Sommes de Riemann

Exercice 1 [01998] [correction]
Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad \text{b)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \quad \text{c)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 2 [01999] [correction]
En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Exercice 3 [00744] [correction]
Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 4 [02785] [correction]
Etudier les limites de $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$.

Exercice 5 [02786] [correction]
Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6 [02787] [correction]
Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.
Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 7 [02823] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, a, b réels avec $a < b$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8 [00193] [correction]
Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 [03198] [correction]
Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$$

Exercice 10 [03768] [correction]
Etudier la suite suivante

$$u_n = \frac{r(1)+r(2)+\cdots+r(n)}{n^2}$$

avec $r(k)$ le reste de la division euclidienne de n par k.
Indice : étudier la suite suivante

$$v_n = \frac{(n-r(1))+(n-r(2))+\cdots+(n-r(n))}{n^2}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{1+(k/n)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2k/n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}}=\left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1=\sqrt{3}-1$$

Exercice 2 : [énoncé]
On peut écrire

$$S_n=n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f:t\mapsto\sqrt{t}$ définie et continue sur $[0,1]$.
Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

donc

$$S_n\sim\frac{2}{3}n^{3/2}$$

Exercice 3 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k)-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

La fonction $x\to\ln(1+x)$ étant continue sur $[0,1]$, on obtient

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\to\frac{4}{\mathrm{e}}$$

Exercice 4 : [énoncé]

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1\ln(1+t)\mathrm{d}t=2\ln 2-1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n}\to\frac{4}{\mathrm{e}}$$

Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$ donc

$$1\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}\to 1$$

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $x\geqslant 0$, $x-\frac{1}{6}x^3\leqslant\sin x\leqslant x$ donc $|\sin x-x|\leqslant Mx^3$ avec $M=1/6$.
On a alors

$$\left|\sin\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2}\right|\leqslant M.\frac{k^3}{n^6}\leqslant\frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}\to 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}\to\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \to \sin 1 - \cos 1$$
Pour $x \geqslant 0$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x$ donne aussi $\left|\sin^2 x - x^2\right| \leqslant M'x^4$ avec $M' = 1/3$.
Ainsi
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\right| \leqslant M' \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^2} \leqslant \frac{M'}{n} \to 0$$
Or
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}} \to \ln 2$$

Exercice 6 : [énoncé]
On a
$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \cos \frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$
donc
$$x_n = \frac{\pi}{n+1}$$
Par suite
$$f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}$$
Or la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0,1]$ donc par somme de Riemann
$$f_n(x_n) \to \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 : [énoncé]
Il est bon de savoir qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe est obligatoirement continue bien que ce résultat n'est pas explicitement au programme. Par les sommes de Riemann,
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$
donc par continuité
$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
Par l'inégalité de Jensen
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
En passant cette relation à la limite, on peut alors conclure grâce à la continuité de f.

Exercice 8 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$
$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} f(u/n)\left|\sin u\right|\,\mathrm{d}u$$
En découpant l'intégrale par la relation de Chasles
$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(u/n)\left|\sin u\right|\,\mathrm{d}u$$
puis par translation de la variable
$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u$$
et on peut alors écrire
$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin$$
D'une part
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
se reconnaît comme étant une somme de Riemann et donc
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin u\,\mathrm{d}u \to 2\int_0^1 f(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'autre part, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$ elle y est M-lipschitzienne avec

$$M = \sup_{[0,\pi]} |f'|$$

et on a alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin u\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} M\frac{u}{n}\sin u\,\mathrm{d}u = \frac{M}{n}\int_0^{\pi} u\sin u\,\mathrm{d}u \to 0$$

On en déduit

$$\int_0^{\pi} f(t)\left|\sin(nt)\right|\,\mathrm{d}t \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Notons que le résultat peut aussi être établi d'une façon semblable pour f seulement continue en exploitant l'uniforme continuité de f sur le segment $[0,\pi]$.

Exercice 9 : [énoncé]

On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2}S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+2k/n)^3}$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}$$

Exercice 10 : [énoncé]

La division euclidienne de n par k s'écrit

$$n = [n/k]\,k + r(k)$$

et donc

$$n - r(k) = k\,[n/k]$$

puis

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction $f : t \mapsto t\,[1/t]$ définie et continue par morceaux sur $]0,1]$. Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ (il n'existe pas de subdivision finie du segment $[0,1]$ qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On peut écrire

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right] + \frac{1}{n}\sum_{k=[n/N]+1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]$$

D'une part

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/N]}1 \leqslant \frac{[n/N]}{n} \leqslant \frac{1}{N}$$

et d'autre part, par les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N]+1}^{n}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{1/N}^{1} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_{1/N}^{1} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t = \int_1^N \frac{[u]}{u^3}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{k}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$\int_{1/N}^{1} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{12}$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N \leqslant \varepsilon$ et $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \varepsilon$, on a

$$\left|v_n - \frac{\pi^2}{12}\right| \leqslant \varepsilon + \frac{n-[n/N]}{n}\left(\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N+1]}^{N}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{\pi^2}{12}\right) + \frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

Puis pour n assez grand

$$\left|v_n - \frac{\pi^2}{12}\right| \leqslant \varepsilon + \frac{n-[n/N]}{n}\left(\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\varepsilon\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left|v_n - \frac{\pi^2}{12}\right| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon\frac{\pi^2}{12}$$

Finalement $v_n \to \pi^2/12$ puis $u_n \to 1-\pi^2/12$