Avril 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Problème I.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, Pour un entier $d \geq 1$, on note par $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre d.

1- Soit $A \in \mathcal{M}_d$. Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est que son polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_d)$ soit scindé :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^d \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

et que pour tout $1 \leq k \leq r$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_d)$ soit de dimension α_k.

2- Pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \big(P\, M_n\big)(i,j) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{d} p_{ik}\, m_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{d} p_{ik}\, m_{kj} = \big(P\, M\big)(i,j).$$

De même,

$$\lim_{n \to +\infty} \big(M_n\, P\big)(i,j) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{d} m_{ik}(n)\, p_{kj} = \sum_{k=1}^{d} m_{ik}\, p_{kj} = \big(M\, P\big)(i,j)\,,$$

ce qui donne le résultat.

3- Dans toute cette partie, nous considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) On note $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $R = \dfrac{1}{6}\, I_2$.

Le polynôme caractéristique de la matrice Q est donné par

$$\chi_Q(\lambda) = (\lambda - 1/3)^2 - 1/4 = (\lambda - 5/6)\,(\lambda + 1/6).$$

D'après la condition suffisante rappelée dans la question **1-**, Q est diagonalisable. Il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_2$ inversible telle que $Q = P\, D\, P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}$. Il s'en suit que

$$Q^n = P\, D^n\, P^{-1} = P \begin{pmatrix} (5/6)^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En utilisant la question **2-**, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} Q^n = \lim_{n \to +\infty} P \begin{pmatrix} (5/6)^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Les valeurs propres de $I_2 - Q$ sont $1 - 5/6 = 1/6$ et $1 + 1/6 = 7/6$. 0 n'est pas valeur propre de $I_2 - Q$, donc $I_2 - Q$ est inversible.
Notons $S_n = I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n$, on a

$$(I_2 - Q)\, S_n = (I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) - (Q + Q^2 + \cdots + Q^{n+1}) = I_2 - Q^{n+1}\,.$$

En utilisant la question **2-**, il vient

$$(I_2 - Q) \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (I_2 - Q^{n+1}) = I_2\,.$$

On obtient finalement

$$\lim_{n\to+\infty} (I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) = (I_2 - Q)^{-1}\,.$$

c) Désignons par O la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) La matrice A se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la façon suivante

$$A = \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I_2 \end{pmatrix}\,,$$

en faisant un produit par blocs, on a $A^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R(I_2 + Q) & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R\,S_1 & I_2 \end{pmatrix}$.
Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix}$.
Cette égalité est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n \geq 1$, alors

$$A^{n+1} = A^n\, A = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R\,S_{n-1}\,Q + R & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R\,S_n & I_2 \end{pmatrix}\,,$$

la formule est donc vraie au rang $n + 1$.

(ii) D'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} O & O \\ R\,(I_2 - Q)^{-1} & I_2 \end{pmatrix}.$$

Après calculs on obtient

$$I_2 - Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}\;; \qquad (I_2 - Q)^{-1} = \frac{1}{4/9 - 1/4} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et

$$R\,(I_2 - Q)^{-1} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4- Dans cette partie, on fixe une base de $\mathbb{R}^d$, $d > 1$. On convient de noter de la même façon un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et la matrice colonne à d lignes associée à ce vecteur. Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d$.

a) On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda I_d) = \det\left({}^t(A - \lambda I_d)\right) = \det\left({}^tA - \lambda I_d\right).$$

Donc λ est valeur propre de A si et seulement si elle est valeur propre de ${}^tA$. En particulier, A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

b) Soit x (resp. y) un vecteur propre de A (resp. ${}^tA$) associé à la valeur propre λ (resp. μ), alors $A\,x = \lambda\,x$ et ${}^tA\,y = \mu\,y$. On a, d'une part ${}^ty\,A\,x = {}^ty\lambda\,x = \lambda{}^ty\,x = \lambda\sum_{k=1}^d x_k y_k$ et d'autre part, ${}^t\left({}^ty\,A\,x\right) = {}^tx{}^tAy = {}^tx\mu\,y = \mu\sum_{k=1}^d x_k y_k$.
Puisque ${}^ty\,A\,x$ est un réel, ces deux dernières quantités sont égales. Donc $\lambda \neq \mu$ implique ${}^ty\,x = 0$.

c) On suppose désormais que A possède d valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ et vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$.
On note x_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et y_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à cette même valeur propre.

(i) Montrer que $(x, y) \mapsto (x|y) = {}^ty\,x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

(*) Linéarité à gauche : $\forall(\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$(\lambda\,x_1 + x_2|y) = {}^ty\,(\lambda\,x_1 + x_2) = \lambda\,{}^ty\,x_1 + {}^ty\,x_2 = \lambda\,(x_1|y) + (x_2|y).$$

(*) Symétrie : $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (y|x) = {}^tx\,y = {}^t\left({}^tx\,y\right) = {}^ty\,x = (x|y)$,
car ${}^tx\,y$ est égale à sa transposée (c'est un réel).

(*) Elle est définie positive : soit $x \in \mathbb{R}^d$, notons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ sa représentation dans la base de $\mathbb{R}^d$ fixée par l'énoncé. On a ${}^tx\,x = \sum_{k=1}^{d} x_k^2$, cette dernière quantité est strictement positive sauf si $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $(x_1, \cdots, x_d)$ est une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^d$. C'est une base, car elle possède d éléments dans $\mathbb{R}^d$ qui est de dimension d.

(iii) Soit $1 \leq k \leq d$. y_k est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_k. D'après la question **4, b)**, ${}^ty_k x_i = 0$, pour tout $i \neq k$, donc y_k est orthogonal au sous espace vectoriel engendré par $\{x_i\,, \quad i \neq k\}$. Le réel ${}^ty_i x_i$ est alors non nul, en effet si ${}^ty_i x_i = 0$, on aurait que y_k serait orthogonal à tous les vecteurs de la base $\{x_1, \cdots, x_d\}$, donc $y_k = 0$, contradiction.
Notons $a_k = {}^ty_k x_k$ et $y'_k = \dfrac{y_k}{a_k}$, on obtient ainsi un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_k et ${}^ty'_k x_k = 1$. On peut donc choisir la famille $\{y_1, \cdots, y_d\}$ de sorte que ${}^ty_k x_k = 1$ pour tous $1 \leq k \leq d$.

d) Soit $(i, j) \in \{1, \cdots, d\}^2$. Si $i \neq j$, $A_i\,A_j = (x_i{}^ty_i)\,(x_j{}^ty_j) = x_i({}^ty_i\,x_j){}^ty_j = 0$, car ${}^ty_i\,x_j = 0$ et pour $i \in \{1, \cdots, d\}$, on a $A_i^2 = (x_i{}^ty_i)\,(x_i{}^ty_i) = x_i({}^ty_i\,x_i){}^ty_i = x_i{}^ty_i = A_i$, car ${}^ty_i\,x_i = 1$.
On peut donc conclure que pour tous $1 \leq i, j \leq d$, $A_i\,A_j = \delta_{ij}\,A_i$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

e) Puisque $(x_1, \cdots, x_d)$ est une base, pour montrer que $\sum_{i=1}^{d} A_i = I_d$ il suffit de montrer que $\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right) x_k = I_d\, x_k$ pour tout $1 \le k \le d$. Soit $k \in \{1, \cdots, d\}$, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right) x_k &= \sum_{i=1}^{d} A_i\, x_k = \sum_{i=1}^{d} (x_i\,{}^t y_i)\ x_k \\ &= \sum_{i=1}^{d} x_i\,({}^t y_i\ x_k) = \sum_{i=1}^{d} x_i\,\delta_{ik} = x_k = I_d\, x_k\,.\end{aligned}$$

On procède de la même manière pour montrer que $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i = A$. Pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i\right) x_k &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i\, x_k = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\,(x_i\,{}^t y_i)\ x_k \\ &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, x_i\,({}^t y_i\ x_k) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, x_i\,\delta_{ik} = \lambda_k\, x_k = A\, x_k\,.\end{aligned}$$

f) Montrer par récurrence que pour tout $n \ge 1$, $A^n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i$.
L'égalité est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie pour n, alors

$$\begin{aligned}A^{n+1} = A^n\, A &= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i\right)\left(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j\, A_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \lambda_i^n\,\lambda_j\, A_i\, A_j = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \lambda_i^n\,\lambda_j\,\delta_{ij}\, A_i \\ &= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n+1}\, A_i\,,\end{aligned}$$

l'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.
Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g) On a $\dfrac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1 + \sum_{i=2}^{d} \dfrac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} A_i$. Or, pour tout $i \ge 2$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n = 0$ car $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1$.

h) Montrons que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\lambda_1 \in]-1, 1]$.
Montrons que la condition est suffisante :
– si $\lambda_1 = 1$, alors d'après la question précédente, $\lim_{n\to\infty} A^n = A_1$;
– si $\lambda_1 \in]-1, 1[$, alors comme $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$, tous les λ_i sont dans $]-1, 1[$, et $A^n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i$ tend vers 0.
Montrons que la condition est nécessaire :
si $|\lambda_1| > 1$, ou si $\lambda_1 = -1$ alors $A^n = \lambda_1^n \left(\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\right)$ ne tend pas vers une limite, puisque $\frac{1}{\lambda_1^n} A^n$ tend vers la limite non nulle A_1 et que $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Conclusion : $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lambda_1 \in]-1,1]$ avec $\lim_{n\to\infty} A^n = A_1$ si $\lambda_1 = 1$ et $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ si $|\lambda_1| < 1$.

5- On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et la formule de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} &= u_n + \ \ v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Montrons par récurrence que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n.
On a $u_0 = v_0 = 1$, donc c'est vrai pour $n = 0$.
Supposons que pour $n \geq 0$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$; alors, $u_{n+1} = u_n + 2v_n > 0$ et $v_{n+1} = u_n + v_n > 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont strictement positifs.

b) Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors la relation (1) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

c) Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2 - 2$. Ses valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.
La matrice A est un élément de $\mathcal{M}_2$ et admet deux valeurs propres distinctes. D'après la condition suffisante rappelée dans la question **1-**, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

d) Les valeurs propres de A calculées dans la question précédente sont telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. D'après la question **4-**, **g)**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n = A_1$, où A_1 est définie dans **4-**, **d)**.
Caluculons A_1 : un vecteur propre de A associé à λ_1 est donné par une solution de l'équation $-\sqrt{2}a + 2b = 0$, soit par exemple $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_1 est obtenu en prenant une solution de l'équation $-\sqrt{2}a + b = 0$, soit un veteur de la forme $c\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, où c est une constante. D'autre part, pour obtenir l'égalité ${}^ty_1 x_1 = 1$, il faut que $c = \frac{1}{4}$, ce qui nous amène à prendre $y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
D'après la question **4-**, **d)**, on a

$$A_1 = x_1 {}^t y_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalement on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e) D'après la question **5-**, **a)**, pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc d'après la question **2-**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{(1+\sqrt{2})^n} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{(1+\sqrt{2})^n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$$

et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{2}.$$

Problème II.

On se propose d'étudier la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ qui au réel $x > 0$ associe

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt.$$

Pour $x > 0$, on définit la fonction $h_x : [0, 2x[\to \mathbb{R}$ par $h_x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$.

1- La fonction h_x est continue sur $[0, 2x[$ et au voisinage de $2x$, $h_x(t) = O\left(\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2x-t}}\right)$. Donc h_x est intégrable sur $[0, 2x[$ (car la fonction $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2x-t}}$ est aussi intégrable sur $[0, 2x[$).

2- Soit $0 < \varepsilon < x$ assez petit, en effectuant le changement de variable $t = 2x \sin v$, on obtient

$$\int_0^{2x-\varepsilon} \frac{\sin t}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt = \int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2x})} \sin(2x \sin v)\, dv.$$

On a donc,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\arcsin(1-\frac{\varepsilon}{2x})} \sin(2x \sin v)\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin v)\, dv.$$

3- (i) Considérons la fonction $\Psi : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $\Psi(v, x) \mapsto \sin(2x \sin v)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (resp. pour tout $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$), la fonction $v \mapsto \Psi(v, x)$ (resp. $x \mapsto \Psi(v, x)$) est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (resp. $\mathbb{R}_+$). De plus, Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sup_{v\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\Psi(v, x)| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème de la continuité sous le signe intégrale, la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin v)\, dv$ est continue. Comme la restriction de $\tilde{f}$ à $[0, 2x[$ est égale à f, $\tilde{f}$ répond à la question. Dans la suite on la notera f.

(ii) Nous utilisons le théorème de la dérivation sous le signe intégrale : Considérons la fonction $\Psi_0 : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_0(v, x) = \sin(2x \sin v) \ .$$

Les applications partielles $v \mapsto \Psi_0(v, x)$ et $x \mapsto \Psi_0(v, x)$ sont toutes les deux de classe C^1 respectivement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tous $(v, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$, $|\partial_x \Psi_0(v, x)| \leq 2$. De plus, la fonction constante égale a 2 est intégrable sur l'interval fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale f est de classe C^1 et que pour tous $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v) \cos(2x \sin v)\, dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v) \sin\left(2x \sin v + \frac{\pi}{2}\right)\, dv \, . \end{aligned}$$

(iii) Nous allons montrer par récurrence que f est de classe C^∞ et que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v)^n \sin\left(2x \sin v + n\frac{\pi}{2}\right)\, dv \, . \tag{2}$$

On vient de montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons que f soit de classe C^n et vérifie (2) au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour la question précédente, pour montrer que la propriété est vraie pour $n + 1$, nous allons utiliser le théorème de la dérivation sous le signe intégrale. Considérons la fonction $\Psi_n : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_n(v, x) = (2 \sin v)^n \sin\left(2x \sin v + n\frac{\pi}{2}\right) \, .$$

Les applications partielles $v \mapsto \Psi_n(v, x)$ et $x \mapsto \Psi_n(v, x)$ sont toutes les deux de classe C^1 respectivement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tous $(v, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}_+$, $|\partial_x \Psi_n(v, x)| \leq 2^{n+1}$. De plus, la fonction constante égale a 2^{n+1} est intégrable sur l'interval fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale $x \mapsto \Psi_n(v, x)$ est dérivable et

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin v)^{n+1} \sin\left(2x \sin v + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\, dv.$$

Par récurrence, f est donc de classe C^∞ et $f^{(n)}$ est donnée par (2) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4- On admet que $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \dfrac{2^{4n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

a) La série de Taylor de f au voisinage de 0 est donnée par $s_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, où

$$a_{2n} = 0, \qquad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2}.$$

Il s'agit d'une série de terme général $(-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2} x^{2n+1}$:

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{((2n+1)!)^2}\, x^{2n+1} \, .$$

Le rapport de deux termes consécutifs est

$$\frac{a_{2n+3}\, x^{2n+3}}{a_{2n+1}\, x^{2n+1}} = -x^2 \frac{2^4(n+1)^2}{[(2n+2)(2n+3)]^2} = -\frac{4x^2}{(2n+3)^2} \tag{3}$$

qui tend vers 0. Donc le rayon de convergence est $+\infty$.

b) Par (3), le signe du terme général est alterné. De plus, $\left|\dfrac{a_{2n+3}\,x^{2n+3}}{a_{2n+1}\,x^{2n+1}}\right| = \dfrac{4x^2}{(2n+3)^2}$ est inférieur à 1 pour $2n+3 > 2x$, soit $n > x - \frac{3}{2}$. Ce qui montre que la suite $\left|a_{2k+1}x^{2k+1}\right|$ est décroissante dès que $k > x - \dfrac{3}{2}$

5- Comme suggéré dans l'énoncé, on utilise la relation de Chasles,

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt\,,$$

en effectuant le changement de variable $t - \pi = u$ sur la seconde intégrale du membre de droite, on obtient,

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - (t+\pi)^2}} \right) dt < 0\,,$$

puisque l'on intègre une fonction continue négative non identiquement nulle. Par addition,

$$f(p\pi) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt < 0.$$

6- On procéde de la même façon que la question précédente, on a

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4p^2\pi^2 - (t-\pi)^2}} \right) dt > 0\,.$$

Comme la fonction sin est positive sur $[0,\pi]$, $f(\frac{\pi}{2}) \geq 0$. Donc

$$f(p\pi + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}}\,dt > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc au moins une fois dans chaque intervalle $[p\pi, p\pi + \frac{\pi}{2}]$ et par suite une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.