



Cette épreuve comporte 2 parties : l'électricité et l'optique. Les sous-parties A et B de l'électricité sont indépendantes. Elles seront traitées séparément. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre. On attachera un grand soin à la présentation des copies.

## I. ELECTRICITÉ

### A. Électromagnétisme

Cette partie comporte 2 sous-parties (A.1 et A.2) qui sont entièrement indépendantes.

#### A.1. Questions de cours

1. Rappeler les équations de Maxwell dépendant des sources. Donner leurs noms.
2. Etablir les formes intégrales de ces équations. Donner leurs noms.

#### A.2. Étude d'un câble coaxial en régime statique et en régime sinusoïdal

Un câble est constitué par deux cylindres coaxiaux conducteurs infiniment minces, d'axe  $OZ$ . Le conducteur extérieur, la gaine (2) a un rayon égal à  $R_2$ . Le conducteur intérieur, l'âme (1) a un rayon égal à  $R_1$ . Les conducteurs sont parfaits et la ligne est infiniment longue selon  $OZ$ . L'espace inter-conducteur est vide.

3. Le câble coaxial constitue un condensateur lorsque (1) est porté au potentiel  $V_1$  et (2) au potentiel  $V_2$ .
  - 3.1. Déterminer la capacité  $\Gamma$  par unité de longueur de câble.
  - 3.2. Donner l'expression de l'énergie électrostatique  $W_e$  par unité de longueur de ce condensateur en fonction de  $\Gamma$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .
  - 3.3. Retrouver l'expression de  $\Gamma$  à partir de la localisation de l'énergie électrostatique.
4. Les conducteurs (1) et (2) sont maintenant parcourus respectivement par des intensités de courant constants  $+I$  (positive selon  $OZ$ ) et  $-I$  réparties uniformément en surface sur (1) et (2).
  - 4.1. Déterminer les vecteurs densités surfaciques de courants respectifs  $\vec{j}_{S1}$  et  $\vec{j}_{S2}$  en fonction de  $I$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\vec{k}$ .
  - 4.2. Calculer l'énergie magnétique  $W_m$  par unité de longueur de câble.
  - 4.3. En déduire l'inductance propre  $\Lambda$  par unité de longueur de câble.
5. Déterminer les expressions du produit  $\Lambda \Gamma$ , ainsi que l'impédance d'onde définie par  $Z_0^2 = \Lambda / \Gamma$ .

6. Calculer numériquement  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  et  $Z_0$ . Docs à portée de main

On donne :  $R_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 15 \text{ cm}$ ,  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

L'âme est maintenant parcourue par un courant représenté par  $I(z, t) = I(z)e^{-j\omega t}$  en notation complexe. La gaine est parcourue par  $-I$ . On considère que le champ  $\vec{E}$  créé par le câble est :  $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{e}_r$ .

7. Exprimer  $\vec{B}$  dans l'espace vide entre les cylindres.

8. En déduire  $\vec{E}$  en fonction de  $I(z)$ .

9. Trouver alors l'équation différentielle régissant les variations spatiales de  $I(z)$  et la résoudre.

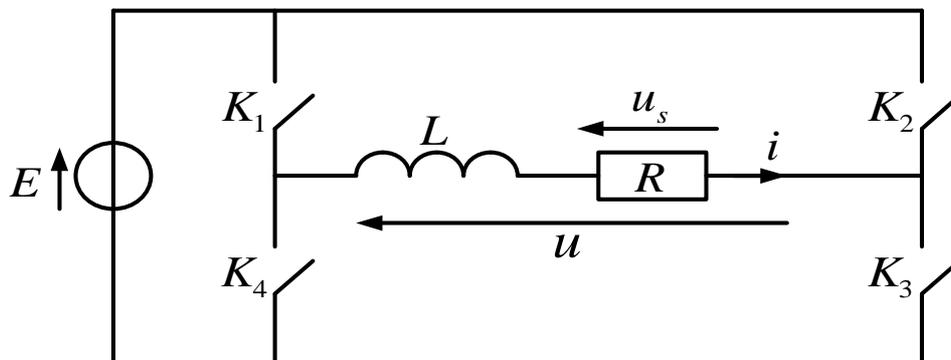
10. On prend maintenant  $I(z) = I_0 e^{-jkz}$  en notation complexe avec  $k = \omega/c$ . Calculer le vecteur de Poynting et en déduire la puissance moyenne transportée par le câble.

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot}\vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} \quad \text{avec } \vec{V}(V_r, V_\theta, V_z).$$

## B. Électrocinétique

On désire convertir la tension continue en tension alternative. Pour ce faire, on réalise le montage représenté sur la figure ci-dessous :



Les quatre interrupteurs bidirectionnels  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  et  $K_4$  sont commandés électriquement de telle façon que :

Pour  $nT < t < (n + 1/2)T$        $K_1$  et  $K_3$  sont fermés       $K_2$  et  $K_4$  ouverts

Pour  $(n + 1/2)T < t < (n + 1)T$        $K_1$  et  $K_3$  sont ouverts       $K_2$  et  $K_4$  fermés.

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice  $E$  constante.  $L$  est une inductance pure dite de lissage et  $R$  une résistance, représentant la charge.

1. Tracer la courbe  $u(t)$  en indiquant les points remarquables.

2. Écrire simplement l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ , courant circulant dans la charge.

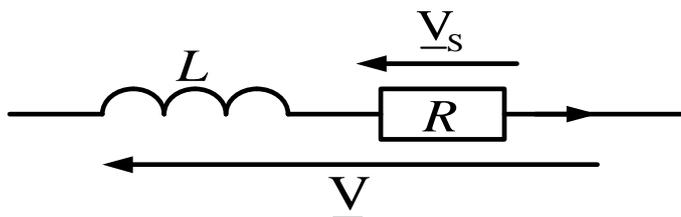
3. Si  $i_1(t)$  est la solution de cette équation pour  $0 < t < T/2$  et  $i_2(t)$  la solution de cette équation pour  $T/2 < t < T$ , déterminer les expressions de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  en fonction de  $R$ ,  $L$

et  $E$ , et en fonction de deux constantes d'intégration  $A_1$  et  $A_2$  que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant. On pose  $\tau = L/R$ .

On se place en régime permanent et on cherche à déterminer les valeurs de  $A_1$  et  $A_2$ . On pose que  $\alpha = \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)$ .

4. Écrire la condition pour le courant en  $t = T/2$  ; justifier. On obtient une première équation entre  $A_1$  et  $A_2$ .
5. En écrivant que le courant est périodique, écrire une seconde relation entre  $A_1$  et  $A_2$ . Résoudre le système ainsi trouvé.
6. Exprimer  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ . Tracer le graphe  $i(t)$  en faisant apparaître les points remarquables.

On va maintenant étudier l'influence de l'inductance pure.



7. Montrer que pour une tension  $V$  sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , l'ensemble se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre. Pour cela, on calculera en notant  $\underline{V}$  et  $\underline{V}_S$  les grandeurs complexes associées aux tensions, la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \underline{V}_S/\underline{V}$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega$  et  $\tau$ . Puis on étudiera le comportement du module  $H$  de  $\underline{H}(j\omega)$  pour les grandes et les petites pulsations.
8. Déterminer la pulsation de coupure  $\omega_C$  du filtre en fonction de  $\tau$ .
9. La tension  $u(t)$  de la question 1. admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad b_{2k+1} = \frac{4E}{(2k+1)\pi}$$

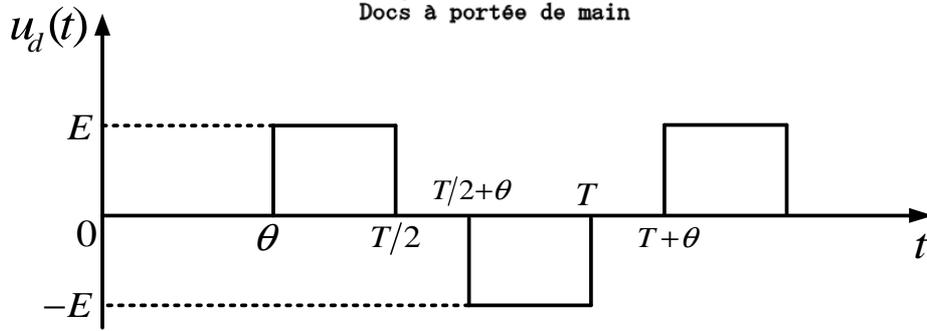
De même la tension  $u_S(t)$  admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$u_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_n \sin(n\omega_0 t + \phi_{Sn})$$

Justifier le fait que seuls les coefficients  $\beta_n$  correspondant à des  $n$  impairs soient différents de 0. Calculer les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_3$  de la décomposition en série de Fourier de la tension  $u_S(t)$ .

10. Déterminer le rapport  $B = \beta_3 / \beta_1$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_0$  et  $\tau$ . Le calculer dans le cas  $\omega_0 = \omega_C$ .

Pour alimenter la charge avec un courant quasi-sinusoïdal, on modifie la commande des interrupteurs pour modifier la tension  $u(t)$  et obtenir une tension  $u_d(t)$  représentée sur la figure suivante.



Cette tension admet la décomposition en série de Fourier suivante :

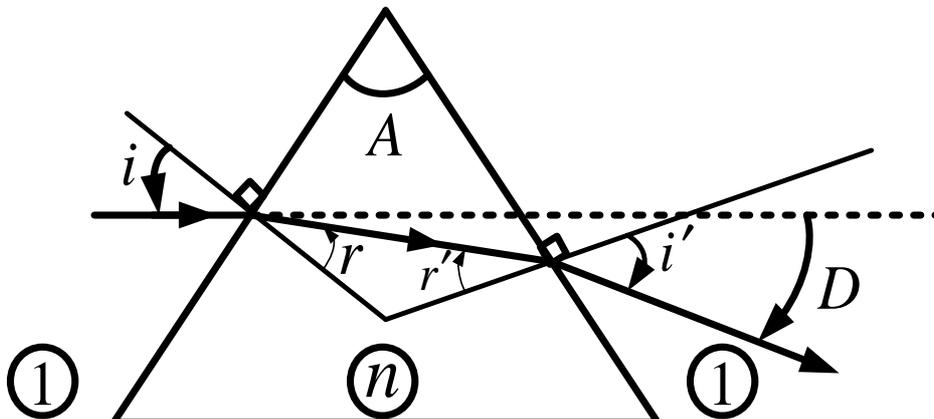
$$u_d(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\omega_0\theta}{2}\right) \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\cos\left(\frac{3\omega_0\theta}{2}\right)}{3} \sin\left(3\omega_0\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\cos\left(\frac{5\omega_0\theta}{2}\right)}{3} \sin\left(5\omega_0\left(t - \frac{\theta}{2}\right)\right) + \dots \right]$$

11. Comment faut-il choisir  $\theta$  pour que l'harmonique de rang 3 soit nul ? Dans ce cas, calculer pour la plus petite valeur positive de  $\theta$  et pour  $\omega_0 = \omega_C$ , le rapport  $D = d_5 / d_1$ , où  $d_5$  est l'amplitude de l'harmonique de rang 5 et  $d_1$  est l'amplitude du fondamental (ou l'harmonique de rang 1) de la tension aux bornes de  $R$ . Conclure.
12. Donner dans ces conditions, en fonction de  $E$  et  $R$ , la puissance moyenne sur une période reçue par la charge (la résistance  $R$ ).

## II. OPTIQUE

**Indiquer pour chacune des questions suivantes la ou les réponses justes. Chaque question peut comporter au plus 4 réponses exactes. Tout choix de réponse doit être justifié.**

1. On considère un prisme, d'indice  $n$ , d'angle au sommet  $A = 60^\circ$ , placé dans l'air et éclairé par un faisceau de lumière parallèle, issu d'une lampe à vapeur de mercure (source de lumière blanche). Un rayon incident pénétrant dans le milieu sous l'angle  $i$  émerge suivant l'angle  $i'$ .



Soit  $r$  et  $r'$  les angles d'émergence et d'incidence respectivement sur les faces d'entrée et de sortie du prisme, et soit  $D$  l'angle de déviation entre rayon incident et rayon transmis.

Les relations fondamentales valables pour cette expérience sont :

**A)**  $\sin i = -n \sin r$       **B)**  $n \sin i' = \sin r'$       **C)**  $A = r + r'$       **d)**  $D = i + i' - A$

2. Concernant le faisceau transmis par le prisme :

- A)** C'est un faisceau coloré      **B)** C'est un faisceau convergent  
**C)** La longueur d'onde correspondant à la couleur rouge sera plus déviée que celle correspondant à la couleur verte.  
**D)** La longueur d'onde correspondant à la couleur violette sera plus déviée que celle correspondant à la couleur indigo.

3. On suppose que  $n = 1,6201$ . Pour que la mesure de  $D$  soit possible, les angles  $i$  et  $i'$  doivent vérifier :

**A)**  $i \leq 37,15^\circ$       **B)**  $37,15^\circ \leq i \leq 90^\circ$       **C)**  $i' \leq 37,15^\circ$       **D)**  $37,15^\circ \leq i' \leq 90^\circ$

4. Il existe des valeurs maximale  $D_M$  et minimale  $D_m$  de l'angle de déviation, telles que :

**A)**  $D_m = 37,15^\circ$       **B)**  $D_m = 48,2^\circ$       **C)**  $D_M = 48,2^\circ$       **D)**  $D_M = 90^\circ$

5. Sachant que l'incertitude de mesure de l'angle au sommet  $A$  et de l'angle  $D_m$  est de 1 minute d'angle, l'incertitude sur  $n$  est de :

**A)**  $1,40 \cdot 10^{-2}$       **B)**  $0,47 \cdot 10^{-2}$       **C)**  $0,04 \cdot 10^{-2}$       **D)**  $0,02 \cdot 10^{-2}$