

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2018

FILIERE INDUSTRIELLE : RESEAUX INFORMATIQUES ET TELECOMMUNICATION

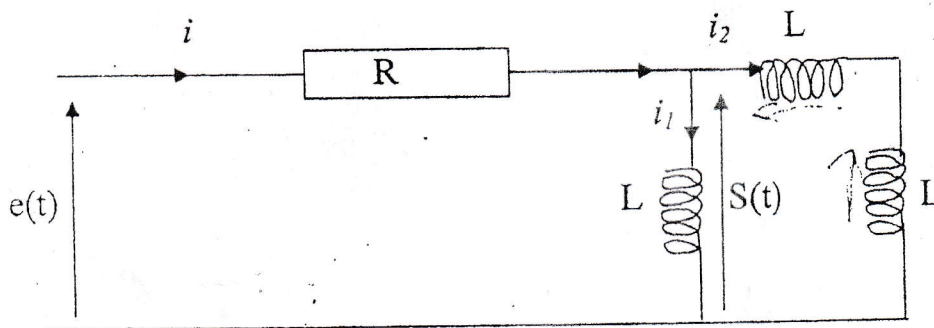
ÉPREUVE : **TRAITEMENT DES SIGNAUX ET MATHÉMATIQUES**

Durée de l'épreuve : 4 Heures

Coefficient de l'épreuve : 4

EXERCICE N° 1 : 7 points

On considère le filtre linéaire représenté par le circuit électrique ci-dessous.



Données : $R = 2 \Omega$; $L = 1 \text{ mH}$; $\tau = \frac{2L}{3R}$

1°)

- a) En utilisant les lois usuelles de l'électricité, montrer que l'équation différentielle (E) liant l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est donnée par l'égalité ci-dessous :

$$(E) : \tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \tau \frac{de(t)}{dt}$$

1.5

- b) Le système étant au repos à $t = 0$ c'est à dire que $e(0^+) = s(0^+) = 0$ et en prenant la transformée de Laplace à chaque membre de l'équation différentielle (E),

montrer que la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

1

(avec $S(p) = \mathcal{L}[S(t)]$ et $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$ est donnée par $H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$

avec $\left(\tau = \frac{2L}{3R} \right)$

2°) On pose $p = j\omega$

- a) Calculer $g(\omega)$ où $g(\omega) = |H(j\omega)|$ ($\omega \geq 0$) est appelé le gain du filtre. 0,5
b) Calculer la dérivée $g'(\omega)$ et dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$. 0,5
c) G_{MAX} désigne le gain maximal du filtre et est défini par l'égalité ci-dessous.

$$G_{MAX} = \max_{\omega \in]0, +\infty[} g(\omega)$$

Calculer le gain maximal du filtre ci-dessus noté G_{MAX} . 0,5

3°)

- a) On appelle gain efficace d'un filtre que l'on note G_{eff} et défini comme suit :

$$G_{eff} = \frac{G_{MAX}}{\sqrt{2}}$$

Calculer le gain efficace du filtre noté G_{eff} . 0,25

- b) On appelle pulsation de coupure d'un filtre la pulsation notée ω_c et définie par l'égalité $|H(j\omega_c)| = G_{eff}$.

Déterminer la pulsation de coupure de ce filtre. 0,5

- c) Déterminer la bande passante à -3dB de ce filtre. 0,5

4°) On suppose qu'on applique à l'entrée du filtre le signal sinusoïdal causal défini par $e(t) = [5\sin(2\pi f_1 t) + \cos(4\pi f_2 t) + 3\sin(6\pi f_3 t)]u(t)$ (où $u(t)$ désigne la fonction échelon unité)

(avec $f_1 = 15$ Hz ; $f_2 = 120$ Hz ; $f_3 = 160$ Hz)

- a) Quel sera le signal à la sortie du filtre ? Justifier. 0,5

- b) Sachant que la transformée de Fourier de l'échelon unité $u(t)$ est $u(f) = \frac{1}{2} \left[\delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \right]$

Calculer la transformée de Fourier du signal de sortie $s(t)$. 0,5

- c) Représenter son spectre (en module).

5°) Calculer sa puissance totale.

EXERCICE N°2 :

1°) Pour tout réel θ , on pose $\text{ch}(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ et $\text{sh}(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$.

- a) Déterminer les deux sommes $[\text{ch}(\theta) + \text{sh}(\theta)]$ et $[\text{ch}(\theta) - \text{sh}(\theta)]$.

- b) En effectuant le produit de ces deux sommes montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1.$$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique

$B = (e_1, e_2, e_3)$ et pour tout réel, on définit l'endomorphisme f_θ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f_\theta(1, 2, 1) = (\operatorname{ch}(\theta) + 2 \operatorname{sh}(\theta) ; \operatorname{sh}(\theta) + 2 \operatorname{ch}(\theta) ; 2)$$

$$f_\theta(0, 1, 2) = (\operatorname{sh} \theta ; \operatorname{ch} \theta ; 4)$$

$$f_\theta(0 ; 0, 1) = (0, 0, 2)$$

a) Exprimer $f_\theta(e_1)$; $f_\theta(e_2)$ et $f_\theta(e_3)$ en fonction de e_1 , e_2 et e_3 .

b) A_θ désigne la matrice de f_θ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée

$$B = (e_1, e_2, e_3)$$

Montrer que $t_{A_\theta} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \theta & \operatorname{sh} \theta & 0 \\ \operatorname{sh} \theta & \operatorname{ch} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (N.B. toute matrice plaquée ne sera prise en compte).

3°)

$P_{A_\theta}(x) = \det(A_\theta - xI)$ désigne le polynôme caractéristique de la matrice A_θ .

a) Montrer que $P_{A_\theta}(x) = \det(A_\theta - xI) = (2 - x)(x - \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta)(x - \operatorname{ch} \theta + \operatorname{sh} \theta)$

b) Montrer que le réel zéro n'est pas une valeur propre de la matrice A_θ pour tout réel θ .

c) Dédurre de la question précédente le noyau et l'image de f_θ pour tout réel θ .

4°) On rappelle que $P_{A_\theta}(x) = \det(A_\theta - xI) = (2 - x)(x - \operatorname{ch} \theta - \operatorname{sh} \theta)(x - \operatorname{ch} \theta + \operatorname{sh} \theta)$.

a) Déterminer toutes les valeurs propres de la matrice A_θ .

b) Déterminer t_{A_θ} , où t_{A_θ} désigne la transposée de la matrice A_θ .

c) Dédurre de la question précédente que la matrice A_θ est diagonalisable pour tout θ appartenant à $\mathbb{R}$.

5°) Dans tout ce qui suit, on prend $\theta = \ln 2$ et on pose $B = A_{\ln 2}$

a) Montrer que $B = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 noté $E(2)$ et le sous-espace associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$ noté $E\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) On pose $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} son inverse.

d) Déterminer le produit matriciel $P^{-1} B P$.

6°)

Intégrer le système différentiel (S) définit comme suit

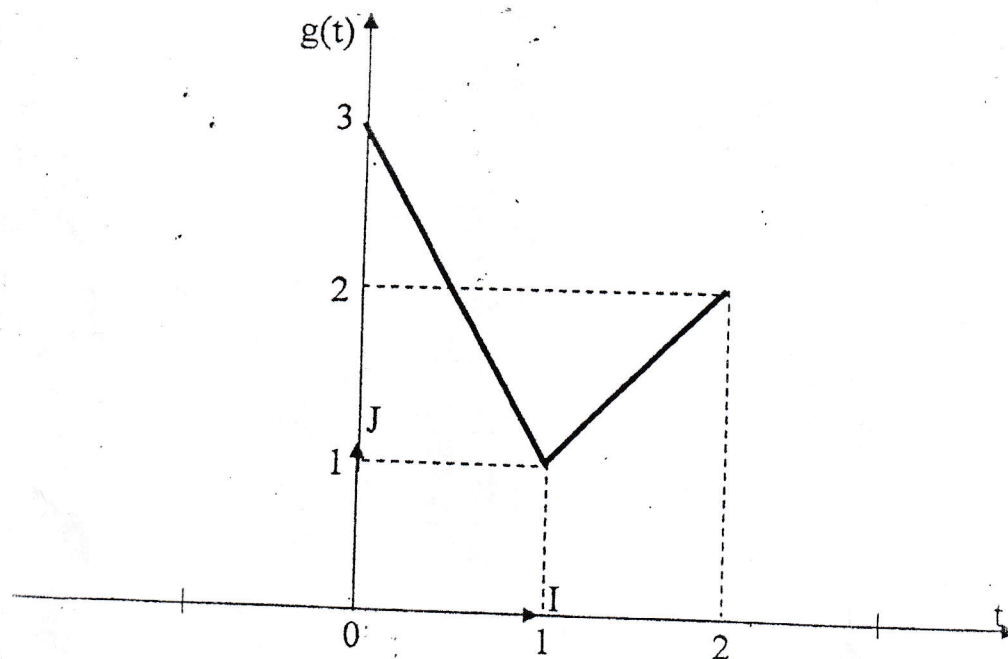
$$(S) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \\ \frac{dz}{dt} = 2z. \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$; $y(0) = -1$ et $z(0) = 2$

EXERCICE N°3 : 6 points

PARTIE I :

On considère le signal électrique périodique et pair dont la représentation sur la demi-période est donnée dans le repère orthonormé (O, I, J) ci-dessous :
(Unité graphique : 2 carreaux $\longrightarrow$ 1 cm)



1°)

Montrer que $g(t) = \begin{cases} -2t + 3 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$

0,5

2°) a. Quelle est la période de g.

0,25

b. Représenter g sur $[-4, 6]$

0,25

3°) a. Montrer que g est un signal à énergie infinie.

0,25

b. Calculer la Puissance Totale P_g de g.

0,25

4°) a. Calculer la valeur moyenne de g.

0,25

b. Montrer que le coefficient de Fourier a_n est de la forme :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent les coefficients de Fourier réels de f.

Montrer que $a_0 = \frac{7}{4}$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{4}{(\pi n)^2} \left[(-1)^n + 2 - 3 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]$

0,25

0,5

c. Déterminer b_n pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

0,25

- 5°) a - montrer que g est développable en série de Fourier sur $[0,1[$
 b - En déduire que la série de Fourier de g est donnée par :

$$g(t) = \frac{7}{4} + \frac{4}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n + 2 - 3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} \right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

PARTIE II :

Le signal g de la **PARTIE I** est filtré par un filtre passe-bas dont la bande passante est $[0 ; 1,45 \text{ Hz}]$.

On note s(t) le signal à la sortie du Filtre.

- 1°) Déterminer l'expression de s(t).
 2°) Donner la représentation graphique de son spectre d'amplitude unilatérale. (Unité graphique : 2 carreaux $\longrightarrow$ 1 cm)
 3°) a - En appliquant le théorème de Parseval, déterminer la Puissance de s notée P_s .
 b - En déduire la valeur du rapport : $20 \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_g} \right)$
