}\,,$$

ainsi

$$A_p^2=\frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}}.$$

d) Montrons l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle x :

$$(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2=\prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).$$

On a

$$x^p-1=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)\,,$$

ainsi le polynôme $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ a pour zéros complexes, les $p-1$ racines de l'unité $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ avec $k=1,\ldots,p-1$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{p} + 1 &= (x - e^{\frac{2ik\pi}{p}})(x - e^{-\frac{2ik\pi}{p}}) = (x - z_k)(x - \overline{z}_k) \\ &= (x - z_k)(x - z_{p-k}). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2 &= \prod_{k=1}^{p-1}(x-z_k)(x-z_{p-k}) \\ &= \prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right). \end{aligned}$$

e) En donnant à x la valeur 1, on obtient

$$\begin{aligned} p^2 &= \prod_{k=1}^{p-1}\left(2 - 2\cos\frac{2k\pi}{p}\right) = \prod_{k=1}^{p-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{p} \\ &= 4^{p-1}\left(\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}\right)^2. \end{aligned}$$

Puisque $\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p} > 0$, il en résulte que

$$\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

Avec le dernier résultat de la question précédente, on a $A_p^2 = \frac{(2\pi)^{p-1}}{p}$. sachant que $A_p \geq 0$, il vient $A_p = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{p}}$.
Finalement, en remplaçant A_p par sa valeur dans la formule (3), on obtient la formule $(*)$.

Troisième partie.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

1- Notons $h : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par $h(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'application $h(x,\cdot) : t\mapsto h(x,t)$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
D'autre part, pour tout $x\in\mathbb{R}$, On a $h(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, ainsi $h(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $x>0$, et $h(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ainsi $h(x,\cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout x.

Il en résulte que la fonction Γ est définie sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.
On vérifie que h est continue sur $]0, +\infty[^2$, ainsi que chacune de ses dérivées partielles et on a

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x, t) \mapsto \ln^k t \; e^{-t} t^{x-1}.$$

Considérons un segment $[a, b] \subset \mathcal{D}$ et notons $g_{a,b}(t) = \big(t^{a-1} + t^{b-1}\big)e^{-t}$. Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, on a

$$|h(x,t)| \leq g_{a,b}(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \max\{|\ln^k(a)|, |\ln^k(b)|\} g_{a,b}(t)\,.$$

Comme la fonction $g_{a,b}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que Γ est indéfiniment dérivable sur $[a, b]$. Comme a, b sont arbitrairement choisis sur $\mathcal{D}$, on en déduit que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

2- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt.$$

a) Soit $g_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.
Soit $n \geq 1$ et $x > 0$. Par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\, du \\ &= \frac{n}{x} g_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$g_n(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x(x+1)\dots(x+k-1)} g_{n-k}(x+k).$$

Par ailleurs, pour tout $y \in]0, +\infty[$,

$$g_0(y) = \int_0^t u^{y-1} du = \left[\frac{1}{y}u^y\right]_0^1 = \frac{1}{y}\,,$$

d'où $g_n(x) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = nu$ donne $g_n(x) = n^{-x} G_n(x)$.
En remplaçant par la valeur de $f_n(x)$, non nulle, on obtient

$$G_n(x) = \frac{n}{(n+x) f_n(x)}.$$

c) On étudiant la fonction $\varphi(x) = e^x - 1 - x$, on vérifie que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \geq 0 \quad \text{et} \quad e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \geq 0$$

pour tout $t \in [0, n]$.
En élevant à la puissance n, on obtient les inégalités demandées :

$$e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n.$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

d) Soit $a \in [0, 1]$. L'inégalité $(1 - a)^n \geq 1 - na$ est vérifiée pour $n = 1$.
Supposons-la vérifiée pour $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} (1-a)^{n+1} &= (1-a)(1-a)^n \\ &\geq (1-a)(1-na) = 1 - (n+1)a + na^2 \\ &\geq 1 - (n+1)a. \end{aligned}$$

Il en résulte, par récurrence sur n, que l'on a $(1 - a)^n \geq 1 - na$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant la question précédente, on obtient

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - n\frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

e) Pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}\, dt \\ &= \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \\ &\leq \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$0 \leq \Gamma(x) - G_n(x) \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt.$$

L'existence de $\Gamma(x)$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = 0$.
Par ailleurs, $\int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$.
D'après la question **2-**, **a)**, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \frac{1}{f(x)}$, ainsi $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$.