

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2015

FILIERE INDUSTRIELLE : INFORMATIQUE – DÉVELOPPEUR D'APPLICATION

ÉPREUVE : **MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES ET STATISTIQUES**

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 3

EXERCICE 1Soit p un entier naturel non nul.On définit la fonction f_p sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f_p(x) = \frac{\ln x}{x^p}.$$

MAX Sujets

On désigne par (C_p) la courbe représentative de f_p dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique le cm.1) Calculer les limites de f_p à droite en 0 et en $+\infty$.2) Soit f'_p la fonction dérivée de f_p sur $]0, +\infty[$.a) Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, f'_p(x) = \frac{(-p \ln x) + 1}{x^{p+1}}$.b) En déduire les variations de f_p et dresser son tableau de variation.

MAX Sujets

3) Tracer dans le repère (O, I, J) , les courbes (C_2) et (C_3) .

4)

a) Montrer que la fonction f_2 est décroissante sur $[2, +\infty[$.b) En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\text{l'on a : } f_2(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_2(t) dt \leq f_2(k).$$

MAX Sujets

5) On considère la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ définie par son terme général

$$S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2} \text{ où } n \text{ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.}$$

a) Démontrer que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

b) En utilisant la question 4-b), démontrer que :

$$\forall n \geq 2, S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^n f_2(t) dt \leq S_n - \frac{\ln n}{n^2}.$$

$$(\text{On pourra remarquer que } \int_2^n f_2(t) dt = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f_2(t) dt)$$

c) On admet que : $\forall n \geq 2$,

$$\frac{\ln n}{n^2} + \int_2^n f_2(t) dt \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \int_2^n f_2(t) dt.$$

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_2^n f_2(t) dt = -\frac{1}{n}(1 + \ln n) + \frac{1}{2}(1 + \ln 2).$$

d) Montrer que pour $n \geq 2$, $S_n \leq \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$

e) Dédire des questions 5-a) et 5-d) précédentes, que la suite (S_n) est convergente.

EXERCICE 2 *MAX Sujets*

Soit m un nombre réel. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f_m(x, y, z) = [(4-m)x + 2y ; x + (4-m)y + z ; x + y + (4-m)z]$$

On désigne par A_m la matrice de f_m relativement à la base B .

1. a) Déterminer la matrice A_m . (N.B. : Toute matrice plaquée ne sera pas prise en compte).

b) Démontrer que $\text{Det } A_m = (m - 3)^2 (6 - m)$.

c) En déduire l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m n'est pas un automorphisme. *MAX Sujets*

d) Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, pour lesquelles l'image de f_m notée $I_m(f_m)$ vaut $\mathbb{R}^3$.

2. On donne $m = 3$.

a) Déterminer le noyau N_3 de l'endomorphisme f_3 .

b) Déterminer l'image $\text{Im } f_3$ de f_3 .

3. On considère les vecteurs

$$u_1 = e_2 - e_3$$

$$u_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$$

$$u_3 = -3e_1 + 4e_2 + 2e_3$$

a) Démontrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' .

c) Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

MAX Sujets

4. On pose $f = f_0$ et on désigne par T la matrice de f relativement à la base B' .

Déterminer la matrice T .

EXERCICE 3

Trois usines notées U_1 , U_2 et U_3 fabriquent des souris pour ordinateurs. Le marché est exclusivement alimenté par ces trois usines.

Le pourcentage de production de chaque usine et le pourcentage de souris défectueuses de chaque usine sont consignés dans le tableau ci-dessous. *MAX Sujets*

	Usine 1	Usine 2	Usine 3
Pourcentage de production	35 %	40 %	25 %
Pourcentage de souris défectueuses	5 %	4,5 %	2 %

On désigne par U_i , l'évènement « la souris provient de l'usine i », $i \in \{1; 2; 3\}$ et par D l'évènement « la souris est défectueuse ».

1°)

a) Calculer $P(U_1 \cap D)$; $P(U_2 \cap D)$ et $P(U_3 \cap D)$

b) Calculer $P(\bar{D})$ *MAX Sujets*

2°) Le gestionnaire d'un cyber café, gagné par la poisse, veut remplacer une souris défectueuse. Pour cela, il va chez un revendeur pour s'en procurer une.

De retour dans son cyber, il constate à l'usage que la souris achetée est défectueuse. Calculer la probabilité pour que la souris achetée provienne de la deuxième usine.

3°) On considère la variable aléatoire X qui prend la valeur i si la souris provient de l'usine i et est non défectueuse et qui prend la valeur $-i$ si la souris provient de l'usine i et est défectueuse. *MAX Sujets*

a) Donner la loi de probabilité de X .

b) Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

c) Donner la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X .

4°) Dans la fabrication d'une journée de l'usine 1, on prélève 10 souris.

On désigne par Y , la variable aléatoire qui est égale au nombre de souris défectueuses parmi les 10 souris prélevées.

a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire Y . Justifier.

b) Donner la loi de probabilité de Y .

c) Déterminer le nombre moyen de souris défectueuses parmi les 10 prélevées.
