ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1ère Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice I.

Soient les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4v_n + w_n \end{cases} \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
2. Diagonaliser la matrice A.
3. Déterminer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Expliciter les termes u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice II.

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$.

Problème.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1- (a) Rappeler la définition de la convergence absolue de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(b) Rappeler la définition de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(c) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(d) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

(e) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
Indication : on pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

(f) On pose pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2 + n}{n^2}\right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0, 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0, 1]$.

2- Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0,1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n(1-x)$.

(a) Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(b) **(i)-** Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

(ii)- Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

(c) **(i)-** Calculer pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

(ii)- On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

(iii)- Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

3- Soit la fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de ζ, c'est-à-dire $D = \{x \ : \ \zeta(x) < \infty\}$.

(b) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine D et exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta^{(k)}$ comme somme d'une série.

(c) Montrer que ζ est convexe sur D.

(d) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

(e) Prouver que $\lim\limits_{x\to+1^+} \zeta(x) = +\infty$.
On pourra comparer à une intégrale.

4- Soient $g_n(x) = (-1)^n \cos^n x\,, \quad V_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n(x)\,dx$.

(a) Étudier la convergence de la série $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

(b) Montrer que la suite V_n est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

(c) Montrer la convergence de la série de terme général W_n.

(d) Pour tout $a \in [0,1[$, on pose $A_n(a) = (-1)^n \displaystyle\int_0^a \cos^n x\,dx$ et $B_n(a) = (-1)^n \displaystyle\int_a^{\pi/2} \cos^n x\,dx$.

(i) Montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[a, \pi/2]$.

(ii) Montrer que pour tout $0 < a < \pi/2$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(a) = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = 1 - \tan(a/2)\,.$$

(iii) Montrer que pour tous $0 < a < \pi/2$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} A_k(a) \leq \displaystyle\int_0^a \cos^{n+1}(x)\,dx$ et en déduire que $\lim\limits_{a\to 0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k(a) = 0$.

(e) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} W_n = 1$.

Avril 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Exercice I.

Soient les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \left\{ \begin{array}{lclclcl} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \text{ et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)\,. \tag{1}$$

1. On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - 3t^2 - 22t + 24 = (t-1)(t-6)(t+4)$. Ainsi, la matrice A admet trois valeurs propres distinctes $Sp(A) = \{1, 6, -4\}$, elle est donc diagonalisable.
   On peut également justifier que A est diagonalisable par le faite qu'elle soit symétrique à coefficients réels.

2. Pour chacune des valeurs propres de A, on détermine le sous-espace propre associé.
   - Pour $\lambda_1 = 1$, notons E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 : $E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$, où I_3 est la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. On a

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3y & = & 0 \\ 3x + 4z & = & 0 \\ 4y & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 3x + 4z & = & 0\,. \end{array} \right.$$

   On trouve que $(x, y, z) \in E_1 \Longleftrightarrow \{y = 0\ ,\ z = -\frac{3}{4}x$ et x est quelconque$\}$, d'où, si on prend $x = -4$, on trouve que le sous-espace propre E_1 associé à la v.p. $\lambda_1 = 1$ a pour base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{b_1}\right\}$ avec $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   - Pour $\lambda_2 = 6$, notons E_2 le sous-espace propre associé à λ_2 : $E_2 = \text{Ker}(A - 6I_3)$. On trouve $E_2 = \text{Vect}\left\{\overrightarrow{b_2}\right\}$ avec $\overrightarrow{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   - Pour $\lambda_3 = -4$, le sous-espace propre E_3 associé à λ_3 est $E_3 = \text{Ker}(A + 4I_3)$. On trouve $E_3 = \text{Vect}\left\{\overrightarrow{b_3}\right\}$ avec $\overrightarrow{b_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a donc que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Motrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On a $A^0 = PD^0P^{-1}$, donc la relation est satisfaite pour $n = 0$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Après calcul, on obtient, $P^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

   puis,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 32+9(-4)^n+9\,6^n & -15((-4)^n-6^n) & 12(-2+(-4)^n+6^n) \\ -15((-4)^n-6^n) & 25((-4)^n+6^n) & -20((-4)^n-6^n) \\ 12(-2+(-4)^n+6^n) & -20((-4)^n-6^n) & 18+16((-4)^n+6^n) \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Le système d'équation (1) s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$, et on montre par récurrence que $X_n = A^nX_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Après simplifications, on obtient :

   $u_n = \frac{1}{50}(8 + 21((-4)^n + 6^n))$, $v_n = \frac{-7}{10}((-4)^n - 6^n)$ et $w_n = \frac{1}{25}(-3 + 14((-4)^n + 6^n))$.

Exercice II.

On effectue le changement de variable en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}, \qquad dx\ dy = r\ dr\ d\theta.$$

qui conduit au nouveau domaine d'intégration suivant : $[0,1] \times [0,2\pi]$.
Ainsi,

$$I = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Puis, en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$I = 2\pi \times \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}r = 2\pi\frac{1}{2}\Big[\ln(1+r^2)\Big]_0^1 = \pi\ln(2)\ .$$

Problème III.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1- (a) La série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, la série numérique à termes positifs $\sum |f_n(x)|$ converge.

(b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I. C'est-à-dire, qu'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\right| = 0$.

(c) La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, où $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(x)|/x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.

(d) $\forall x \in I,\ 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument.

(e) Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$.
Comme la série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 et ne dépend pas de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

(f) On pose pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Par application du critère des séries alternées, on montre que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.
Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1}\right) = 0$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.
Montrons que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge absolument en aucune valeur de $[0,1]$. Pour x fixé, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$. La série

$\sum \dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge ; ce qui prouve que la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I.

2- Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0,1[$ et pour tout $x \in I,\ f_n(x) = \alpha_n x^n(1-x)$.

(a) La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.

Pour $x = 0$ et $x = 1$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est clairement nulle. Supposons que $0 < x < 1$, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n$, et $\sum \alpha_0(1-x)x^n = \alpha_0(1-x)\sum x^n$. La série géométrique $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ de raison $0 < x < 1$ est convergente. On en déduit par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(b) **(i)-** Pour tout $x \in I,\ f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. On étudie ensuite la variation de f_n et on montre que la fonction f_n est positive et atteint son maximum sur I au point $\dfrac{n}{n+1}$.

On a $f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$, ce qui implique que $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(ii)- On a $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{n}.\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$. Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{\alpha_n}{ne}$, et par comparaison de séries positives, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

Reste à montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$. On a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}.$$

Or $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. D'où le résultat.

(c) **(i)-** Pour $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = +\infty$ et pour $0 \leq x < 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = x^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

(ii)- Pour $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) = 0$.

Supposons que $0 \leq x < 1$. Puisque la suite (α_n) est décroîssante, pour tout $k \geqslant n+1$, $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1} \Rightarrow \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, pour tout $k \geqslant n+1$, et donc

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) &\leqslant \alpha_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\
&= \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} \\
&= \alpha_{n+1} x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

La suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x)$ est donc positive et majorée par la suite $(\alpha_{n+k})_{k \geq 0}$, qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0 . On en déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(iii)- Comme la suite (α_n) est décroîssante et minorée par 0, elle est convergente. Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$, on a $\ell \geq 0$.

Supposon que $\ell > 0$ et étudions la suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x)$. Pour $x = 1$, on a $R_n(1) = 0$, suppossons $0 \leq x < 1$. Comme pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$, on a $R_n(x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$. En particulier, pour $x = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, on obtient $R_n(1-\frac{1}{n+1}) \geqslant \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\dfrac{\ell}{e}$, i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ n \geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon + \frac{\ell}{e} \leq \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1} \leq \varepsilon + \frac{\ell}{e}$. Ceci implique en prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2e}$, qu'il existe un entier $n_0 > 1$, telle que pour tout $n \geq n_0$, $R_n(1-\frac{1}{n+1}) \geq \frac{\ell}{2e}$, ce qui montre que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle ; d'où une contradiction avec l'hypothèse. Nous avons donc montré que si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0. Nous avons l'équivalence de ces deux propositions d'après la question précédente .

3- (Fonction ζ de Riemann). Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

(a) Pour x réel donné, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$, $n \geq 1$, converge si et seulement si $x > 1$ (c'est la série de Riemann). En effet, pour $x \leq 0$ le terme général ne tend pas vers 0 et la série est divergente. Pour $x > 0$, on utilise une comparaison entre série et intégrale : en considérant la fonction $t \to \frac{1}{t^x}$ sur l'intervalle $[k, k+1[$ $(k \geq 1)$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^x} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x}$. D'où, en additionnant ces inégalités membre à membre $(k = 1, \cdots, k = n)$ on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \,.$$

La série $\zeta(x)$ est alors de même nature que l'intégale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ qui converge si et seulement si $x > 1$. Donc $D =]1, +\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_n :]1,+\infty[$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]1,+\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{\big(-\ln n\big)^k}{n^x}$.

Soit $1 < a < +\infty$ fixé. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\ln n\big)^k}{n^a}$ est convergente, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ sont normalement, donc uniformément convergentes sur $[a,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il en résulte que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^x}$ pour tout $x \in]a,+\infty[$. Comme $1 < a < +\infty$ est arbitraiment pris, on en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^x}$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.

(c) D'après la question précédente, la fonction ζ est deux fois dèrivable sur $]1,+\infty[$ et

$$(\zeta)''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\big(\ln n\big)^2}{n^x} \geq 0\,.$$

Donc la fonction ζ est convexe.

(d) Fixonx $a > 1$, d'après la question (a), **(ii)-**, la série de fonctions de somme ζ converge uniformément vers ζ sur $[a,+\infty[$. De plus, chacune des fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln n}$ admet une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, à savoir $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ si $n \geq 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$. Le théorème dinterversion des limites permet alors daffirmer que la fonction ζ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = 1 + 0 + \cdots + 0 \cdots = 1\,.$$

(e) Nous avons démontré dans la question (a), **(i)-** que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}\,,$$

ce qui implique par passage à la limite en n que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}\,,$$

puis en calculant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ que pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

et puisque $\lim\limits_{x\to+1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, on obtient que $\lim\limits_{x\to+1^+} \zeta(x) = +\infty$, car en effet, pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que $1 < x < 1+\eta \Longrightarrow \zeta(x) \geq \frac{1}{x-1} > M$.

4- Soient $g_n(x) = (-1)^n \cos^n x\,,\ \ V_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n(x)\,dx$.

(a) **-** Si $x \neq k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$, alors $|\cos x| < 1$, et la série $g(x)$ converge absolument (c'est la série géomérique de raison $\cos x$).
- Si $x = k\pi\,; k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$, et donc la série $g(x)$ diverge (le terme général ne tend pas vers 0).

(b) Soient $n \leq m$ deux entiers naturels, on a $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\cos(x) \in [0,1] \Longrightarrow \forall x \in [0,\pi/2],\ \cos^n(x) \geq \cos^m(x) \geq 0 \Longrightarrow V_n \geq V_m \geq 0$.
Soit $0 < \varepsilon < \pi/2$, on a $0 < \cos(\varepsilon/2) < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(\varepsilon/2) = 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \ \Longrightarrow \cos^n(\varepsilon/2) \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\,,$$

ce qui implique par la monotonie de cos sur $[0, \pi/2]$ que

$$n > N \ \Longrightarrow \forall x \in [\varepsilon/2, \pi/2]\,,\ \cos^n x \leq \cos^n(\varepsilon/2) \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\,. \qquad (2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx &= \int_0^{\varepsilon/2} \cos^n(x)dx + \int_{\varepsilon/2}^{\pi/2} \cos^n(x)dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\Big) \ \leq\ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ =\ \varepsilon\,,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2) pour majorer l'intégrale sur $[\varepsilon/2, \pi/2]$ et le fait que la fonction cos est bornée par 1 pour majorer l'intégrale sur $[0, \varepsilon/2]$.
Puisque ε peut être choisi arbitrairement petit, on a bien la convergence vers zéro de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$.

(c) La série de terme général W_n converge d'après le théorème sur les séries alternées.

(d) Pour tout $a \in [0, 1[$, on pose

$$A_n \ =\ (-1)^n \int_0^a \cos^n x\,dx \quad \text{et} \quad B_n = (-1)^n \int_a^{\pi/2} \cos^n x\,dx\,.$$

(i) La série $\displaystyle\sum_n g_n$ converge normalement sur $[a, \pi/2]$ car

$$\sup_{x\in[a,\pi/2]} |(-1)^n \cos^n x| \ =\ \cos^n a$$

et la série de termes positifs $\cos^n a$ converge $\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n a = \frac{1}{1-\cos a}\Big)$.
La série converge donc uniformément sur $[a, \pi/2]$ d'après la question **1-**, (e).

(ii) Soit $0 < a < \pi/2$. Puisque $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $[a, \pi/2]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(a) = \int_a^{\pi/2} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n \cos^n x\Big)\, dx = \int_a^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx\,.$$

Efféctuons le changement de variable

$$u = \tan(a/2)\,, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du\,,$$

on obtient

$$\int_a^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\, dx = \int_{\tan(a/2)}^{1} du = 1 - \tan(a/2)\,.$$

D'où le résultat.

(iii) Soit $0 < a < \pi/2$. On montre comme dans les questions **1-**, (b) et **1-**, (c) que la série de terme général $A_n(a)$ est altérnée. D'après le critère des séries alternées, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} A_k(a) \leq |A_{n+1}(a)| = \int_0^a \cos^{n+1}(x)\, dx \leq a\,.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) \leq a$$

d'où $\lim_{a\to 0} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(a) = 0$.

(e) Pour tout $0 < a < \pi/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = A_n(a) + B_n(a)$. Puisque les séries de terme général $A_n(a)$ et $B_n(a)$ converge, on a Pour tout $0 < a < \pi/2$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(a)\,.$$

Puisque a est arbitraiment choisi dans $]0, \pi/2[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ ne dépend pas de a, d'après les questions **4-**, (d), **(ii)** et **4-**, (d), **(iii)**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \lim_{a\to 0} \big(1 - \tan(a/2)\big) = 1\,.$$