Concours professionnels BTS

Niveau : **BTS INDUSTRIEL**

Session : **2013**

Concours professionnels BTS

Durée de l'épreuve : **3 Heures**

Coefficient : **3**

MATHEMATIQUES

EXERCICE1 : (5 points)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_o = e$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \sqrt{U_n}$.

On pose pour tout entier naturel n, $V_n = \ln(U_n)$.

1. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$.

   b) En déduire la nature de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sa raison et son premier terme.

2. a) Donner l'expression de V_n en fonction de n uniquement.

   b) En déduire celle de U_n en fonction de n uniquement.

3. On pose pour tout entier naturel,
   $S_n = V_o + V_1 + \ldots.. + V_n$ et $T_n = U_o \times U_1 \times \ldots \times U_n$.

   a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $T_n = e^{Sn}$.

   b) En déduire l'expression S_n en fonction de n puis celle de T_n en fonction de n.

4. a) Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2 : (4 points)

i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. On considère les nombres complexes :

$$Z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad Z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{{Z_A}^2}{Z_B}.$$

   a) Ecrire Z_C sous forme algébrique.

   b) Ecrire Z_A, Z_B et Z_C sous forme trigonométrique.

   c) En déduire les valeurs exactes $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x$.

a) Démontrer que l'on peut écrire, pour tout nombre réel x
   $f(x) = 4\cos(x - \frac{5\pi}{12})$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

PROBLEME : (11 points)

Partie A

On donne g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2\ln(x)$.

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = 1$.

Partir B

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln(x)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;I\ ;J)$ (unité graphique 1 cm).

1. a) Etudier les variations de f.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right]$ puis interpréter le résultat.

   c) En utilisant la partie A, démontrer que la courbe (C) coupe la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ en un point unique A dont on déterminera les coordonnées.

   d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0{,}83 < \alpha < 0{,}84$.

2. a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

   b) Tracer les droites (Δ), (T) ainsi que la courbe (C) dans le même repère.

3. Γ est le domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ avec $\alpha > 1$.

   a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de Γ.

   b) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.