Chapitre 21

Calcul de primitives

21.1 Calcul pratique de primitives

On note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Cette notation désigne une *fonction*, à ne pas confondre avec une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est un *réel*.

Théorème 21.1 : **Changement de variables**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \mapsto I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle J vers l'intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur l'intervalle J.

En pratique pour calculer une primitive $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, où φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'intervalle J vers l'intervalle I et l'on calcule une primitive $G(t) = F\big(\varphi(t)\big) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle J. Ensuite il suffit de remplacer t par $\varphi^{-1}(x)$: $F(x) = G\big(\varphi^{-1}(t)\big)$.

Exercice 21-1

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ sur $I =]0,\pi[$;
2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x}$ sur $I =]0,+\infty[$;
3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$ sur $I = \mathbb{R}$;
4. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ $(a > 0)$;
5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $I =]-a,a[$.

Théorème 21.2 : **Intégration par parties**

(H1) Soient $u,v : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

Alors
$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Exercice 21-2

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$;
2. $\int (x^2-x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$;
3. $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$;
4. $\int \arctan\Big(\dfrac{x-1}{x-2}\Big)\,\mathrm{d}x$.

21.1.1 Primitives usuelles à connaître par coeur

Les classiques

$$\int (x-a)^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a|$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{a} \quad \int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{a} \quad \int \mathrm{sh}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{a} \quad \int \mathrm{ch}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{a} \quad (a \neq 0)$$

Celles à connaître absolument

Soit un réel $a > 0$. On obtient les primitives suivantes en factorisant a^2 et en faisant le changement de variables $u = x/a$.

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{argsh}\,\frac{x}{a}}$$

où argsh est la bijection réciproque de la fonction sh définie sur $\mathbb{R}$, et sa forme logarithmique (bonne à connaître par coeur) s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{argsh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)}$$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2\, x} = \mathrm{th}\, x$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{cotan}\, x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2\, x} = -\coth x$
$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\int \mathrm{th}\, x\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\mathrm{ch}\, x\rvert$

Primitives obtenues par changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad \Big\| \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\, x} = \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right|$$

Elle s'obtiennent grâce au changement de variables :

t	$=$	$\tan\frac{x}{2}$	t	$=$	$\mathrm{th}\,\frac{x}{2}$
$\mathrm{d}t$	$=$	$\frac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}t$	$=$	$\frac{1}{2}(1-t^2)\,\mathrm{d}x$
$\sin x$	$=$	$\frac{2t}{1+t^2}$	$\mathrm{sh}\, x$	$=$	$\frac{2t}{1-t^2}$
$\cos x$	$=$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\mathrm{ch}\, x$	$=$	$\frac{1+t^2}{1-t^2}$
$\tan x$	$=$	$\frac{2t}{1-t^2}$	$\mathrm{th}\, x$	$=$	$\frac{2t}{1+t^2}$

On obtient la primitive suivante en remplaçant x par $x + \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}\, x} = 2\arctan e^x$$

21.2 Fractions rationnelles

DÉFINITION 21.1 : Fractions rationnelles
Une fraction rationnelle est un « quotient » de deux polynômes $P,Q \in \mathbb{K}[X]$. On la note $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles. On peut définir la somme et le produit de deux fractions rationnelles par les formules suivantes :

$$F_1(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}, \quad F_2(X) = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

$$F_1 + F_2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \quad F_1F_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

Muni de ces lois, $\big(\mathbb{K}(X), +, \times\big)$ est un corps commutatif.

Remarque 224. Si $\delta = P \wedge Q$, alors $P = P_1\delta$ et $Q = Q_1\delta$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$ et alors $\frac{P}{Q} = \frac{P_1\delta}{Q_1\delta} = \frac{P_1}{Q_1}$. On peut également diviser au numérateur et au dénominateur par le coefficient dominant du polynôme Q_1. Dans la suite, on considérera donc uniquement des fractions rationnelles de la forme $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et Q un polynôme unitaire.

DÉFINITION 21.2 : Degré d'une fraction rationnelle
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de F :

$$\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z}$$

On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :

$$\deg(F_1 + F_2) \le \max(\deg F_1, \deg F_2), \quad \deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$$

Lorsque $F \neq 0$, le degré de F est un entier relatif. Lorsque $F = 0$, $\deg F = -\infty$.

DÉFINITION 21.3 : Zéros, pôles d'une fraction rationnelle, fonctions rationnelles
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Les racines de P s'appellent les *zéros* de F et les racines de Q les *pôles* de F. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des pôles de F, on peut définir la *fonction rationnelle* associée à F :

$$\widetilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{cases}$$

Remarque 225. Un pôle $a \in \mathbb{K}$ de la fraction $F = \frac{P}{Q}$, est dit de multiplicité $k \in \mathbb{N}$, lorsque le scalaire a est un zéro de multiplicité k du polynôme Q.

DÉFINITION 21.4 : Dérivée d'une fraction rationnelle
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On définit *formellement* la dérivée de cette fraction rationnelle par la formule

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Remarque 226. On associe la *fonction rationnelle* dérivée associée $\widetilde{F'} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \mapsto \mathbb{K}$. Cette fonction dérivée coïncide avec la dérivée usuelle de la fonction $\widetilde{F}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

21.2.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

PROPOSITION 21.3 : Partie entière d'une fraction rationnelle
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E,\widehat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$\begin{cases} F = E + \widehat{F} \\ \deg \widehat{F} < 0 \end{cases}$$

Le polynôme E est appelé la *partie entière* de la fraction F.

Remarque 227. Pour trouver la partie entière de F, on effectue la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B : $A = BE + R$ avec $\deg R < \deg B$ et alors $F = E + \dfrac{R}{B}$.

PROPOSITION 21.4 : Partie polaire d'une fraction rationnelle

Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et un pôle $a \in \mathbb{K}$ de multiplicité k :

$$B = (X-a)^k \widehat{B} \text{ avec } \widehat{B}(a) \neq 0$$

Il existe un unique couple $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes tels que

$$F = \frac{A_1}{\widehat{B}} + \frac{A_2}{(X-a)^k} \text{ et } \deg(A_2) < k$$

La fraction rationnelle $\dfrac{A_2}{(X-a)^k}$ est appelée *partie polaire* de la fraction F relative au pôle a.

PROPOSITION 21.5 : Coefficient associé à un pôle simple

Si une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ est de degré < 0 avec $Q(X) = (X-a)V(X)$, où $V(a) \neq 0$, la partie polaire de la fraction F relativement au pôle simple a est de la forme $\frac{\lambda}{X-a}$:

$$F = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{U}{V} \tag{21.1}$$

Pour trouver le scalaire λ, on peut :

- Multiplier (21.1) par $(X-a)$, puis faire $x = a$ dans la fonction rationnelle associée. On trouve que : $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{V(a)}}$.
- Utiliser la formule de Taylor pour Q, et obtenir $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$. Cette formule est très utile lorsqu'il est difficile de trouver le quotient V du polynôme Q par $(X-a)$.

21.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

THÉORÈME 21.6 : Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$, avec la décomposition du polynôme Q en éléments irréductibles qui s'écrit :

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$\begin{aligned} F = E + &\left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}} \right) \end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme nul, ou de degré $\deg(P) - \deg(Q)$ et où les coefficient $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ sont complexes.

Exercice 21-3

Décomposer les fractions rationnelles $F(X) = \dfrac{X-4}{(X-1)(X+1)X}$ et $G(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

On suppose que $F(X) = \dfrac{P}{Q}$ avec $\deg F < 0$ et $Q(X) = (X-a)^n V(X)$ avec $(V(a) \neq 0)$. La décomposition de F s'écrit alors

$$F = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n} + \frac{U(X)}{V(X)} \tag{21.2}$$

- En multipliant (21.2) par $(X-a)^n$ et en faisant $x = a$, on trouve λ_n ;
- Si n est petit, $(n \leq 2)$, on retranche $\dfrac{\lambda_n}{(X-a)^n}$ à F, et on recommence pour trouver λ_{n-1} etc ;
- Si $n \geq 3$, on fait le changement de variables $Y = X - a$, $F(Y) = \dfrac{P_1(Y)}{Y^n V_1(Y)}$, et on effectue une division selon les puissances croissantes (ou un $DL(0,n-1)$) à l'ordre $n-1$:

  $$P_1 = V_1(a_0 + a_1 Y + \dots + a_{n-1}Y^{n-1}) + R \text{ avec } \mathrm{val}(R) \geq n$$

  On a alors :

  $$F(Y) = \frac{a_0}{Y^n} + \frac{a_1}{Y^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y} + \dots$$

  et on trouve les coefficients $\lambda_1 = a_{n-1}$, $\lambda_2 = a_{n-2}, \dots$.

Exercice 21-4

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $G(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)^4 X}$.

Remarque 228. Trois astuces à retenir pour obtenir des relations entre coefficients :

- multiplier par x^p et faire $x \to +\infty$ (ou prendre la partie entière des fractions résultantes) ;
- Utiliser la parité éventuelle de la fraction ;
- Donner une valeur particulière à x $(x = 0)$.

Exercice 21-5

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $G(X) = \dfrac{X}{(X^2-1)^2}$.

21.2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 21.7 : **Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$**

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$, où la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur s'écrit :

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1} \dots (X^2 + b_p X + c_p)^{\alpha_p}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon unique :

$$\begin{aligned} F = E + \Bigg[& \left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \\ & + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}} \right) \Bigg] + \\ + \Bigg[& \left(\frac{\mu_{11}X + \delta_{11}}{X^2 + b_1 X + c_1} + \frac{\mu_{12}X + \delta_{12}}{(X^2 + b_1 X + c_1)^2} + \dots + \frac{\mu_{1\beta_1}X + \delta_{1\beta_1}}{(X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1}} \right) + \dots + \\ & + \left(\frac{\mu_{p1}X + \delta_{p1}}{X^2 + b_p X + c_p} + \frac{\mu_{p2}X + \delta_{p2}}{(X^2 + b_p X + c_p)^2} + \dots + \frac{\mu_{p\beta_p}X + \delta_{p\beta_p}}{(X^2 + b_p X + c_p)^{\beta_p}} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme nul ou de degré $\deg P - \deg Q$, et tous les λ_{ij}, μ_{ij}, δ_{ij} sont des réels.
Le premier groupe est formé *d'éléments simples de première espèce* et le second groupe d'*éléments simples de seconde espèce*.

- La recherche de la partie entière et des coefficients des éléments simples de première espèce se fait comme précédemment ;
- On peut utiliser une décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les éléments simples correspondant aux pôles conjugués pour obtenir les éléments simples de seconde espèce ;

- Si $X^2+pX+q=(X-a)(X-\overline{a})$, on peut multiplier la décomposition par $(X^2+pX+q)^k$ et faire $x=a$, puis $x=\overline{a}$;
- Utiliser les remarques précédentes pour trouver des relations entre coefficients.

Exercice 21-6

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles $F(X)=\dfrac{1}{X^{2n}-1}$, $G(X)=\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}$ et $H(X)=\dfrac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2}$.

Exercice 21-7

Utiliser la décomposition de la fraction $F(X)=\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ pour trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 21-8

Soit f la fonction arctan. Décomposer $f'(x)$ dans $\mathbb{C}(X)$, puis utiliser cette décomposition pour calculer explicitement $f^{(n)}(x)$. En déduire les zéros de $f^{(n)}$.

Exercice 21-9

Soit un polynôme P de degré n à coefficients réels n'admettant que des racines simples.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F=\dfrac{P'}{P}$.
b. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P''(x)P(x)\leq P'(x)^2$.

21.2.4 Primitives de fractions rationnelles.

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. La partie entière et les éléments simples de première espèce se primitivent immédiatement. Pour primitiver un élément simple de deuxième espèce: $\int\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$,

- Faire apparaître en haut la dérivée de x^2+px+q, et la partie en x se primitive en ln ou en une fraction ;
- On se ramène à primitiver $\int\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$. Pour cela, on réduit le trinôme sous forme canonique et on effectue les changements de variables appropriés ;
- Pour calculer $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, on intègre $\boxed{I_{n-1}}$ par parties. On obtient une relation entre I_n et I_{n-1}.

  Par exemple, pour calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$, on intègre par parties $\arctan x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Exercice 21-10

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$

Exercice 21-11

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3(x^2+1)}$

Exercice 21-12

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

Exercice 21-13

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^6-1)}$

21.2.5 Primitives rationnelles en $\sin, \cos$

On s'intéresse aux primitives de la forme $\boxed{\int F(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x}$ où F est une fraction rationnelle dans les deux arguments.

1. $\int P(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$, où P est un polynôme dans les deux variables.
   On se ramène au calcul de $\int \sin^p x \cos^q x\ \mathrm{d}x$.
   - Si p est impair : $\int \sin^{2k} x \cos^q x \sin x\ \mathrm{d}x$, faire le changement de variables $y = \cos x$;
   - Si q est impair : faire le changement de variables $y = \sin x$;
   - Si p et q sont pairs, on linéarise (cf règles de Bioche).

   Exercice 21-14
   Calculer $\int \sin^2 x \cos^3 x\ \mathrm{d}x$.

2. Règles de Bioche pour calculer $\int F(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$:

   On étudie l'élément différentiel $\omega(x) = F(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$.
   - Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
   - Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
   - Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
   - Si aucune transformation de marche, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 21-15
Calculer $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$, $\int \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\ \mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

21.2.6 Primitives rationnelles en sh, ch

On veut calculer des primitives de la forme $\boxed{\int F(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)\ \mathrm{d}x}$ où F est une fraction rationnelle dans les deux variables. On a l'analogie des règles de Bioche :
On étudie l'élément différentiel $\omega(x) = F(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$ (en remplaçant les fonctions hyperboliques par les fonctions trigonométriques associées).

- Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, on pose $t = \mathrm{ch}\, x$:
- Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \mathrm{sh}\, x$;
- Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \mathrm{th}\, x$;
- Si aucune transformation ne marche, on pose $t = \mathrm{th}\, \frac{x}{2}$ ou alors $t = e^x$.

Exercice 21-16
Calculer $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x}$, $\int \dfrac{\mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}\, x(2+\mathrm{sh}^2 x)}\ \mathrm{d}x$, $\int \mathrm{th}^3 x\ \mathrm{d}x$, $\int_0^{\ln 2} \dfrac{\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{sh}\, x - 4\,\mathrm{ch}\, x}$

21.2.7 Primitives avec des racines.

Il y en a de deux sortes qu'on sait traiter ($F(\lambda,\mu)$ est une fraction rationnelle dans les deux arguments).

- $\boxed{\int F(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})}$ Poser $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- $\boxed{\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}$: réduire le trinôme et poser y un sin, un ch ou un sh pour faire disparaître la racine.

Exercice 21-17
Calculer $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

Exercice 21-18

Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Exercice 21-19

Calculer $\int \frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \mathrm{d}x$

Exercice 21-20

Calculer $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\ \mathrm{d}x$

Exercice 21-21

Calculer $\int \sqrt{x-x^2}\ \mathrm{d}x$

Remarque 229. Une astuce qui simplifie considérablement les calculs : pour calculer une primitive de

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\ \mathrm{d}x$$

commencer par réduire le trinôme pour se ramener à calculer

$$F = \int \sqrt{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$$

L'idée consiste à faire passer la racine au dénominateur en intégrant par parties, car la primitive suivante est connue :

$$G = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{argsh}(x/a)$$

Exercice 21-22

Calculer $\int \sqrt{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x$.