T.D. LOGIQUE

LICENCE 1

Exercice 1

VRAI ou FAUX ?

- a) la négation de $(P \implies Q)$ est $(\overline{Q} \implies \overline{P})$.
- b) $\mathbb{R}_+ \Delta \mathbb{R}_- = \mathbb{R}^*$.
- c) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
- d) Soit $f \in F^E$, f injective $\iff \forall (x, y) \in E^2, x = y$ ou $f(x) \neq f(y)$.
- e) Deux applications f et g de E dans E telles que $f \circ g = id_E$, sont bijectives.
- f) Si f et g sont bijectives, $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- g) Soit $f \in F^E, \forall x \in E, f(x) \in f(A) \implies x \in A$, où $A \subset E$.
- h) Dans $\mathbb{R}^*$, la relation $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre.
- i) Dans $\mathbb{C}$, la relation $|z| \leq |z'|$ est une relation d'ordre.

Exercice 2

Etant donnés deux entiers a et b , on considère les deux propositions suivantes :

P : a et b sont tous les deux pairs ;

Q : a et b sont de parités différentes.

Que signifient les implications suivantes et

lesquelles sont vraies pour toutes valeurs de a et b ?

$$\begin{array}{l} P \implies Q, \quad Q \implies P, \quad \overline{P} \implies \overline{Q}, \quad \overline{Q} \implies \overline{P}, \\ P \implies \overline{Q}, \quad \overline{Q} \implies P, \quad \overline{P} \implies Q, \quad Q \implies \overline{P}. \end{array}$$

Exercice 3

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

$$A : (P \implies Q) \implies R, \quad B : P \implies (Q \implies R), \quad C : (P \text{ et } Q) \implies R,$$

$$D : (P \implies R) \text{ et } (Q \implies R).$$

Exercice 4

Etant donnés deux propositions P et Q ,

on définit la proposition P ni Q , qui équivaut à $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

Exprimer, à l'aide du seul symbole $\ll ni \gg$,

les propositions suivantes : $\overline{P}$, P et Q , P ou Q , $p \implies Q$.

Exercice 5

Ecrire, l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et leurs négations. Préciser lesquelles qui sont vraies.

- 1) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- 2) Il existe un entier multiple de tous les autres.
- 3) Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
- 4) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- 5) Etant donnés trois réels, il en a au moins deux de même signe.

Exercice 6

Soit f une application de E dans F .

On lui associe une application

(encore notée f) appelée application *induite*.

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) \text{ par :}$$

$$y \in f(A) \iff (\exists x \in A) ; y = f(x), \quad (A \in \mathcal{P}(E)).$$

On définit aussi la contraposée f^{-1} de f :

$$f^{-1} : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \text{ par :}$$

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B, \quad (B \in \mathcal{P}(F)).$$

1°) Démontrer les propriétés suivantes : ($A \subset E$; $B \subset E$),

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \quad (1)$$

Donner un exemple dans lequel l'inclusion (1) est stricte.

2°) Démontrer les propriétés suivantes : ($A \subset F$; $B \subset F$),

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(\mathfrak{C}_F^A) = \mathfrak{C}_E^{f^{-1}(A)}; \quad A' = \mathfrak{C}_F^A; \quad [f^{-1}(A)]' = \mathfrak{C}_E^{f^{-1}(A)}.$$

$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \oplus B) = f^{-1}(A) \oplus f^{-1}(B).$$

On notera alors que f^{-1} est un homomorphisme de

$(\mathcal{P}(F), \cap, \cup, ')$ dans $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, ')$.

(On dit que f^{-1} est un homomorphisme *booléen*).

3°) Montrer que $\forall X \subset E$; $\forall Y \subset F$,

$$X \subset f^{-1}(f(X)) \quad (2)$$

$$f(f^{-1}(Y)) \subset Y \quad (3).$$

Donner des exemples dans lesquels les inclusions (2) et (3) sont strictes.

4°) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes.

(i) f est une injection,

(ii) $\forall A \subset E$; $\forall B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.