

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2016

FILIERE INDUSTRIELLE : RESEAUX INFORMATIQUES ET TELECOMMUNICATION

EPREUVE : **TRAITEMENT DES SIGNAUX ET MATHEMATIQUES**

Durée de l'épreuve : 4 Heures

Coefficient de l'épreuve : 4

EXERCICE N° 1

On appelle fonction « Porte » d'amplitude A et de largeur 2b (b>0) la fonction $t \mapsto A P_{2b}(t)$ où $P_{2b}(t)$ est défini par :

$$P_{2b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq b \\ 0 & \text{si } |t| > b \end{cases}$$

1°) On considère la fonction f, périodique de période 4 telle que $f(t) = P_2(t)$ si $t \in [-2, 2]$

a/ Représenter graphiquement f sur l'intervalle $\left[-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right]$

b/ Montrer que la fonction f est une fonction paire.

2°)

a/ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent les coefficients de Fourier réels de f. Donner le terme général de ces deux suites.

b/ Donner la série de Fourier de f au point t noté $S_f(t)$.

3°) On considère la fonction numérique de la variable réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = P_2(t-1) - \frac{1}{2}$

a/ Représenter graphiquement g sur $\mathbb{R}$.

b/ On admet que $S_g(t) = S_f(t-1) - \frac{1}{2}$ ($S_g(t)$ désigne la série de Fourier d point t).

$$\text{Montrer que } S_g(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{2} t \right] \right)$$

4°)

a/ Calculer l'énergie E de g sur une période.

b/ Combien faut-il prendre d'harmoniques pour que le signal $h_0(t) + h_1(t) + \dots + h_n(t)$ (où h_p est le p ième harmonique) ait une au moins égale à 95% de E ?

EXERCICE N° 2 :

On considère le signal analogique S , périodique de période 2π , défini par :

$$\begin{cases} S(t) = A \cos(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°/

a) $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, désigne les coefficients de Fourier complexes du signal analogique S .
Donner l'expression de $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ($\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs)

b) Ecrire la série de Fourier complexe du signal analogique S .

c) A l'aide de la série de Fourier du signal analogique S , déterminer T. F. $[S(t)]$ (f) désigne la transformée de Fourier du signal $S(t)$ en f.

2°/ A l'aide d'un échantillonneur idéal de période T_e , le signal $S(t)$ est échantillonné. On obtient après échantillonnage le signal $S_e(t) = S(t) P_{\text{gn}T_e}(t)$ ($P_{\text{gn}T_e}$ désigne le peigne de Dirac de période T_e)

a) Donner la représentation graphique $S_e(t)$ dans un repère orthonormé d'unité graphique le centimètre pour $t \in \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$. (On prendra pour la représentation $A = 2$ et $T_e = 0,2\text{s}$)

b) Déterminer le spectre $S_e(f)$ de $S_e(t)$.

3°/ A l'aide d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est $h(t) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} u(t)$ où $u(t)$ est la fonction échelon unité et α une constante positive, on filtre le signal $S_e(f)$.

Le signal obtenu après filtrage est $S_e(f)$.

a) Déterminer la fonction de transfert $H(f)$ du filtre et caractériser ce filtre.

b) Déterminer son gain et sa phase.

c) Déterminer le spectre du signal filtré $S_e(f)$.

EXERCICE 3

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit θ un réel fixé, et f_θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 - Démontrer que le polynôme caractéristique de A_θ est $P_\theta(x) = -x^3 + 2x + \sin 2\theta$.
- 2 - a) En calculant $P_\theta(0)$, déterminer pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ f_θ n'est pas automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- b) Déterminer alors le noyau N et l'image I de f_π où f_π désigne f_θ pour $\theta = \pi$ (on précisera une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels).
- 3 - On pose $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $f_{\frac{\pi}{4}} = f$, puis on considère les vecteurs

$$e'_1 = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta; \quad e'_2 = f(e_2) \text{ et } e'_3 = f(e_3)$$

- a) Démontrer que le système $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- b) Démontrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- c) Préciser la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

- 3 - On pose à présent $\theta = 0$

- a) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (-1, \sqrt{2}, 1)$ et $u_3 = (-1, -\sqrt{2}, 1)$ constituent une base $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et que ce sont des vecteurs propres A_0 , attachés respectivement aux valeurs propres 0 , $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

- b) Résoudre alors le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = -x + z \\ \frac{dz}{dt} = y \end{cases}$$

f(e1) f(e2) e

e1

e2

e3