MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours A2GP session 2016

Composition : <u>Mathématiques 6</u> (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Les exercices sont indépendants

Exercice 1:

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2. Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes, elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac S mentionné ci-dessus.

Partie A :

1) On extrait deux jetons simultanément de S. Calculer la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2.

2) Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants). On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2 .

a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Justifier la réponse.

b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de X.

Partie B :

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.

1) a) Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi usuelle que l'on précisera.

b) En déduire la loi de probabilité de Y.

2) a) Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z.

b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

Partie C :

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S. On désigne par X_1 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés, et par X_2 la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

1) Donner la loi de probabilité du couple (X_1, X_2) en utilisant un tableau à double entrée.

2) En déduire la loi de probabilité de X_1 et celle de X_2.

3) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2:

Une puce se déplace indéfiniment entre trois points A, B et C. Au départ (étape 0), elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points.

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ modélisant cette suite infinie de déplacements. Pour tout entier naturel n, on considère l'événement A_n (respectivement B_n ; C_n) : "la puce est en A (respectivement B ; C)" à l'issue de la n-ème étape, et la probabilité α_n (respectivement β_n et λ_n) de l'événement A_n (respectivement B_n et C_n).

On pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \lambda_0 = 0$.

1)a) Justifier que pour tout entier naturel n, A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements . Et en déduire que $\alpha_n + \beta_n + \lambda_n = 1$.

b) Donner, pour tout entier naturel n, les probabilités conditionnelles $P(A_{n+1}/A_n)$, $P(A_{n+1}/B_n)$, $P(A_{n+1}/C_n)$, $P(B_{n+1}/A_n)$, $P(B_{n+1}/B_n)$, $P(B_{n+1}/C_n)$, $P(C_{n+1}/A_n)$, $P(C_{n+1}/B_n)$, $P(C_{n+1}/C_n)$.

2)a) Calculer α_1, β_1, λ_1 et α_2, β_2, λ_2.

b) Démontrer que pour tout naturel n, $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\lambda_n \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\lambda_n \\ \lambda_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n \end{cases}$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta_n = \lambda_n$ et $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \alpha_n)$.

d) En déduire l'expression de α_n, puis de β_n et λ_n, en fonction de n.

e) En déduire la limite de α_n, β_n et λ_n lorsque n tend vers . Interpréter ces résultats.