ESATIC ANNÉE ACADÉMIQUE 2021 - 2022
Complément d'analyse *SRIT 1 - RTEL 1 - SIGL 1 - TWIN 1*

FICHE DE T D : $n^o\,2$

1 Dévéloppements Limités

Exercice 1.

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de*
$$f(x) = (1 + \arctan x)(e^x + 2\sin x);$$
2. *Déterminer le développement limité a l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$ de*
$$h(x) = \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2};$$
3. *Déterminer le développement limité a l'ordre 3, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de*
$$i(x) = (1 + \sin x)^x;$$
4. *Déterminer le développement limité généralisé à l'ordre 2 au voisinage de 0 de* $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{1-\cos x}$.

Exercice 2.
A l'aide du développement limité, déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + \ln(\cos(x))}{x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$
3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$

Exercice 3.
Etudier au voisinage de x_0, les fonctions f définies ci-dessous (tangente, position par rapport à la tangente, dessin).

1. $x_0 = 0$ *et*
$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$
2. $x_0 = 1$ *et*
$$f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$$

Exercice 4.
Etudier à l'infini (asymptote à la courbe représentative, position par rapport l'asymptote), les fonctions ci-dessous

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}; \qquad g(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{3x^2}{1+3x^2}\right)$$

2 Fonctions de deux variables

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{array}{llcl} g: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (t,u) & \mapsto & f(2t-u, 4t+3u), \\ h: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (t,u) & \mapsto & f(t^2+2u^2, e^{tu}), \\ k: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & t & \mapsto & f(t^2, t^3). \end{array}$$

Calculer les derivees partielles premieres de g, h et la dérivée première de k en fonction de celles de f.

Exercice 6.
Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

$$a)\ \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad b)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad c)\ \frac{\sin x shy}{xy} \qquad d)\ \frac{\sin x - shy}{shx - \sin y}.$$

Exercice 7. *Étudier la limite en (1,0) de la fonctions f de deux variables réelles définies par la formule :*

$$f(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}.$$

Exercice 8.
Déterminer les points critiques des fonctions réelles suivantes et préciser l'existence et le type d'extrema.

1. $f(x,y) = x^2 - 2xy + \dfrac{y^4}{2}$.
2. $f(x,y) = y^2 + xy\ln x$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

Exercice 9.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *f est elle continue sur $\mathbb{R}^2$?*
2. *Calculer $\nabla f(x,y)$. f est elle de classe C^1 ?*
3. *Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout points. Que pouvez vous déduire du calcul de $\partial_{xy} f(0,0)$ et $\partial_{yx} f(0,0)$?*