

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit formée de matrices inversibles.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer l'inverse de la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Préciser si la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible. Si elle est inversible, calculer A^{-1} .

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer l'inverse de la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ddots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3 . Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

EXERCICE 7 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

(*Théorème de Hadamard*)

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} de terme général a_{ij} .

On dit que A est à diagonale strictement dominante si, pour tout j , $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

Montrer que dans ce cas la matrice A est inversible.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Soit J la matrice telle que $A = I - aJ$. Calculer J^2, J^3, J^4 .

En déduire $A^{-1} = I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Si $b = 0$, c'est facile. On suppose donc $b \neq 0$.

Noter J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

Exprimer A en fonction de I et J . En déduire $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b - a)(b(n - 1) + a)I$.

En déduire que si $a = b$ ou si $a = (1 - n)b$, la matrice A n'est pas inversible.

Sinon, A est inversible. On trouve $\frac{a+(n-2)b}{d}$ sur la diagonale, $-\frac{b}{d}$ ailleurs.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

A est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Soit J la matrice de terme général $J_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.

Observer que $A = I + 2J + 3J^2 + \dots + nJ^{n-1}$.

Montrer que $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I - M)^2(I + 2M + 3M^2 + \dots + nM^{n-1})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En déduire $A^{-1} = I - 2J + J^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

On considère les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposer qu'il existe un couple (i, j) avec $i \neq j$, tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$.

Considérer alors les matrices $A = I_n + \alpha E_{ij}$.

Sinon, considérer $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \dots + E_{n,n-1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [[Retour à l'énoncé](#)]

Remarquer que $A^3 = 6A - 4I$. En déduire $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6I) = \dots$

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [[Retour à l'énoncé](#)]

Se donner une matrice-colonne X de composantes x_j , et telle que $AX = 0$.

Soit x_i une composante de X de module maximum.

Montrer que $|a_{ii}x_i| \leq |x_i| \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$. En déduire $x_i = 0$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ces quatre matrices (inversibles) forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (de dim. 4) car elles sont libres.

En effet $aA + bB + cC + dD = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0, & a - b = 0 \\ c + d = 0, & c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^4 = 0$.

On a $I = I - a^4 J^4 = (I - aJ)(I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3) = A(I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3)$.

On en déduit que l'inverse de A est $A^{-1} = I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Si $b = 0$, on a $A = aI$: dans ce cas A est inversible $\Leftrightarrow a \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{a}I$.

On suppose donc $b \neq 0$. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

On a $A = (a - b)I + bJ$. D'autre part, il est clair que $J^2 = nJ$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A^2 &= (a - b)^2 I + 2b(a - b)J + b^2 J^2 = (a - b)^2 I + b(2(a - b) + nb)J \\ &= (a - b)^2 I + (2(a - b) + nb)(A - (a - b)I) \\ &= (2(a - b) + nb)A + (b - a)(b(n - 1) + a)I \end{aligned}$$

On a donc obtenu l'égalité : $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b - a)(b(n - 1) + a)I$ (1)

◇ Si $a = b$ (donc si $A = bJ$), alors $A(A - nbI) = 0$.

◇ Si $a = (1 - n)b$ (donc si $A = b(J - nI)$), alors $A(A + nbI) = 0$.

Dans ces deux cas, la matrice A est un diviseur de zéro. Elle n'est donc pas inversible.

Sinon, c'est-à-dire si $a \notin \{b, (1 - n)b\}$, posons $d = (a - b)(b(n - 1) + a)$.

L'égalité (1) montre que A est inversible et : $A^{-1} = \frac{1}{d}(-A + (nb - 2b + 2a)I)$.

Posons $K = J - I$ (diagonale nulle, les autres coefficients valant 1.)

Avec ces notations on a $A = aI + bK$ et on en déduit : $A^{-1} = \frac{a + (n - 2)b}{d}I - \frac{b}{d}K$.

Ainsi les coefficients diagonaux de A^{-1} valent $\frac{a + (n - 2)b}{d}$, les autres sont égaux à $-\frac{b}{d}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

La matrice A est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Soit J la matrice de terme général $J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Seuls les coefficients de J situés juste au-dessus de la diagonale sont $\neq 0$ (ils valent 1.)

On connaît les puissances de J , on sait que $J^n = 0$, et on a $A = I + 2J + 3J^2 + \dots + nJ^{n-1}$.

Pour tout x réel distinct de 1, on a :

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = (1 + x + x^2 + \dots + x^n)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

L'égalité $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (1-x)^2(1+2x+\dots+nx^{n-1})$ est vraie pour tout $x \neq 1$.

En fait c'est une identité valable dans toute algèbre, et en particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle devient $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I-M)^2(I+2M+3M^2+\dots+nM^{n-1})$.

Avec $M = J$, on obtient $I = (I-J)^2 A$.

$$\text{On en déduit le résultat : } A^{-1} = (I-J)^2 = I - 2J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

Si on suit les indications de l'énoncé, on comprend qu'il va falloir construire une matrice inversible M telle que $\varphi(M) = 0$, M étant construite à l'aide de matrices E_{ij} .

Pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, et tout scalaire α , la matrice $A = I_n + \alpha E_{ij}$ est inversible (car elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1).

Avec ces notations, on a $\varphi(A) = \varphi(I_n) + \alpha\varphi(E_{ij})$.

Supposons $\varphi(E_{ij}) \neq 0$. On constate que si $\alpha = -\frac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{ij})}$, alors $\varphi(A) = 0$.

On a donc prouvé que s'il existe un couple (i, j) , avec $i \neq j$, tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$, alors il existe une matrice inversible A telle que $\varphi(A) = 0$.

Il reste à traiter le cas où φ s'annule sur toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$.

Considérons alors la matrice $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \dots + E_{n,n-1}$.

Cette matrice est inversible (elle diffère de I_n par l'échange des colonnes 1 et n .)

Puisque par hypothèse φ s'annule sur toutes les E_{ij} avec $i \neq j$, il est clair que $\varphi(A) = 0$.

Conclusion : dans tous les cas, on a trouvé une matrice inversible A telle $\varphi(A) = 0$.

L'hyperplan $H = \text{Ker } \varphi$ contient donc au moins une matrice inversible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{On trouve } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & -6 & -6 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 6 & -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $A^3 = 6A - 4I$. Ainsi $A(A^2 - 6I) = 4I$.

$$\text{On en déduit que } A \text{ est inversible et que } A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

 CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

La matrice A est inversible si le seul vecteur colonne X tel $AX = 0$ est $X = 0$.

Notons $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$ les composantes de X , et x_i une composante de module maximum.

Si $AX = 0$ alors la composante d'indice i de AX est nulle.

$$\text{Ainsi : } 0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j \text{ donc } |a_{ii}x_i| = \left| \sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Il en découle $|x_i| \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \right) \leq 0$. Mais $|a_{ii}| - \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| > 0$. On en déduit $|x_i| = 0$.

Or x_i est une composante de module maximum dans X . On a donc $X = 0$.

Conclusion : la matrice A est inversible.