ESATIC
Compléments d'Analyse

ANNÉE ACADÉMIQUE 2019-2020
SRIT 1 - RTEL 1 - SIGL 1 - TWIN 1

FICHE DE T D N° 1

Exercice 1. *Répondre par vrai ou faux.*

1. *Toute fonction qui possède des primitives sur un intervalle I est continue sur I.*
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\frac{du}{2}$.
3. *L'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction paire est positive ou nulle.*
4. *Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.*
5. *Toute primitive d'une fonction rationnelle est rationnelle.*
6. *Un élément simple de seconde espèce est de la forme :* $\dfrac{c}{(X^2+aX+b)^k}$

Exercice 2.

1. *Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :*

$$A = \frac{x^5}{(x+1)^4} \quad B = \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x^2(x+1)^2(x+2)} \quad C = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} \quad D = \frac{x^4+x+1}{x(x^3+1)^3}.$$

2. *Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :*

$$E = \frac{x}{(x^2+4)(x^2+1)} \qquad F = \frac{2x^2-5x+3}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$$

Exercice 3.

1. *Déterminer une primitive de f sur $[3;+\infty[$, avec* $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$.
2. *Déterminer une primitive de g sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, avec* $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}$.

Exercice 4.

1. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx$
2. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
   (a) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$.

(b) *Déterminer la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *de terme général*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$$

3. *On considère l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}}dx.$

(a) *Montrer que* $J = -J$.

(b) *En déduire la valeur de* J.

Exercice 5.

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt{4x-x^2}}.$

1) *Montrer par un changement de variables que :* $I = \displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{du}{1+\sqrt{1-u^2}}.$

2) *Effectuer le changement de variable* $u = \cos t$ *dans l'intégrale* $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{du}{1+\sqrt{1-u^2}}.$

3) **(a)** *Exprimer* $\sin\theta$ *en fonction de* $\tan\frac{\theta}{2}$ *pour* $\theta \in]-\pi;\pi[$.

(b) *En déduire que* $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt.$

4) *En déduire enfin la valeur de I.*

Exercice 6.

(I) *Calculer la limite de*

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$$

(II) *Calculer la limite de la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+3k^2}$$

Exercice 7. *Soient* a *et* x *deux nombres réels strictement supérieurs à 1 et tels que* $a < x$. *Calculer les intégrales des fonctions rationnelles suivantes.*

1. $I = \displaystyle\int_a^x \frac{3t^3+10t^2-2t}{(t^2-l)^2}dt$

2. $J = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t^3(1+t^3)}dt$

Exercice 8.

1. *Déterminer une primitive de f sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, avec $f(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$.*
2. *Déterminer une primitive de g sur $]0;\frac{\pi}{2}[$, avec $g(x)=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x}$.*

<u>Exercice</u> 9.
Calculer

1. $K=\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}dx$
2. $L=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt.$
3. $N=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$

<u>Exercice</u> 10. *Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions*

$$f(x)=\frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

<u>Exercice</u> 11. *Résoudre sur des intervalles appropriés les équations différentielles suivantes :*

a) $y'+2y=x^2$
b) $\frac{yy'}{1+y^2}=\frac{1}{x}$
c) $y'-y=(x+1)e^x$
d) $y'+y=x-e^x+\cos x$

<u>Exercice</u> 12. *Résoudre sur des intervalles appropriés les équations différentielles suivantes :*

a) $xy'-y=2x^2, \qquad y(1)=5,$
b) $(1+e^x)y'+e^xy=(1+e^x)$
c) $(2+\cos x)y'+\sin(x)y=(2+\cos x)\sin x$

<u>Exercice</u> 13. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

a) $y''-3y'+2y=0$
b) $y''+2y'+2y=0$
c) $y''+2y'+y=e^x$
d) $y''-3y'+2y=\sin(2x)$

<u>Exercice</u> 14. *Le but de l'exercice est de déterminer sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ la solution générale de l'équation différentielle (E) suivante.*

$$(E) \qquad y''(t)-2y'(t)+2y(t)=(\pi-t)e^{-2t}+\frac{e^t}{\cos^2(t)}.$$

1. *Déterminer l'ensemble des solutions sur* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *de l'équation homogène*

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0.$$

2. *Sans utiliser la méthode de la variation des constantes, déterminer une solution particulière de l'équation* $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = (\pi - t)e^{-2t}$.
3. *En utilisant la méthode de la variation des constantes, déterminer une solution particulière de l'équation* $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \dfrac{e^t}{\cos^2(t)}$.
4. *Déduire des questions précédentes la solution générale de (E) sur* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. *Déterminer la solution* f *de (E) sur* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$.

Exercice 15. *Le but de l'exercice est de déterminer la solution générale de l'équation différentielle* (E) *suivante.*

$$(E) \qquad\qquad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2 + 1)e^t + 2e^{2t}.$$

1. *Déterminer l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation sans second membre* $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$.
2. *Déterminer les trois réels* a, b, c *tels que* $t \mapsto (at^2 + bt + c)e^t$ *est solution de l'équation* $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (t^2 + 1)e^t$.
3. *Déterminer le réel a tel que* $t \mapsto at^2e^{2t}$ *est solution de l'équation* $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2e^{2t}$.
4. *Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).*
5. *Déterminer la solution* f *de (E) sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$.