

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2019

FILIERE INDUSTRIELLE : RESEAUX INFORMATIQUES ET TELECOMMUNICATION

EPREUVE : **TRAITEMENT DES SIGNAUX ET MATHÉMATIQUES**

Durée de l'épreuve : 4 Heures

Coefficient de l'épreuve : 4

EXERCICE N°1

On considère la fonction f , périodique de période de 2π , impaire telle que pour tout $t \in [0, \pi]$, $f(t) = t^2 - \pi t$

1°)

a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$

b) A l'aide d'une double intégration par partie, montrer que la valeur de l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \int_0^\pi (t^2 - \pi t) \sin(nt) dt$ est donnée par l'égalité ci-dessous :

$$I_n = \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1]$$

2°) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent les coefficients de Fourier réels de f . Donner les valeurs du terme général des suites suivantes :

a) a_n ($n \in \mathbb{N}$)

b) b_{2p} ($p \in \mathbb{N}$)

c) b_{2p+1} ($p \in \mathbb{N}$)

3°) $S_f(t)$ désigne la forme réelle de la série de Fourier réels de f ,

a) Montrer que $S_f(t) = -\frac{8}{\pi} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)t]}{(2p+1)^3} \right)$

b) La fonction f vérifie-t-elle l'hypothèse du théorème de DIRICHLET ? Justifier.

c) En posant $t = \frac{\pi}{2}$ dans l'égalité 3 - a,

donner la somme de la série $\sum_{p=3}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$

4°)

a) Déterminer la puissance moyenne de l'harmonique de rang $2p$ et de rang $2p+1$ de la fonction périodique f , puissance moyenne notée respectivement E_{2p} et E_{2p+1} .

b) En déduire l'identité de PARSEVAL.

c) En déduire la somme de la série $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$ en utilisant l'identité de PARSEVAL.

EXERCICE N° 2

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$

Etant donné 2 réels a et b , on considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f_{a,b}(1,0,0) = (a; a-1; 0)$$

$$f_{a,b}(1,1,0) = (a; a+b-2; 0)$$

$$f_{a,b}(1,1,1) = (2a; a+b-2; b)$$

1°)

a) Déterminer $f_{a,b}(e_1)$; $f_{a,b}(e_2)$ et $f_{a,b}(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3 .

b) $A_{a,b}$ désigne la matrice de $f_{a,b}$ relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que la transposée de la matrice $A_{a,b}$ notée ${}^t A_{a,b}$ est donnée par l'égalité ci-dessous :

$${}^t A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & a-1 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$$

2°)

a) Montrer l'endomorphisme $f_{a,b}$ est un automorphisme si le couple (a,b) appartient à l'ensemble $E \times F$ où E et F sont deux ensembles que l'on déterminera.

b) Donner le noyau $N_{0,1}$ de l'endomorphisme $f_{0,1}$ et donner une base de $N_{0,1}$.

c) Donner l'image $I_{0,1}$ de l'endomorphisme $f_{0,1}$ et donner une base de $I_{0,1}$.

3°)

a) Déterminer le polynôme caractéristique $P_{A_{a,b}}(x)$ de $A_{a,b}$.

(Rappel $P_{A_{a,b}}(x) = \det(A_{a,b} - xI)$ où I est la matrice identité ou matrice unité).

b) Montrer que si $a \neq b$ et que si $a \neq b-1$, alors la matrice $A_{a,b}$ est diagonalisable.

c) si $a = b$, la matrice $A_{a,b}$ est notée $A_{a,0}$.

c-1 pour $a \neq 0$, la matrice $A_{a,0}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

c-2 la matrice $A_{0,0}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.

4°) On considère le système différentiel (S) défini par l'égalité ci-dessous :

$$(S) \quad \frac{dx}{dt} = A_{0,0} X \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = -2 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Intégrer ce système différentiel.

5°) On considère les suites récurrentes linéaires d'ordre 1

(U_n) ; (V_n) et (W_n) définies par

$$U_{n+1} = U_n$$

$$V_{n+1} = V_n$$

$$W_{n+1} = U_n + 3W_n \quad \text{avec} \quad U_0 = 1, V_0 = 2 \quad \text{et} \quad W_0 = -1$$

Déterminer le terme général des suites (U_n) ; (V_n) et (W_n) .

EXERCICE N° 3

On considère le signal $y(t)$ défini de la manière suivante :

$$y(t) = \begin{cases} U_0 \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq 2T_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad U_0 = 1 \text{ volt et } T_0 = 1 \text{ ms}$$

1) Ce signal est la multiplication d'un signal $m(t)$ par $U_0 \cos(2\pi f_0 t)$ c'est-à-dire

$y(t) = m(t) \times U_0 \cos(2\pi f_0 t)$ (où $\times$ désigne le symbole de la multiplication)

a) Déterminer l'expression de $m(t)$

b) Représenter $m(t)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{5T_0}{2}, +\frac{5T_0}{2}\right]$

c) Quelle est la transformée de Fourier $M(f)$ de $m(t)$

d) Tracer le spectre de $m(t)$ dans l'intervalle $[-f_0, +f_0]$

e) Représenter $y(t)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{5T_0}{2}, +\frac{5T_0}{2}\right]$

f) Déterminer $Y(f)$ la transformée de Fourier de $y(t)$

g) Donner l'allure du spectre de $y(f)$ dans l'intervalle $[-2f_0, +2f_0]$

2) On utilise un signal $m(t)$ périodique de période T_1 défini comme ci-dessous :

$$m(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| \leq \frac{T_1}{10} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad A = 10 \text{ volt et } T_1 = 10 \text{ ms}$$

a) Représenter $m(t)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{11T_1}{10}, +\frac{5T_1}{10}\right]$

b) Former le développement en série de Fourier complexe de $m(t)$ noté, $S_m(t)$

c) Représenter le spectre bilatéral d'amplitude de $S_m(t)$ dans l'intervalle

$[-15f_1, +15f_1]$ sachant que $f_1 = \frac{1}{T_1}$

d) Calculer la puissance moyenne totale de $m(t)$.
