



UNIVERSITÉ GASTON BERGER  
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE SAINT-LOUIS - IPSL  
Concours d'entrée - Session 2015 - 27 Juin 2015

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 2 heures

*L'usage des téléphones portables est interdit. Les téléphones doivent être éteints.  
Tout contrevenant sera exclu.*

### Exercice 1. Test de connaissances [10 points]

Dans cet exercice, on demande au candidat d'exposer clairement des connaissances.

#### Partie A [5 points]

On suppose connu le résultat suivant : La fonction  $x \mapsto e^x$  est l'unique fonction  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\varphi' = \varphi$  et  $\varphi(0) = 1$ . Soit  $a$  un réel donné.

1. Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{ax}$  est solution de l'équation  $y' = ay$
2. Soit  $g$  une fonction solution de  $y' = ay$ . Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = g(x)e^{-ax}.$$

Montrer que  $h$  est constante.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $y' = ay$ .

#### Partie B [5 points]

1. Déterminer les racine cinquièmes de 1 et représenter graphiquement les points images dans le plan complexe. On pose :  $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ,  $\alpha = w + w^4$ ,  $\beta = w^2 + w^3$ .
2. Montrer que :  $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$ .
3. En déduire que

$$\begin{cases} X^2 + X - 1 = 0 \\ X = w + \frac{1}{w} \end{cases}.$$

4. Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont solution de l'équation

$$X^2 + X - 1 = 0.$$

5. Justifier que  $w^4 = \bar{w}$  et en déduire que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$