REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline -Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

IT Academy
PROFESSIONAL TRAINING
AUDITS CONSULTING AND EXPERTISE

University of Technologies and Solutions Integrator

Epreuve de :	BTS BLANC N°1	**Année académique** : 2020 - 2021
MATHEMATIQUES GENERALES & STATISTIQUES	(13.04.2021) / 8h – 11h	**Filière** : IDA
		Durée : 3 heures
		Coefficient : 2

EXERCICE 1 :

On considère la fonction numérique à variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 1 + x - xe^{1-x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormée (O,I,J) d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique à variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{1-x^2}$.

1. a) Démontrer que g est une fonction paire.

   b) Déterminer la limite de g en $+\infty$

2. a) Déterminer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = x(6 - 4x^2)e^{1-x^2}$

   b) Etudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ et que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$

   b) En déduire que $g(-\alpha) = 0$

   c) En utilisant la question 1-a et 3 a,

   Démontrer que : $\forall x \in]-\alpha;\ \alpha[, g(x) < 0\ et\ \forall x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

PARTIE B

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

   b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

   b) Démontrer que le point $J(0;1)$ est centre de symétrie de la courbe (C).

4. a) Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).

5. Tracer (D), (T) et (C).

6. Soit A(t) l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'asymptote (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = t \quad (t > 0)$.

   Calculer $A(t)$, puis $\lim_{t\to+\infty} A(t)$

EXERCICE 2 :

E est un espace vectoriel de dimension 3 muni da sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 4e_1 + 3e_2 - 2e_3 \\ f(e_2 + \alpha e_3) = 10e_1 + 4e_2 - 5e_3 \\ f(e_3) = 10e_1 + 6e_2 - 5e_3 \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

On désigne par M la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. a) Déterminer α sachant que le vecteur $f(e_2)$ est colinéaire à e_2.

   b) En déduire que la transposée de la matrice M notée t_M est :

$$t_M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 10 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

   c) Déterminer le noyau N et l'image I de f. (On précisera une base une base de ces sous espaces vectoriels).

2. On considère les vecteurs u, v et w définis par :

   $u = -2e_1 + e_3$; $\quad v = 10e_1 + 3e_2 - 4e_3$; et $w = e_2$

   a) Montrer que les vecteurs u, v et w sont des vecteurs propres de l'endomorphisme f et préciser les valeurs propres associées.

   b) On considère la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

Montrer que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de E.

c) En déduire la matrice M est diagonalisable.

3.

a) Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$.

Déterminer P.

b) Déterminer la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ où P^{-1} désigne l'inverse de la matrice P.

4. On considère les suites $(U_n), (V_n)$ et (W_n) définies par :

$$\forall n \in IN, \begin{cases} U_{n+1} = 4U_n + 10W_n \\ V_{n+1} = 3U_n - 2V_n + 6W_n \\ W_{n+1} = -2U_n - 5W_n \end{cases}$$

Déterminer le terme général des suites $(U_n), (V_n)$ et (W_n) sachant que $U_0 = 1$, $V_0 = -2$ et $W_0 = -5$

EXERCICE 3 :

Une urne contient six jetons dont trois verts numérotés 1, 2 et 3 et trois jetons rouges numérotés 2, 3 et 4. On tire simultanément deux jetons de l'urne. Les tirages sont équiprobables.

1°) Combien existe –il de tirages possibles ?

2°) Quelle est la probabilité de tirer un jeton de chaque couleur ?

3°) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la valeur du jeton portant le plus petit numéro si les numéros sont distincts et sinon, le numéro commun augmenté de 1.

Déterminer la loi de probabilité de X. La représenter graphiquement.

4°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

****