

# Fonctions trigonométriques et fonctions hyperboliques

## 1 Rappel de cours

### 1.1 Fonctions trigonométriques

#### 1.1.1 Cercle trigonométrique

Soit un point  $M$  décrivant un cercle de rayon 1 et de centre  $O$ , origine des axes  $xy$ . Soit  $\theta$  l'angle entre l'axe des  $x$  et le segment  $[OM]$ . Soit  $M_x$  la projection de  $M$  sur l'axe des  $x$  et  $M_y$  la projection de  $M$  sur l'axe des  $y$  (Fig. 1).

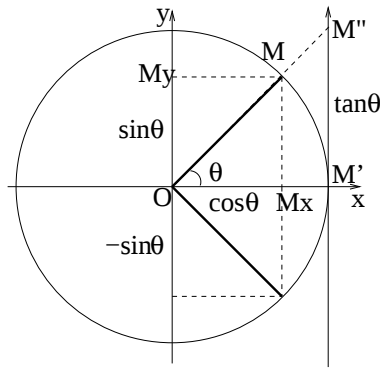


FIG. 1 – Cercle trigonométrique

On définit les fonctions cosinus, sinus et tangente, notées  $\cos$ ,  $\sin$  et  $\tan$  telles que

$$\cos \theta = [OM_x], \quad \sin \theta = [OM_y] \quad \text{et} \quad \tan \theta = [M'M''].$$

Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  sont donc bornées entre -1 et 1 et admettent pour période  $2\pi$ . Le rayon du cercle trigonométrique étant égal à 1 on a donc quel que soit  $\theta$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

De cette relation on en déduit que

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta.$$

Toujours à partir du cercle trigonométrique (Fig. 1) on peut montrer que

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \text{et} \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

#### 1.1.2 Relation entre les fonctions trigonométriques

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

En faisant  $b = a$  on obtient les formules de multiplication par 2

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2 \sin a \cos a \\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin(2a) &= \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \\ \cos(2a) &= \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.\end{aligned}$$

En posant  $a + b = p$  et  $a - b = q$  les formules précédentes peuvent s'exprimer comme suit

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

### 1.1.3 Formules d'Euler

On définit  $e^{iy}$  par

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

et en changeant  $y$  par  $-y$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

En ajoutant et en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient les formules d'Euler

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{et} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

### 1.1.4 Formules de Moivre

À partir des formules d'Euler on peut déduire facilement les formules de Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad \text{et} \quad (\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx$$

## 1.2 Fonctions hyperboliques

### 1.2.1 Définitions

Par définition on appelle cosinus hyperbolique de  $x$ , qu'on note  $\cosh x$  la quantité

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

de même le sinus hyperbolique de  $x$  est

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Par analogie avec les fonctions trigonométriques on définit la tangente hyperbolique de  $x$  par

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

et la cotangente hyperbolique par

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

### 1.3 Égalités utiles

Par définition on a

$$\cosh x + \sinh x = e^x \text{ et } \cosh x - \sinh x = e^{-x},$$

et par conséquent

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

De cette relation on en déduit que

$$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 x \text{ et que } \frac{1}{\sinh^2} = \coth^2 x - 1.$$

### 1.4 Relation entre les fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b \\ \sinh(a-b) &= \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(p) + \cosh(q) &= 2 \cosh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2} \\ \cosh(p) - \cosh(q) &= 2 \sinh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2} \\ \sinh(p) + \sinh(q) &= 2 \sinh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2} \\ \sinh(p) - \sinh(q) &= 2 \cosh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

## 2 Exercices

1. Démontrer les formules de Moivres, puis les utiliser pour calculer  $\cos(3\theta)$  et  $\sin(3\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .
2. Dédurre à partir des formules d'Euler l'expression de  $\sin(2x)$  et  $\cos(2x)$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ .
3.  $\theta$  étant compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , exprimer  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  et  $\tanh x$  en fonction de  $\theta$ , sachant que

$$x = \ln \tan \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right].$$

4. Résoudre le système pour  $a, \alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \cosh x + \cosh y = a \cosh \alpha \\ \sinh x + \sinh y = a \sinh \alpha \end{cases}$$

5. Déterminer l'expression de  $(\cosh x - \sinh x)^n$  et de  $(\cosh x + \sinh x)^n$  en fonction de  $\cosh nx$  et  $\sinh nx$ .