J. 17 1587

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE L'INSERTION PROFESSIONNELLE (DGESIP)

DIRECTION DES EXAMENS, DES CONCOURS ET DE L' ORIENTATION (DEXCO)

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2017

FILIERE INDUSTRIELLE : **RESEAUX INFORMATIQUES ET TELECOMMUNICATION**

EPREUVE : **TRAITEMENT DES SIGNAUX ET MATHEMATIQUES**

Durée de l'épreuve : **4 Heures**

Coefficient de l'épreuve : 4

Exercice 1

Un signal analogique m(t) est transmis à l'aide d'un modulateur d'amplitude avec porteuse.

Le signal modulé vaut $s(t) = [A + m(t)]\,[\cos(\omega_0 t)]$ avec $\omega_0 = 2\pi f_0$

I - Dans cette partie le signal modulant est de la forme : $m(t) = B\cos(\omega_m t)$; $\omega_m \ll \omega_0$.

1- Montrer que le signal modulé peut se mettre sous la forme :

$s(t) = A\,[1 + k\cos(\omega_m t)]\,[\cos(\omega_0 t)]$

comment appelle-t-on le paramètre k ?

2 – Représenter l'allure du signal modulé pour A = 10 et k = 0,5.

3 – Représenter le spectre S(f) de s(t)

4 – Quelle est la puissance moyenne de s(t) (A = 10 et k = 0,5)

5 – En déduire le rendement de cette modulation.

II – Le signal modulant vaut maintenant $m(t) = 3\pi(\frac{t}{\tau}) = 3\pi(\frac{t}{\tau})$, ($\pi$ désigne la fonction porte).

1 – Montrer que $S(f) = A\left[\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\right] + \left[\frac{M(f-f_0)+M(f+f_0)}{2}\right]$

(M(f) désigne la transformée de Fourier de m(t))

2 – Calculer la transformée de Fourier de m(t) noté M(f).

3 – a) En déduire le spectre du signal modulé ($A = 10$ et $f_0 = \frac{6}{\pi}$)

b) Représenter graphiquement le spectre du signal modulé.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel IR^3 muni de sa base canonique $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$.
On définit U l'endomorphisme de IR^3 par :

$$\begin{cases} U(1,0,0) = (0,0,1) \\ U(0,1,0) = (0,1,0) \\ U(0,0,1) = (1,0,0) \end{cases}$$

On désigne par id, l'application identique de IR^3.

1°)
a) Donner la matrice de l'application id relativement à la base canonique de IR^3.
(Rappel : l'application identique de IR^3 notée id est définie sur IR^3 par

$$\begin{array}{ccc} id : IR^3 & \longrightarrow & IR^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & id\,(x, y, z) = (x, y, z) \end{array}$$

b) Donner la matrice de l'endomorphisme U relativement à la base canonique de IR^3.

c) En déduire la matrice A de l'endomorphisme id + U relativement à la base canonique de IR^3.

2°) $\forall a,b \in IR$, on définit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de IR^3 par $f_{a,b} = a\ id + b\ U$
a) $M_{a,b}$ désigne la matrice de l'endomorphisme $f_{a,b}$ relativement à la base canonique $B_o = (e_1, e_2, e_3)$ de IR^3.

Montrer que ${}^t M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & o & b \\ o & a+b & o \\ b & o & a \end{bmatrix}$

b) Pour quelles valeurs de a et $b \in IR$, $f_{a,b}$ n'est pas un automorphisme de IR^3.

3°)
$f_{1,-1}$ sera noté f.
a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme f, noté N et en donner une base
b) Déterminer l'image I de l'endomorphisme f et donne une base.

4°)
a) Montrer que $\forall a \in IR^*$, $\forall b \in IR^*$, la matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable.
b) Montrer que les réels a + b et a - b sont des valeurs propres de la matrice $M_{a,b}$.

5°) $a \in IR^*, b \in IR^*$
a) Déterminer le sous espace propre de la matrice $M_{a,b}$ associée à la valeur propre a + b.
b) Déduire de la question précédente que la matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable.

6°)

On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse noté P^{-1}

b) On pose A la matrice définie par $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on précisera.

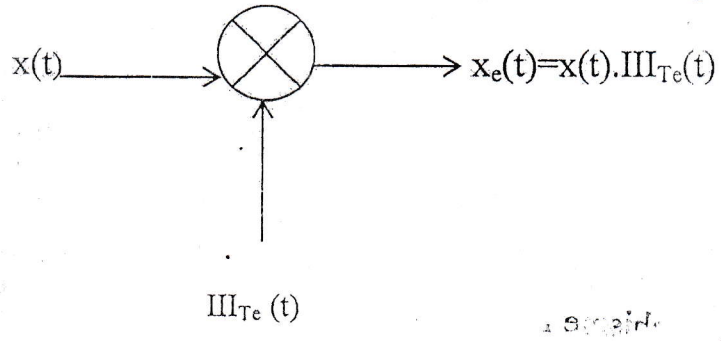
d) Intégrer le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2z \\ \frac{dy}{dt} = 3y \\ \frac{dz}{dt} = 2x + z \end{cases}$$

Avec $x(0) = 1$; $y(0) = -2$; $z(0) = 2$.

Exercice 3

On échantillonne un signal analogique $x(t) = 10\ \text{sinc}\ (10t)$ à l'aide d'un échantillonneur idéal de période d'échantillonnage $T_e = 25$ ms [$\text{sinc}\ (t)$ désigne sinus cardinal de t]



$x_e(t) = x(t).III_{Te}\ (t)$

on admet que TF $[III_{Te}(t)] = F_e.III_{Fe}(f)$

où $F_e = \frac{1}{T_e}$ et $III_{Te}(t)$ est le peigne de Dirac de période T_e

1 – Représenter l'allure du signal échantillonné $x_e(t)$

2 – Montrer que $X_e(f) = F_e\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF_e)\right]$

3 – a) Déterminer le spectre X(f) de x(t).
b) Représenter le spectre de x(t).

4 – a) Donner la fréquence minimale d'échantillonnage F_{min} de x(t).
b) Le théorème de Shannon est-il respecté ? Justifier.
c) Représenter alors le spectre du signal échantillonné sur 3 périodes.

EXERCICE N° 3

On appelle fonction « Porte » de largeur 1 et d'amplitude 1, la fonction notée P définie sur IR par

$$P(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ 0 \text{ si } t \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\end{cases}$$

1°)
a) Montrer que la fonction « Porte » P est une fonction paire.
b) Représenter graphiquement sur IR la fonction g définie par $g(t) = 2P\left(\frac{t}{3}\right)$ où P désigne la fonction porte définie dans la question a).

2°) On considère la fonction numérique de la variable réelle F définie sur IR par
$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\cos(2\pi pt)\,dt$
a) Montrer que $F(p) = 2\int_{0}^{+\infty} p(t)\cos(2\pi pt)dt$
b) On appelle fonction sinus cardinal, la fonction notée sinc définie sur IR par
$\text{sinc}(p) = \frac{\sin(\pi p)}{\pi p}$
Ecrire F(p) en fonction de sinc (p)

3°) On considère la fonction numérique de la variable réelle g définie sur IR par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g est une fonction paire.
b) Résoudre sur l'intervalle [-3 ; 3] l'équation g(x) = 0
c) Représenter graphiquement g sur l'intervalle [-3, 3].

****