ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1ère Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Problème I.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour un entier $d \geq 1$, on note par $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre d. Si $M = (m_{ij})$ et $P = (p_{ij})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_d$ on note par $M\,P$ le produit de M par P. On note I_d la matrice identité d'ordre d. Nous dirons qu'une suite de matrices $\big(M_n = (m_{ij}(n))\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_d$ converge vers une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_d$ si, pour tous i et j fixés, chaque suite réelle $(m_{ij}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers m_{ij} quand n tend vers $+\infty$.

1- Soit $d > 1$. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathcal{M}_d$ soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2- Soit $P \in \mathcal{M}_d$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_d$. Montrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors $(P\,M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P\,M$ et $(M_n\,P)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M\,P$.

3- Dans toute cette partie, nous considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) On note $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, $R = \dfrac{1}{6}\,I_2$ et O la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = O$.

b) Sans calculer $(I_2 - Q)^{-1}$, montrer que $I_2 - Q$ est inversible puis démontrer la relation suivante :

$$\lim_{n\to\infty} (I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n) = (I_2 - Q)^{-1}.$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = I_2 + Q + Q^2 + \cdots + Q^n$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice A^n se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la façon suivante $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I_2 \end{pmatrix}$.

(ii) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

4- Dans cette partie, on fixe une base de $\mathbb{R}^d$, $d > 1$. On convient de noter de la même façon un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et la matrice colonne à d lignes associée à ce vecteur. Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d$.

a) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors λ est aussi valeur propre de ${}^tA$.

b) Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et soit y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre μ. Montrer, pour λ et μ distincts, la relation ${}^ty\,x = 0$.
Indication : on pourra calculer de deux façons différentes la quantité ${}^ty\,A\,x$.

c) On suppose désormais que A possède d valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ et vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$.
On note x_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i et y_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à cette même valeur propre.

(i) Montrer que $(x, y) \mapsto (x|y) = {}^ty\,x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

(ii) Montrer que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

(iii) En déduire qu'on peut choisir la famille $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ de sorte que ${}^ty_i\,x_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$.

Dans la suite, on supposera que les familles $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ sont telles que ${}^ty_i\,x_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$.

d) Pour tout i, $1 \leq i \leq d$, on définit la matrice carrée A_i d'ordre d par $A_i = x_i{}^ty_i$. Montrer que, pour $i \neq j$, la matrice A_iA_j est la matrice nulle et que pour tout i, $1 \leq i \leq d$, on a la relation $A_i^2 = A_i$.

e) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{d} A_i = I_d$ et $\sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\,A_i = A$.
Indication : on rappelle que $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ *est une base de* $\mathbb{R}^d$.

f) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $A^n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^n\,A_i$.

g) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lambda_1^n}\,A^n$.

h) Montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lambda_1 \in]-1, 1]$.
Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ pour $\lambda_1 \in]-1, 1]$.

5- On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et la formule de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} &= u_n + \ \ v_n. \end{aligned}$$

a) Montrer que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout entier n.

b) Déterminer l'unique matrice A telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

c) Calculer les valeurs propres de A.
La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{2})^n} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

e) Montrer que les suites $\left(\frac{u_n}{(1+\sqrt{2})^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{v_n}{(1+\sqrt{2})^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$ et calculer leurs limites. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème II.

On se propose d'étudier la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui au réel $x > 0$ associe

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}} dt\,.$$

Pour $x > 0$, on définit la fonction $h_x : [0, 2x[\to \mathbb{R}$ par $h_x(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$.

1- Montrer que h_x est intégrable sur $[0, 2x[$.

2- Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(2x \sin(v)) dv\,.$$

3- **(i)** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$, en une fonction que l'on notera toujours f.

(ii) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée f'.

(iii) Montrer que cette fonction est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.

4- On admet que $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \dfrac{2^{4n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

a) Déterminer la série de Taylor de f au voisinage de 0 sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ et calculer son rayon de convergence.

b) Démontrer que pour x fixé, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$ est alternée et montrer que la suite $\left(\left|a_{2k+1} x^{2k+1}\right|\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante dès que $k > x - \dfrac{3}{2}$.

5- Montrer que pour tout entier naturel p et tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq p - 1$, on a:

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt < 0\,.$$

En déduire le signe de $f(p\pi)$.
Indication. On pourra utiliser la relation de Chasles : décomposer l'intégrale en somme des intégrales sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ *et* $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$.

6- Déterminer le signe de $f(p\pi + \pi/2)$ et en déduire que f s'annule une infinité de fois sur $[0, +\infty[$