Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Pour A, carrée d'ordre n et de terme général a_{ij}, on pose $\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ (*trace* de A).

Montrer que pour des matrices A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que l'égalité $AB - BA = I$ est impossible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$.
Montrer que les matrices A et B sont égales.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice unique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices antisymétriques.
Soit A une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler quelle est la dimension de E et en donner une base simple.
2. On définit l'application f sur E par $f(M) = {}^{\mathrm{T}}\!A\,M + MA$.
   Montrer que f est un endomorphisme de E. Calculer $\operatorname{tr} f$ en fonction de $\operatorname{tr} A$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

C'est une question de cours...

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices $AB - BA$ et I_n n'ont pas la même trace.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer les matrices $E_{r,s}$ de la base canonique.
Pour toute matrice $A = (a_{ij})$, vérifier que $\operatorname{tr}(AE_{r,s}) = a_{s,r}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Considérer les matrices $E_{r,s}$ de la base canonique.
Montrer que l'unique solution A est définie par $a_{i,j} = f(E_{j,i})$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Considérer les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Vérifier que les $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ avec $i < j$, forment une base de E.
2. Vérifier que f est à valeurs dans E, et qu'elle est linéaire.
   Montrer que la composante de $f(F_{ij})$ sur F_{ij} est $a_{ii} + a_{jj}$.
   En déduire que $\operatorname{tr} f = (n-1)\operatorname{tr}(A)$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

C'est une question de cours. On note $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$ et $BA = (d_{ij})$.

Pour tout couple d'indices i, j on a successivement :

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{tr} BA.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On utilise la linéarité de l'opérateur *trace*, et le fait que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Pour toutes matrices A, B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$.

Or $\operatorname{tr}(I_n) = n \geq 1$. L'égalité $AB - BA = I_n$ est donc impossible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On note $E_{r,s}$ la matrice de coefficients tous nuls, sauf celui d'indice (r, s) qui vaut 1.

On suppose donc que $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tous indices r, s de $\{1, \ldots, n\}$, cela est donc vrai avec $M = E_{r,s}$.

Notons $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients des matrices A et B.

Le coefficient d'indice (i, i) de $AE_{r,s}$ est égal à $\sum_{j=1}^{n} [A]_{i,j}[E_{r,s}]_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\delta_{r,j}\delta_{s,i} = a_{i,r}\delta_{s,i}$.

On en déduit $\operatorname{tr}(AE_{r,s}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,r}\delta_{s,i} = a_{s,r}$.

Ainsi l'égalité $\operatorname{tr}(AE_{r,s}) = \operatorname{tr}(BE_{r,s})$ donne-t-elle $a_{s,r} = b_{s,r}$.

Cette égalité étant vraie pour tous indices r, s, on en déduit $A = B$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Considérons les matrices $E_{r,s}$ de la base canonique.

Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ pour tout $X \Leftrightarrow$il y a égalité pour les $X = E_{r,s}$.

Or pour tous indices r, s on a $\operatorname{tr}(AE_{r,s}) = a_{s,r}$ (voir exercice précédent).

Il y a donc une matrice $A = (a_{i,j})$ unique telle que $\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(X) = \operatorname{tr}(AX)$.

Cette matrice A est celle dont le coefficient d'indice (i, j) est $a_{i,j} = f(E_{j,i})$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. On note comme toujours E_{ij} les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Soit $M = (m_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   On a l'égalité $M = \sum\limits_{i,j=1}^{n} m_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ii}E_{ii} + \sum\limits_{i<j} m_{ij}E_{ij} + \sum\limits_{j<i} m_{ij}E_{ij}$.

   Dire que M est antisymétrique, c'est dire que pour tous i,j on a $m_{ji} = -m_{ij}$.

   Cela équivaut à $M = \sum\limits_{i<j} m_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$.

   Les $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ avec $i < j$ forment donc une base de E.

   On voit que la composante de M sur F_{ij} est égal au coefficient d'indice (i,j) de M.

   Exemple : si $n = 3$, on obtient les matrices :

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pour toute matrice M de E la matrice $f(M)$ est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et :

$$^{\mathrm{T}}(f(M)) = {}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}A\,M + MA) = {}^{\mathrm{T}}M\,{}^{\mathrm{TT}}A + {}^{\mathrm{T}}A\,{}^{\mathrm{T}}M = -MA - {}^{\mathrm{T}}AM = -f(M)$$

   L'application f est donc bien à valeurs dans E.

   Enfin la linéarité de f est évidente : $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$.

   Pour calculer la trace de f, on évalue la composante f_{ij} de $f(F_{ij})$ sur F_{ij} (les f_{ij} seraient les coefficients diagonaux de la matrice de f dans la base de E formée des matrices F_{ij}.)

   On se donne donc un couple d'indices (i,j), avec $i < j$.

   Notons $[B]_{rs}$ le coefficient général (ligne r, colonne s) de toute matrice B.

   La composante de $f(F_{ij}) = {}^{\mathrm{T}}A\,F_{ij} + F_{ij}\,A$ sur F_{ij} est son coefficient d'indice (i,j).

   Cette composante s'écrit :

$$[f(F_{ij})]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\,{}^{\mathrm{T}}A]_{ik}[F_{ij}]_{kj} + \sum_{k=1}^{n} [F_{ij}]_{ik}[A]_{kj} = [\,{}^{\mathrm{T}}A]_{ii} + [A]_{jj} = a_{ii} + a_{jj}$$

   On en déduit $\operatorname{tr} f = \sum\limits_{i<j} \Big([f(F_{ij})]_{ij}\Big) = \sum\limits_{i<j} (a_{ii} + a_{jj})$.

   Par symétrie, cette somme S s'écrit aussi $T = \sum\limits_{j<i} (a_{jj} + a_{ii})$.

   On obtient donc la valeur de la trace de l'endomorphisme f :

$$\operatorname{tr} f = \frac{1}{2}(S+T) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(a_{ii} + a_{jj}) = \sum_{i\neq j} a_{ii} = (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (n-1)\operatorname{tr}(A)$$