ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \quad xy'' + (1-x)\,y' - \lambda y = 0\,,$$

où la fonction y est une fonction inconnue de la variable x, deux fois continûment dérivable, et λ un réel donné.

1- On admet qu'il existe une fonction f_λ, égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, telle que $f_\lambda(0) = 1$ et f_λ est solution dans l'intervalle $]-R, R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\ .$$

a) Montrer que $a_1 = \lambda$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(k+\lambda)}{(n!)^2}\lambda$.
Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

b) Montrer que f_λ est un polynôme si et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = -p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, préciser le degré du polynôme f_λ en fonction de p et du terme dominant (le coefficient du terme de plus haut degré).

c) Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n x^n$, $n \geqslant 1$, lorsque $-\lambda \notin \mathbb{N}$?

On admet dans la suite que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur $\mathbb{R}$, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ et tel que $f_\lambda(0) = 1$.

2- Dans cette question, on suppose que $\lambda = 1$:

$$E_1 : \quad xy'' + (1-x)\,y' - y = 0\,.$$

a) En effectuant le changement de fonction inconnue $z = y' - y$, montrer que l'équation E_1 peut se transformer en une équation différentielle linéaire du premier ordre en z.

b) Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0, +\infty[$, exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite $]0, +\infty[$ par la relation

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

c) Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty, 0[$.

d) Le but de cette question est de résoudre l'équation différentielle E_1 sur $\mathbb{R}$.

(i) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

(ii) Déterminer les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle E_1.

3- Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

a) Montrer que g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $E_{1-\lambda}$.

b) On admet que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur $\mathbb{R}$ est encore une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Déduire de la question précédente que, pour tous réels λ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

c) Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier supérieur ou égal à 1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)}.$$

4- L'objet de la suite du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but soit φ la fonction, définie pour tout réel x, par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta.$$

Etant donné un entier naturel p, soit I_p l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta d\theta.$$

a) Etablir une relation entre les intégrales I_p et I_{p+1}. En déduire la valeur de l'intégrale I_p.

b) *Relation entre les fonctions* φ **et** $f_{1/2}$:

(i) Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.
Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Déterminer le développement en série entière de la fonction φ sur un intervalle $]-R, R[$.
En déduire que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2}.$$

c) *Encadrement de* $\varphi(x)$:

(i) Démontrer que, pour tout réel u strictement inférieur à 1 ($u < 1$),

$$e^u \leqslant \frac{1}{1-u}.$$

(ii) Soit x un réel strictement inférieur à 1 ($x < 1$), soit $J(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - x\sin^2\theta}.$$

Montrer que $J(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

(iii) Déduire des résultats précédents que, pour tout réel x strictement inférieur à 1 $(x < 1)$, la fonction φ vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

(iv) Démontrer l'existence d'une constante $A > 0$ (strictement positive) telle que pour tout réel $x < -1$, la fonction φ vérifie la minoration suivante :

$$\varphi(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

Indication : on pourra utiliser successivement les deux changements de variables, $u = \sin\theta$ *et* $v = \sqrt{-x}u$.

(v) Démontrer que la fonction $f_{1/2}$ admet une limite lorsque le réel x tend vers $-\infty$. Préciser cette limite.
La fonction $f_{1/2}$ est-elle intégrable sur la demi-droite $]-\infty, -1]$?

5- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$h(x) = e^{-\frac{x}{2}} f_{1/2}(x).$$

a) Démontrer que la fonction h est paire et que la valeur de $h(x)$ est donnée par la relation suivante :

$$h(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}\left(x\frac{\cos\theta}{2}\right) d\theta.$$

où $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ désigne la fonction cosinus hyperbolique définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

b) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}.$$

Avril 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \quad xy'' + (1-x)\,y' - \lambda y = 0\,,$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

1- On admet qu'il existe une fonction f_λ, égale à la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, telle que $f_\lambda(0) = 1$ et f_λ est solution dans l'intervalle $]-R, R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\,.$$

a) Sur l'intervalle $]-R, R[$, f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée première est la somme de la série dérivée

$$f'_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad x \in]-R, R[.$$

De même sa dérivée seconde est la somme de la série

$$f''_\lambda(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} \qquad x \in]-R, R[.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
0 =& x f''_\lambda(x) + (1-x)\,f'_\lambda(x) - \lambda f_\lambda(x)\\
=& x\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \lambda - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n x^n \qquad (1)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda)\,a_n\Big)\,x^n - \lambda + a_1\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne, $\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} - (n+\lambda)\,a_n\Big)\,x^n - \lambda + a_1 = 0$, pour tout $x \in]-R, R[$. D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie par

$$a_1 = \lambda\,, \qquad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2}\,a_n\,, \quad \forall n \geqslant 1\,. \qquad (2)$$

On a donc que

$$a_1 = \lambda \quad \text{et} \qquad a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k+\lambda)}{(n!)^2}\lambda\,, \quad \forall n \geqslant 2\,.$$

En particulier, pour $\lambda = -2, -1, 0, 1$, on obtient

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,, \\ f_0 &= 1\,, \\ f_{-1}(x) &= 1 - x\,, \\ f_{-2}(x) &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\,. \end{aligned}$$

b) f_λ est un polynôme si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. D'après l'expression de a_n précédemment déterminée, on en déduit que f_λ est un polynôme si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + \lambda = 0$; d'où f_λ est un polynôme si et seulement si $-\lambda \in \mathbb{N}$. De plus, lorsque $\lambda = -p$, avec $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(k-p)}{(n!)^2}(-p)$.
Si $p \geqslant 1$, alors $a_p = (-1)^{p-1}\frac{(p-1)!}{(p!)^2}(-p) = \frac{(-1)^p}{p!}$, et $a_n = 0$ pour $n \geq p+1$. Donc f_{-p} est un polynôme de degré p et de coefficient dominant $\frac{(-1)^p}{p!}$.
Le cas $\lambda = 0$ est traité dans la question précédente.

c) Supposons que $-\lambda \notin \mathbb{N}$, d'après **a)**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\lambda}{(n+1)^2} = 0\,.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ, et qui prenne la valeur 1 en 0.

2- Dans cette question, on suppose que $\lambda = 1$:

$$E_1 : \quad xy'' + (1-x)\,y' - y = 0\,.$$

a) Posons $z = y' - y$. L'équation E_1 se transforme en une équation différentielle linéaire du premier ordre en z :

$$xz' + z = 0\,. \tag{3}$$

b) Sur $]0, \infty[$, l'équation (3) a pour solutions les fonction du type $x \mapsto ae^{-\int \frac{dx}{x}}$, soit $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
La fonction inconnue y satisfait alors $y' - y = \frac{a}{x}$; c'est encore une équation différentielle linéaire du premier ordre, mais non homogène.
Appliquons la méthode de variation de la constante : la recherche de solution y sous la forme $\varphi(x)\,e^x$, conduit à l'équation $\varphi'(x) = \frac{ae^{-x}}{x}$.
Finalement, on peut conclure que f_1 est une fonction du type

$$x \longmapsto ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt + be^x\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

c) La résolution sur $]-\infty,0[$ est identique à celle de la question précédente. On obtient les solutions sous la forme

$$x \mapsto \alpha e^x \int_{-1}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

d) Le but de cette question est de résoudre l'équation différentielle E_1 sur $\mathbb{R}$.

(i) Au voisinage de 0, on a $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$. Il s'en suit que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et lorsque $x \to 0$, on a : $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$, et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty,$$

de même,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\infty.$$

(ii) Si y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}$, sa restriction à $]0,+\infty[$ est solution de E_1 sur $]0,+\infty[$, il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = ae^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + be^x$. De même, sa restriction à $]-\infty,0[$ est solution de E_1 sur $]-\infty,0[$, il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \alpha e^x \int_{-1}^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \beta e^x$.
De plus y est continue en 0, d'où si y est solution sur $\mathbb{R}$, alors nécessairement $a = \alpha = 0$ et $b = \beta$. La solution est donc de la forme $y : x \mapsto y(x) = \delta e^x$, $\delta \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, il est aisé de vérifier que les fonctions $x \mapsto \delta e^x$ avec $\delta \in \mathbb{R}$ sont solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : les solutions de E_1 sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \delta e^x$ avec $\delta \in \mathbb{R}$.

3- Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

a) Les fonctions f_λ et $x \mapsto e^x$ sont deux fois continûment dérivables, il en est de même de la fonction g_λ et on a

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= e^x g_\lambda(-x), \\ f'_\lambda(x) &= e^x (g_\lambda(-x) - g'_\lambda(-x)), \\ f''_\lambda(x) &= e^x \left(g_\lambda(-x) - 2g'_\lambda(-x) + g''_\lambda(-x)\right), \end{aligned}$$

comme f_λ est solution de $E_\lambda : xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$ sur $\mathbb{R}$, on a la relation :

$$-x\left(g_\lambda(x) - 2g'_\lambda(x) + g''_\lambda(x)\right) + (1+x)\left(g_\lambda(x) - g'_\lambda(x)\right) - \lambda g_\lambda(x) = 0,$$

ce qui donne

$$xg''_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) + (\lambda - 1)g_\lambda(x) = 0,$$

ainsi, g_λ est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$xy'' + (1-x)y' - (1-\lambda)y = 0.$$

Ce qui signifie que g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_{1-\lambda}$.

b) La fonction g_λ est produit de deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$, donc g_λ est développable en séries entières sur $\mathbb{R}$, de plus g_λ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_{1-\lambda}$ et on a $g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$.
Ainsi, g_λ est solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de $E_{1-\lambda}$ telle que $g_\lambda(0) = 1$. Il vient par l'unicité (admise dans l'énoncé) que $g_\lambda = f_{1-\lambda}$.
Conclusion : pour tous réels λ et x :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

c) Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$. Or $p \geq 1 \Rightarrow -(1-p) \in \mathbb{N}$; d'après la question **I-, b)**, f_{1-p} est donnée par le polynôme

$$f_{1-p}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{p-1} a_n x^n \,,$$

où $a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+1-p)}{(n!)^2} = (-1)^n \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!(n!)^2}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = e^x + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!\,(n!)^2} x^n e^x,$$

en particulier pour tout réel x :

$$f_2(x) = e^x + xe^x \quad \text{et} \qquad f_3(x) = e^x + 2xe^x + \frac{1}{2}x^2 e^x \,.$$

d) Soit p un entier supérieur ou égal à 1, alors pour tout réel x : $f_{p+1}(x) = e^x f_{-p}(-x)$ et $f_p(x) = e^x f_{1-p}(-x)$, de plus, f_{-p} et f_{1-p}, sont des polynômes de degré respectif p et $p-1$. Donc $R(x) = \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} = \frac{f_{-p}(x)}{x f_{1-p}(x)}$ est une fraction rationnelle dont les polynômes du numérateur f_{p+1} et du dénominateur $x f_{1-p}$ sont de même degré p. Il s'en suit que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{(-1)^p}{p!} x^p}{\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} x^p} = \frac{-1}{p} \,.$$

4- L'objet de la suite du problème est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but soit φ la fonction, définie pour tout réel x, par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin^2 \theta} d\theta \,.$$

Etant donné un entier naturel p, soit I_p l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta d\theta \,.$$

a) On a

$$I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2+2p} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \left(1 - \cos^2 \theta\right) d\theta = I_p - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \cos^2 \theta d\theta \,,$$

puis, par intégration par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} \theta \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{\sin^{2p+1} \theta}{2p+1} \cos \theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+2} \theta}{2p+1} d\theta = \frac{1}{2p+1} I_{p+1} \,,$$

d'où

$$I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p \,.$$

Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, une récurrence élémentaire permet d'établir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2(kp+1)} \frac{\pi}{2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)}{2^p\, p!} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} \frac{\pi}{2} \,.$$

b) *Relation entre les fonctions* φ **et** $f_{1/2}$:

(i) Nous utilisons les théorèmes de la continuité et de la dérivation sous le signe intégrale : considérons la fonction $\Psi_0 : [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_0(\theta, x) = e^{x \sin^2 \theta} .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), la fonction $\theta \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ (resp. $x \mapsto \Psi_0(\theta, x)$) est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (resp. $\mathbb{R}$). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sup_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\Psi(\theta, x)| \leq e^x$ et la fonction constante en θ égale à e^x est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème de la continuité sous le signe intégrale, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, les applications partielles $\theta \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ et $x \mapsto \Psi_0(\theta, x)$ sont toutes les deux de classe C^1 respectivement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\mathbb{R}$. De plus, pour tous $(\theta, x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$, $|\frac{\partial}{\partial x}\Psi_0(\theta, x)| \leq e^x$. De plus, la fonction constante en θ égale a e^x est intégrable sur l'interval fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$ de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe intégrale φ est de classe C^1 et

$$\varphi'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x\sin^2\theta}\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \; e^{x\sin^2\theta} d\theta.$$

On démontre par récurrence que $(\theta, x) \mapsto e^{x\sin^2\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$, φ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(e^{x\sin^2\theta}\right) d\theta = \varphi^{(k)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\theta \; e^{x\sin^2\theta} d\theta.$$

(ii) Commençons par déterminer le développement en série entière de $x \mapsto e^{x\sin^2\theta}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$e^{x\sin^2\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}\theta}{n!} x^n ,$$

puisque $\sup_{\theta\in[0,\pi/2]} \left|\frac{\sin^{2n}\theta}{n!} x^n\right| = \frac{x^n}{n!}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{2n}\theta}{n!} x^n$ est normalement convergente en θ et ceci pour tout x. Donc par intégration en θ, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n .$$

Posons $\alpha_n = \frac{I_n}{n!}$, alors

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3} = \frac{1}{2}\frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{n+\frac{1}{2}}{(n+1)^2},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} ,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite du développement (2) en série de $f_{1/2}$. Signalons d'autre part la différence entre les premiers termes : $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_0 = 1$.
On en déduit que

$$\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2} .$$

c) *Encadrement de $\varphi(x)$:*

(i) Il suffit de montrer que pour tout $u < 1$, $(1-u)e^u - 1 \leq 0$. On étudie alors la fonction $g : x \mapsto (1-x)\,e^x - 1$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -xe^x$ qui est positive sur $]-\infty, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$, de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$, $g(1) = -1$ et $g(0) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \leq 1$, $g(x) \leq 0$, ce qui montre que $e^x - \frac{1}{1-x} \leq 0$ si $x < 1$ (car $1 - x > 0$).

(ii) Existence de l'intégrale : puisque $x < 1$ la fonction $\theta \mapsto 1 - x\sin^2\theta$ ne s'annule pas et donc la fonction $\theta \mapsto \frac{1}{1-x\sin^2\theta}$ est définie continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui implique que $J(x)$ existe.
Pour calculer l'intégrale, on commence par utiliser les règles de Bioche, qui consiste à effectuer le changement de variable $t = \tan\theta$, ce qui est justifié par le fait que $\theta \mapsto \tan\theta$ est $\mathcal{C}^1$-bijectif de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$. On a

$$J\,(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 - x\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2\,(1-x)}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t\sqrt{1-x})^2}\,.$$

Ensuite, on utilise le changement de variable $v = t\sqrt{1-x}$ et on obtient

$$J\,(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} \frac{dv}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,[\arctan v]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,.$$

(iii) Puisque la fonction exp est à valeurs strictement positives, on a pour tout réel x, $\varphi\,(x) \geq 0$. D'autre part, d'après la question **4-**, **c)**, (i), pour tout réel $x < 1$, $\quad e^{x\sin^2\theta} \leqslant \frac{1}{1-x\sin^2\theta}$, d'où par croissance de l'intégrale, pour tout réel $x < 1$, $\quad \varphi\,(x) \leqslant J\,(x)$.
Par conséquence, pour tout $x < 1$,

$$0 \leq \varphi\,(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,.$$

(iv) Le premier changement de variable $u = \sin\theta$, donne

$$\varphi\,(x) = \int_0^1 e^{xu^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

puis on pose $v = \sqrt{-x}u$, on obtient

$$\varphi\,(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv.$$

Or $x \leqslant 0 \Rightarrow 1 + \frac{v^2}{x} \leqslant 1$, donc $\int_0^{\sqrt{-x}} \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{x}}} dv \geqslant \int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv$; de plus , puisque $x \leqslant -1$, on a $\int_0^{\sqrt{-x}} e^{-v^2} dv \geqslant \int_0^1 e^{-v^2} dv$. Posons $A = \int_0^1 e^{-v^2} dv$, $A > 0$, on peut conclure que pour tout réel $x \leqslant -1$,

$$\varphi\,(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}\,.$$

(v) Nous avons montré que $f_{1/2} = \frac{2}{\pi}\varphi$ et pour tout réel $x < 1$, $0 \leqslant \varphi\,(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ce qui implique

$$0 \leqslant f_{1/2}\,(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,, \qquad \forall x < 1\,,$$

d'où, par passage à la limite ($x \to -\infty$),

$$\lim_{x\to-\infty} f_{1/2}(x) = 0\,.$$

Nous avons également montré que $\varphi(x) \geqslant \frac{A}{\sqrt{-x}}$ pour $x \leqslant -1$ ce qui justifie que φ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1]$.

5- Soit h la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-\frac{x}{2}} f_{1/2}(x)\,.$$

a) Rappelons que nous avons montré dans **4-**, **b)**, (ii) que $h(x) = \frac{2}{\pi}e^{-\frac{x}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta}d\theta$. Montrons que h est paire, soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(-x) = \frac{2}{\pi}e^{\frac{x}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin^2\theta}d\theta = \frac{2}{\pi}e^{\frac{-x}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x(1-\sin^2\theta)}d\theta = \frac{2}{\pi}e^{\frac{-x}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos^2\theta}d\theta\,,$$

en effectuant le changemnt $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$, il vient

$$h(-x) = \frac{2}{\pi}e^{\frac{-x}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta}d\theta = h(x)\,,$$

d'où la parité de h.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\left(1-2\sin^2\theta\right)}d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos 2\theta}d\theta\,, \end{aligned}$$

puis par le changement de variable $t = 2\theta$, on obtient

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2}\cos t}dt\,.$$

La relation demandée est alors une conséquence imédiate de la parité de h :

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + h(-x)\right) &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}\cos\theta}d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{2}\cos\theta}d\theta\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\cos\theta\right)d\theta\,. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel positif x et tout réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{ch}\left(x\frac{\cos\theta}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}e^{x\frac{\cos\theta}{2}} > 0$, donc

$$h(x) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x\frac{\cos\theta}{2}}d\theta\,,$$

or pour $\theta \in [0, \pi/4]$, $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où

$$h(x) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x\frac{\sqrt{2}}{4}}d\theta \geqslant \frac{1}{4}e^{x\frac{\sqrt{2}}{4}}\ .$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = +\infty\,.$$