

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR / SESSION 2016

FILIERES INDUSTRIELLES :

- GENIE CIVIL OPTION GEOMETRE TOPOGRAPHE
- GENIE CIVIL OPTION BATIMENT
- GENIE CIVIL OPTION TRAVAUX PUBLICS

EPREUVE COMMUNE :

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 3

Exercice n° 1

Partie A

1°/ On considère l'équation différentielle (E_0) définie par

$$(E_0) : \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2°/ On considère l'équation différentielles (E) définie par

$$(E) : \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}$$

- a) Déterminer les réels α , β et γ tels que $f(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ soit une solution particulière de (E).
- b) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
- c) Déterminer la fonction g de E satisfaisant les conditions initiales définies par $g'(0) = 0$ et $g(0) = 4$.

Partie B

Soit f , la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$;

on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) orthonormé d'unité graphique 1 cm.

- 1°/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2°/ On désigne par f' la dérivée de f .

- a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -x(x+2)e^{-x}$.
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3°/ Construire la courbe (C) .

Partie C

1°/

- a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f''(x) - 2f'(x) + 2e^{-x}$
- b) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2°/ Pour tout naturel n , on pose $I_n = \int_0^n f(t)dt$.

- a) Exprimer I_n en fonction de n .
- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice n° 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

Soit λ un nombre réel.

On considère l'ensemble C_λ des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$\lambda x^2 - y^2 + 2x + \frac{\lambda}{3} = 0$$

1°/ Discuter suivant les valeurs de λ , la nature de C_λ (on distinguera les cas particuliers où $\lambda \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$).

2°/ On suppose que $\lambda = 3$

- a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre, sommets et asymptotes) de C_3 .

- b) Construire C_3 .

3°/ Soit A, M, M' trois points du plan d'affixes respectives 1, Z et Z^4 , où Z désigne un nombre complexe.

- a) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe Z tels que les points A, M et M' soient alignés.
- b) Construire l'ensemble (E) .

Exercice n° 3

Soit S la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - i$.

1°/ Déterminer les éléments caractéristiques de S .

2°/ On désigne par A le centre de S .

Soit M un point distinct de A , d'image M' par S .

a) Construire M' .

b) Déterminer la nature du triangle AMM' .

3°/ Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1.
