



Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$.

1- Déterminer D_f , le domaine de définition de f .

2- Calculer l'intégrale $\int_2^3 f(x) dx$.

Aide On pourra écrire $-x^2 + 4x - 3$ sous une forme canonique puis faire un changement de variable.

Exercice 2. Calculer la primitive

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^3(x^2 + 1)^2} dx.$$

Exercice 3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5}$.

Exercice 4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1- Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\varphi(b) - \varphi(a))$.

2- Montrer que $f(x) = e^{x^2} \varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivables sur $]a, b[$.

1- Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$

Aide : Considérer $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

2- On suppose que g ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$f(x_0) \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Aide : Appliquer le résultat de la question précédente aux fonctions $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt$ et $G(t) = \int_a^x g(t)dt$.

Exercice 6. Résoudre sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' - \tan(x)y = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Exercice 7. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' - 2y' + y = e^x \sin(2x) + \cos(x).$$

Exercice 8. Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, on rappelle que ϕ est continue et que pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi\left(\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}\right) \leq \frac{\phi(z_1) + \phi(z_2) + \dots + \phi(z_n)}{n}$$

1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) telle que $f([a, b]) \subseteq J$.

(a) Montrer que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \in J$.

(b) En utilisant les sommes de Riemann, montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \circ f(t) dt.$$

2. Soit pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = \frac{1}{n-1} \int_1^n (1 + \frac{1}{x})^x dx$.

(a) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a $\ln(1 + \frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$, en déduire un majorant de I_n

(b) Montrer que $\ln(I_n) \geq \frac{1}{n-1} \int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx$

(c) Calculer $\int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx$, puis déduire $\lim I_n$.

Exercice 9. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(1) = 0$.

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$(f(x))^2 \leq (1-x) \int_0^1 (f'(t))^2 dt.$$

2. En déduire que

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx. \quad (1)$$

3. Dans quel cas a-t-on l'égalité dans (1).

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{\pi/4} \sqrt[n]{\tan(t)} dt$.

1. Montrer que (I_n) est monotone et bornée, conclure.

2. Transformer I_n à l'aide du changement de variable $u = \sqrt[n]{\tan(t)}$.

3. Calculer $K_n = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u^{2n}} du$.

4. A l'aide d'une majoration convenable montrer que $\lim nK_n - I_n = 0$.

5. En déduire $\lim I_n$.

Exercice 11. Trouver toutes les applications $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dérivables telles que $y(0) = 1/3$ et $y' + y - x^2 y^2 = 0$.

Exercice 12. Montrer l'existence et calculer la valeur des intégrales :

$$(a) \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt; \quad (b) \int_0^\infty \frac{\tanh(ut) - \tanh(vt)}{t} dt, \text{ avec } u > v > 0.$$

Solutions

Solution de l'Exercice 1

1- La fonction f est bien définie si $-x^2 + 4x - 3 > 0$. D'où $D_f =]1, 3[$.

2- Remarquons que $-x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2$. D'où

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \quad \text{par le changement de variable } u = x-2, \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \quad \text{par le changement de variable } u = \sin \theta, \text{ avec } \theta \in [0, \pi/2] \\ &= \pi/2. \end{aligned}$$

Solution de l'Exercice 2 Remarquons que $\frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + (x^2 + 1)^2}{x^3(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^3}$. D'où

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 + 1}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Solution de l'Exercice 3 On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$.

Solution de l'Exercice 4

1- La fonction $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et φ est sa primitive qui s'annule en 0. Donc, d'après la relation de

$$\text{Chasles, } \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^b e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt.$$

2- On a $f'(x) = 2xe^{x^2} \varphi(x) + e^{x^2} \varphi'(x) = e^{x^2} (2x\varphi(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}) = 2xf(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Solution de l'Exercice 5

1- La fonction $x \mapsto h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus on a $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe une constante $c \in]a, b[$ telle que $h'(c) = 0$. Donc pour cette constante c , on a $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$.

2- Les fonctions $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt$ et $G(t) = \int_a^x g(t)dt$ sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Donc, d'après la question précédente, il existe une constante $c \in]a, b[$ telle que $F'(c)(G(b) - G(a)) = G'(c)(F(b) - F(a))$, ou encore $f(c)g(c) \int_a^b g(x)dx = g(c) \int_a^b f(x)g(x)dx$. Comme $g(c) \neq 0$, on a le résultat.

Solution de l'Exercice 6 En multipliant par $\cos x$ les deux membres de l'équation (E) on obtient

$$(E) : y' \cos x - y \sin x = \frac{\cos x}{1 + \cos x} \iff (y \cos x)' = 1 - \frac{1}{1 + \cos x}.$$

En intégrant on obtient $y \cos x = x - \int \frac{1}{1 + \cos x} dx$. D'autre part on a $1 + \cos x = 2 \cos^2(x/2)$, d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1/2}{\cos^2 x/2} dx \\ &= \int (\tan x/2)' dx \\ &= \tan x/2 + C \end{aligned}$$

Ainsi la solution de (E) est donnée par $y = \frac{1}{\cos x} (x + \tan x/2 + C)$, où C est une constante réelle.

Solution de l'Exercice 7 Considérons l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet 1 comme racine double. D'où la solution, de l'équation homogène, donnée par : $y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x$. Pour avoir la solution générale de (E), nous allons chercher des solutions particulières y_{P_1} et y_{P_2} aux équations (E1) : $y'' - 2y' + y = \cos(x)$ et (E2) : $y'' - 2y' + y = e^x \sin(2x)$. La solution générale de (E) est $y = y_0 + y_{P_1} + y_{P_2}$. Nous utiliserons la méthode de variation des constantes pour trouver y_{P_1} et y_{P_2} . Déterminons la fonction $c_1(x)$ telle que $c_1(x)e^x$ soit une solution de (E1). En remplaçant dans (E1), on voit qu'il suffit que $c_1''(x) = e^{-x} \cos x$. Une solution à cette équation est $c_1(x) = \frac{-1}{2} e^{-x} \sin x$. Déterminons la fonction $c_2(x)$ telle que $c_2(x)x e^x$ soit une solution de (E2). En remplaçant dans (E2), on voit qu'il suffit que $x c_2''(x) + 2c_2(x) = \sin 2x$. Une solution à cette équation est $c_2(x) = \frac{-1}{4x} \sin 2x$. Ainsi, la solution de (E) est :

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} \sin x (1 + e^x \cos x).$$

Solution de l'Exercice 8 (1), (a) De la première formule de la moyenne ou le T.A.F, on obtient le résultat.

(b) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n f(a + \frac{k}{n}(b-a))$. D'après le cours on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

D'autre part, puisque ϕ est convexe, on a

$$\phi(S_n) \leq \sum_{k=1}^n \phi \circ f(a + \frac{k}{n}(b-a)).$$

La continuité de ϕ assure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \phi \circ f(a + \frac{k}{n}(b-a)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \circ f(x) dx$.

D'où $\phi(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi \circ f(t) dt$.

(2), (a) Facile. En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n-1} \int_1^n x \frac{1}{x} dx = 1$.

(b) La fonction $-\ln$ est convexe. Donc, d'après la question précédente

$$-\ln(I_n) \leq \frac{-1}{n-1} \int_1^n \ln((1 + \frac{1}{x})^x) dx = \frac{-1}{n-1} \int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx$$

(c) On a

$$\int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx = \int_1^n x \ln(x+1) dx - \int_1^n x \ln(x) dx = \frac{n^2}{2} \ln(n+1) - \frac{n^2}{2} \ln(n) + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(2)$$

D'où

$$\frac{1}{n-1} \int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx = \frac{n^2}{2(n-1)} \ln(\frac{n+1}{n}) + \frac{n}{2(n+1)} + \frac{-\frac{1}{2} \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(2)}{n-1}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \int_1^n x \ln(1 + \frac{1}{x}) dx = 1$.

Donc $\ln(I_n) \rightarrow 1$, ainsi $\lim I_n = e$.

Solution de l'Exercice 9 (1)

$$f(x)^2 = (f(1) - f(x))^2 = (\int_x^1 f'(t) dt)^2 \leq (\int_x^1 1 dt) \cdot (\int_x^1 (f'(t))^2 dt)$$

D'où

$$f(x)^2 \leq (1-x) \int_x^1 (f'(t))^2 dt \leq (1-x) \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

(2) D'après l'inégalité (1), on obtient

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 (1-x) (\int_0^1 (f'(t))^2 dt) dx = (\int_0^1 (f'(t))^2 dt) \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

(3) Soit $g(x) = (1-x) \int_0^1 (f'(t))^2 dt - f(x)^2$. Lfonction g est continue et positive sur $[0, 1]$. L'égalité dans (2), est équivalente à $\int_0^1 g(x) dx = 0$. Donc g est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Donc

$$0 = g'(1) = - \int_0^1 (f'(t))^2 dt - 2f'(1)f(1) = - \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

D'où, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x)^2 = (1-x) \cdot 0 = 0$.

Conclusion, on a l'égalité dans (2) si et seulement si f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Solution de l'Exercice 10 1) Vérifier que $(I_n)_n$ est croissante et majorée par $\int_0^{\pi/4} 1 dt = \pi/4$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ existe.

2) On a $du = \frac{1}{n} (1 + \tan^2(t)) (\tan(t))^{\frac{1}{n}-1} dt$, donc $dt = n \frac{u^{n-1}}{1+u^{2n}} du$, donc

$$I_n = n \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^{2n}} du$$

3) On pose $v = u^n$, on a $nK_n = \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv = \arctan(1) - \arctan(0) = \pi/4$.

4) On a

$$nK_n - I_n = n \int_0^1 \frac{u^{n-1}(1-u)}{1+u^{2n}} du$$

Donc $0 \leq nK_n - I_n$. D'autre part

$$nK_n - I_n = n \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^n}{1 + u^{2n}} du \leq n \int_0^1 u^{n-1} - u^n du = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

D'où $\lim nK_n - I_n = 0$.

5) $\lim I_n = \pi/4$.

Solution de l'Exercice 11 C'est une équation de Bernoulli. On pose $z = 1/y$.

On obtient l'équation (F) : $z' - z = -x^2$.

La solution homogène de l'équation (F), est Ae^x , $A \in \mathbb{R}$.

$x^2 + 2x + 2$ est une solution particulière. On trouve une solution par les méthodes du cours. Mais on peut remarquer qu'une solution particulière est une fonction polynomiale de degré 2.

D'où $z = x^2 + 2x + 2 + Ae^x$, $A \in \mathbb{R}$.

De plus on a : $y(0) = 1/3 \iff z(0) = 3 \iff 2 + A = 3 \iff A = 1$. D'où

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2 + e^x} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1 + e^x}$$

D'où on a une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions de l'exercice.

Solution de l'Exercice 12 (a), convergence. La fonction $f(t) = \frac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$.

Pour le point 1. On a $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 1$ donc elle est prolongeable par continuité au point 1. D'où $\int_{1/2}^1 f(t) dt$ converge.

Pour le point 0. On a $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} f(t) = 0$, donc $f(t) = o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0, de plus $\int_0^{1/2} (1/\sqrt{t}) dt$ converge d'après Riemann. Ainsi $\int_0^{1/2} f(t) dt$ converge.

Donc notre intégrale converge.

Calcul. Par le changement de variable $x = -\ln(t)$ on obtient

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

c'est un exercice de T.D.

(b), convergence. La fonction $g(t) = \frac{\tanh(ut) - \tanh(vt)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc elle est localement intégrable.

Au voisinage de 0. g est prolongeable par continuité, d'où $\int_0^1 g(t) dt$ existe.

Au voisinage de $+\infty$. D'après T.A.F., appliqué à g sur le segment $[vt, ut]$, on a $g(t) = \frac{u-v}{\cosh(w)}$ pour un certain $w \in [vt, ut]$. Donc $0 \leq g(t) \leq \frac{u-v}{\cosh(vt)}$, pour tout $t \in]0, +\infty[$. Vérifier que $\int_1^\infty \frac{u-v}{\cosh(vt)} dt$ converge. Donc $\int_1^\infty g(t) dt$ converge. Conclusion notre intégrale converge.

Calcul. (Remarque : dans notre cas, le calcul montre aussi la convergence). Notons $J_{a,b} = \int_a^b \frac{\tanh(ut) - \tanh(vt)}{t} dt$. Comme en T.D., on a

$$J_{a,b} = \int_a^b \frac{\tanh(ut)}{t} dt - \int_a^b \frac{\tanh(vt)}{t} dt$$

Le changement de variable $x = ut$ (resp. $y = vt$) dans $\int_a^b \frac{\tanh(ut)}{t} dt$ (resp. $\int_a^b \frac{\tanh(vt)}{t} dt$), on obtient

$$\begin{aligned} J_{a,b} &= \int_{ua}^{ub} \frac{\tanh(x)}{x} dx - \int_{va}^{vb} \frac{\tanh(y)}{y} dy \\ &= \int_{ua}^{va} \frac{\tanh(x)}{x} dx + \int_{vb}^{ub} \frac{\tanh(x)}{x} dx \end{aligned}$$