MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

IT ACADEMY

DEVOIR n°1 DE MATHEMATIQUES

Niveau : RIT, IDA BTS 2è Année

Durée : 2H

Prof : N'GUESSAN KOUAME. J-B

Date : 18-01-2021

EXERCICE 1 : 16 points

L'espace vectoriel IR³ est muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de IR³ définie par :

$f(1,0,0) = (-4, 6, -6)$

$f(1,1,0) = (-1, 5, -3)$

$f(0,-2,1) = (0, -4, 2)$

1. a) Ecrire $f(e_1)$; $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.

   b) En déduire que la transposée de la matrice A notée t_A est telle que :

   $t_A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix}$
2. a) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de IR³ ?

   b) Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.
3. a) Montrer que le réel -1 est une valeur propre de la matrice A.

   b) Déterminer toutes les valeurs propres de f.

   c) Déterminer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre.

4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

5. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 0)$ et $\vec{w} = (0, -2, 1)$

   a) Vérifier que $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Donner la matrice de f dans cette base B'.
6. a) Donner la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.

   b) Montrer que l'inverse de la matrice P est :

   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   c) Vérifier que $A = PDP^{-1}$ puis Calculer A^n.

7. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 3y + 6z \\ \frac{dy}{dt} = 6x - y - 6z \\ \frac{dz}{dt} = -6x + 3y + 8 \end{cases}$$

avec $x(0) = 1, y(0) = -2$ et $z(0) = 3$

EXERCICE 2 : 4 points

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ -x - y + z = 1 \\ x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$$