ESATIC
Licence 1
Année académique $2013 - 2014$

Eléments de logique : Fiche de TD 2

Exercice 1 : On considère l'ensemble $E = \{\clubsuit\,, \bigcirc\,, \triangle\,, \diamondsuit\}$
et les relations binaires suivantes :

$$\mathcal{R} = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\triangle, \triangle)\} \text{ et } \mathcal{S} = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\bigcirc, \bigcirc), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bigcirc), (\triangle, \bigcirc), (\clubsuit, \diamondsuit)\}$$

Etudier $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

Exercice 2 : Sur $\mathbb{N}^\star$ on définit la relation binaire :

$$\forall (a, b) \in [\mathbb{N}^\star]^2\,;\ a\mathcal{R}b \text{ si } b \text{ est } \textbf{une puissance} \text{ de } a.$$

(i)- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
(ii)- La partie $\{2, 3, 6\}$ est-elle majorée ?

Exercice 3 : Soient A un ensemble non vide et $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des partie de A.
(a)- Montrer que la relation $\prec$ définie sur $\mathcal{P}(A)$ par : $X \prec Y$ si $X \subset Y$ est une relation d'ordre.
(b)- Montrer que si $card(A) \geq 2$, alors $\prec$ est une relation d'ordre partielle.
(c)- On considère l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$. Ecrire le treillis des éléments de $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 4 : Soient E un ensemble non vide et A une partie non vide de E. Sur $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$X\mathcal{R}Y \quad si \quad A \subset X \cup \overline{Y}$$

où $\overline{Y}$ désigne le complémentaire de Y dans E.
(i)- Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.
(ii)- $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ?
(iii)- Montrer que si $A = E$, alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
(iv)- On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, et on suppose $A = E$. Ecrire le treillis des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 5 : Relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{Z}$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie commme suit :
Pour tous a et b éléments de $\mathbb{Z}$, on a $a\mathcal{R}b$ si $b - a \in n\mathbb{Z}$.
(i)- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(ii)- Montrer que $\mathcal{R}$ a exactement n classes d'équivalences si $n \neq 0$.
(iii)- Montrer que $\mathcal{R}$ est compatible à la fois avec $+$ et $\times$.
(iv)- Décrire les classes d'équivalence dans les cas suivants :

$$n = 0,\ n = 1 \text{ et } n = 5.$$

Exercice 6 **:** Sur $\mathbb{Z}$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie commme suit :

Pour tous a et b éléments de $\mathbb{Z}$, on a $a\mathcal{R}b$ si $b^2 - a^2 \in 3\mathbb{Z}$.

(i)- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(ii)- Déterminer les classes d'équivalence .

Exercice 7 **:** (**Relation d'équivalence engendrée par une relation binaire**)

Définition : Soit $\mathcal{R}_o$ une relation binaire sur un ensemble E. On appelle relation d'équivalence engendrée par $\mathcal{R}_0$, **la plus petite** (au sens de l'inclusion "$\subset$") relation d'équivalence $\mathcal{S}$ sur E **contenant** $\mathcal{R}_0$.

Déterminer la relation d'équivalence engendrée dans les cas suivants :

$$\mathcal{R}_1 = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\heartsuit, \heartsuit)\} \text{ et}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\bigcirc, \bigcirc), (\diamondsuit, \bigcirc), (\triangle, \bigcirc), (\clubsuit, \diamondsuit)\}$$

Applications

<u>Exercice 8</u> **:** **Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Dire dans chacun des cas suivants si la relation de E vers F est une application.**

1 - $E \times \{a\}$

2- $\{1\} \times F$

3- $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

4- $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (1, b)\}$

3- $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, b)\}$

<u>Exercice : 9</u> **(Image directe, image réciproque).**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour tout $A \subset E$, l'image directe de A par f notée $f(A)$ est

$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A \quad tq \quad y = f(x)\}$$

Pour tout $B \subset F$, l'image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$ est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

Soient $A \times B$ et $A' \times B'$ deux parties de $E \times F$.

Montrer les propriétés suivantes :

(i)- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

(ii)- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. **Donner un exemple ou l'inclusion est stricte.**

(iii)- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

(iv)- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

(v)- $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

(vi)- On a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$

(vii)- On a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$

<u>Exercice : 10</u> **a)- Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.**

b)- Qu'en est-il pour deux applications surjectives ?

c)- Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

d)- Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

e)- Montrer que si E est un ensemble fini non vide, toute application $f : E \longrightarrow E$ injective est surjective et réciproquement.

<u>Exercice 11</u> :

Soient E un ensemble non vide, B et A deux parties non vides de E. On considere l'application

$$\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B),\ X \longmapsto (X \cap A, X \cap B)$$

a)- Calculer $\varphi(E)$, $\varphi(A \cup B)$, $\varphi(A \cap B)$, $\varphi(\emptyset)$.

b)- φ est-elle injective ?

c)- Le couple $(\emptyset, B)$ a - t- il un antécédent ?

c)- Montrer que la condition $E = A \cup B$ est suffisante pour que φ soit injective.

d)- Donner une condition (sur A et B) suffisante pour que φ soit surjective.

<u>Exercice : 12</u> **(Dénombrement).**

Soient A et B deux ensembles finis non vides ayant respectivement n et p éléments.

(i)-Trouver le nombre d'applications de A vers B.

(ii)- Trouver le nombre d'applications injectives(resp : surjectives, bijectives) de A vers B dans le cas $n \leq p$ (resp : $n \geq p$, $n = p$).

(iii)- Trouver toutes les permutations de l'ensemble $\{a, b, c\}$.