MT 18

A 2010 # TD 1 Aleth Chevalley

Logique et théorie des ensembles

Exercice 1 : Soit E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }

a) Notons A(a) la proposition « a est pair » et B(a) la proposition « a est multiple de 3 ». Trouver les ensembles A et B des éléments a de E, correspondant aux propositions A(a) et B(a).

b) Donner l'ensemble C des éléments a de E qui vérifient la formule : « Si a est pair alors a est un multiple de 3 ».

c) Trouver l'ensemble D des éléments a de E vérifiant : $(A(a) \Rightarrow B(a)) \wedge B(a)$

Exercice 2 : A et B sont deux propositions. $\neg$ A signifie 'la négation de la proposition A'.

Vérifier que les formules ci-dessous sont des théorèmes (sont toujours vraies quelles que soient les valeurs de A et B).

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

b) A l'aide de a) démontrer le résultat suivant : n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

c) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Exercice 3 : $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des droites du plan, D1 et D2 sont deux éléments de $\mathcal{D}$ parallèles entre elles. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et écrire la négation quand elles sont fausses.

a) $\forall\ i \in \{1,2\}, \quad \forall\ D \in \mathcal{D}, \quad D // D_i$

b) $\exists\ i \in \{1,2\}, \quad \exists D \in \mathcal{D}\ / \quad D // D_i$

c) $\forall\ D \in \mathcal{D}, \quad \exists\ i \in \{1,2\}\ / \quad D // D_i$

d) $\exists\ D \in \mathcal{D}\ / \quad \forall\ i \in \{1,2\}, \quad D // D_i$

Exercice 4 : Traduire les énoncés suivants à l'aide de symboles.

a) Pour que f(x) soit égal à x, il faut donner à x la valeur 2.

b) Il suffit que a soit non nul pour que l'inverse de a existe.

c) A est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ contenant au moins un élément pair.

Exercice 5 : Ecrire la **négation** de chacune des propositions suivantes.

a) $t \in \mathbb{Z},\ a \le t \le b$

b) $\forall a \in I, \quad \forall b \in I, \quad |f(a) - f(b)| \le M\,|a - b|$

c) $t \in [0;1[\cup]1;+\infty[$

d) $A \cap B = \varnothing$

Exercice 6 : Ecrire la **contraposée** de chacune des propositions suivantes :

a) $\forall x \in I, \quad x \le 1 \Rightarrow f(x) \in [0;1]$

b) $t < 1 \Rightarrow \exists\ m > 0\ /\ t + m < 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$

Exercice 7 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs et des propositions les expressions suivantes :

a) f est nulle
b) f s'annule en un point
c) f est strictement croissante
d) f est paire

Exercice 8 : Soient A, B, C trois sous-ensembles de E.

a) Montrer que si $A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B$ alors $C \subset B$

b) Montrer les lois de Morgan : $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$

c) Montrer que $(A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C) \Leftrightarrow A \subset C$

d) Montrer que $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

Exercice 9 : Traduire les énoncés suivants à l'aide de symboles :

a) Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ vérifiant : tout élément de A est inférieur ou égal à 2.
b) A est l'ensemble des nombres rationnels dont le carré est supérieur ou égal à un.
c) Il existe un unique élément de A, non nul.
d) L'ensemble complémentaire de A est un sous ensemble de B.
e) Soient A, B, C trois sous ensembles de E vérifiant : tout élément appartenant simultanément à A et B est aussi élément de C.
f) Pour tout réel positif, la racine carrée existe.
g) Si t est strictement supérieur à un, alors il existe un réel m strictement positif tel que t+m soit strictement supérieur à un.

Exercice 10 : Traduire les énoncés suivants à l'aide de phrases.

a) $\forall\ x \in A,\ x > -1$
b) $\exists\ !\ x \in A /\ x \neq 1$
c) $\exists\, x \in A \cap B /\ x \notin C$

Exercice 11 : Ecrire la **négation** de chacune des propositions suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos x \leq 1$
b) $\forall y \in F,\ \exists x \in E /\ y = f(x)$
c) $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ xy = 1$
d) $\forall A > 0,\ \exists m > 0 /\ \forall x > m,\ f(x) > A$
e) $\forall\, t > 0, \quad \exists\ a > 0 / \quad \forall\, x, \quad |x - x_0| \leq a \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq t$

Exercice 12 : A partir des éléments suivants, former des propositions logiques vraies :

3 $\{3\}$ $\in$ $\subset$ $\mathbb{R}$ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Exercice 13 : Ecrire la **contraposée** de chacune des propositions suivantes :

a) $\forall\, t > 0, \quad \exists\ a > 0 / \quad \forall\, x, \quad |x - x_0| \leq a \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq t$
b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{f}(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$

Exercice 14 : Soient A, B, C trois sous-ensembles de E.

a) En déduire que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$
b) Montrer que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
c) Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
d) Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$