Concours GE2I/GMEC session 2014

Composition : **Mathématiques 4** (analyse)

Durée : **4 Heures**

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé. Si au cours de l'épreuve un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n° 1 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+t^x\right)}{t^x}dt.$

1) Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que, si $x \geqslant 0$, on a $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\big(1+x(n-1)\big)}$.

3) On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$.

Exercice n° 2 :

1) Soit f la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = \cos^3 x$ sur $[0,\pi]$.
   a. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
   b. Calculer les cœfficients de Fourier de f.

2) Soit g la fonction paire de période 2π définie par $g(x) = |\cos^3 x|$ sur $[0,\pi]$.
   a. Étudier la convergence de la série de Fourier de g.
   b. Calculer les cœfficients de Fourier de g.
   c. En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}.$$

Problème n° 1 :

On rappelle que la série de terme général u_n converge **compactement** sur D si elle converge uniformément sur tout compact de D. Pour n entier $\geqslant 0$ et x réel, on définit une suite de fonctions (u_n) par $u_n(x) = e^{-nx^n}$. On pose $v_n = u'_n$.

1) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la suite (u_n) converge simplement vers une fonction limite u que l'on déterminera.
2) Démontrer que la suite (u_n) converge uniformément sur $[1, +\infty[$ vers u.
3) Démontrer que la suite (u_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ vers u.
4) À-t-on convergence compacte sur $[0, 1[$ de la suite (u_n) ?
5) Déterminer le domaine de convergence simple de la suite (v_n) ainsi que la fonction limite v.
6) Étudier la suite $v_n\left(\left(\dfrac{n-1}{n^2}\right)^{1/n}\right)$.
7) À-t-on convergence uniforme de la suite (v_n) vers v sur les intervalles : $[0, +\infty[$, $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$?

Problème n° 2 :

On rappelle qu'une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est convexe, si pour tous éléments A et B de Ω, le segment $[A, B]$ est inclus dans Ω. Soient Ω un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur Ω à valeurs réelles. La fonction f est dite convexe sur Ω si

$$\forall (x, y) \in \Omega^2,\ \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1) Soit $U = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 < x_2 < x_3\right\}$. Montrer que l'ensemble U est ouvert et convexe. On étudie les extremums de la fonction F définie sur U par

$$F(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \ln(x_j - x_i).$$

2) À tout $a = (a_1, a_2, a_3) \in U$, on associe le polynôme $P = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$.

   a. Montrer que, pour tout réel x distinct de a_1, a_2, a_3,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{x - a_j}.$$

b. Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de a_i de $(x-a_i)P'(x) - P(x)$ et de $(x-a_i)P(x)$. En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x-a_i}$. Montrer que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}.$$

c. Exprimer les dérivées partielles de F en (x_1, x_2, x_3) en fonction de x_1, x_2, x_3, puis démontrer que a est point critique si, et seulement si, $2XP' - P''$ admet pour racine a_1, a_2, a_3.

d. Montrer que ceci est réalisé si, et seulement si $2XP' - P'' = 6P$.

e. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré 3 tel que $2XP' - P'' = 6P$. En déduire que F admet un seul point critique a que l'on précisera.

3) Soient a le point critique de F, $x \in U$ et Ψ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\Psi(t) = F(tx + (1-t)a)$.

a. Montrer que l'application Ψ est convexe sur $[0, 1]$ et que $\Psi'(0) = 0$.

b. En déduire que F admet un minimum en a.

4) Calculer le minimum $F(a)$ de F.