ESATIC
ECOLE SUPÉRIEURE AFRICAINE DES TIC

Année académique : 2014-2015
L1 : SRIT

MECANIQUE DU POINT

DEVOIR: N°1

Durée : 2h00

Exercice 1

Répondre aux questions suivantes en écrivant « 1 » pour Vrai et « 0 » pour Faux dans les cases de ce tableau que vous recopierez sur votre feuille de composition.

N° Proposition	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse										

Barème : 1) rature : 0 ; 2) Mauvaise réponse 0 ; 3) Question non répondu : 0 ; Bonne réponse : +0,5

N°	PROPOSITIONS	V	F
1	La cinématique est l'étude des mouvements d'un corps en fonction des causes qui les produisent.		
2	Pour définir un référentiel, il suffit de définir un repère d'espace comprenant un point origine et une base.		
3	L'angle entre les vecteurs $\vec{u}(2;3;1)$ et $\vec{v}(1;-1;1)$ est $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$		
4	Le produit vectoriel de $\vec{u}(2;3;1)$ et $\vec{v}(1;-1;1)$ est $4\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$		
5	Peut-on écrire que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$		
6	L'intensité de l'accélération, supposée uniforme d'une automobile se déplaçant en ligne droite, dont la vitesse passe de v_1 = 20 km/h à v_2 = 30 km/h en 2 seconde est 1,39 m/s².		
7	Un mobile ponctuel est animé d'un mouvement plan dont les équations horaires sont $\begin{matrix} x = 5t+2 \\ y = -5t^2+8t \end{matrix}$ est $y = -0,2x^2 + 2,4x - 4$		
8	Il suffit que la norme du vecteur vitesse d'un point soit constant pour que ce point soit en mouvement rectiligne.		
9	Pour qu'un mouvement soit rectiligne uniformément varié il suffit que le vecteur accélération soit constant.		
10	On appelle trièdre de Serret-Frenet, la base vectorielle formée par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ avec $\vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{\tau}$.		

Exercice 2 *(7 pts)*

Un mobile parcourt une distance d en trois phases.

1) Le mobile au repos part de l'origine avec une accélération de 2 m/s² qu'il garde pendant 2 s. Déterminer la position $x_1(t)$, la vitesse $v_1(t)$ et l'accélération $a_1(t)$. *(1,5 pts)*

2) Le mobile garde ensuite la vitesse acquise pendant 3 s. Déterminer la position $x_2(t)$, la vitesse $v_2(t)$ et l'accélération $a_2(t)$ au cours de cette deuxième phase. *(1,5 pts)*

3) Enfin, le mobile est freiné jusqu'à l'arrêt avec une décélération de 1 m/s². Déterminer la position $x_3(t)$, la vitesse $v_3(t)$ et l'accélération $a_3(t)$ du mobile. *(1,5 pts)*

4) Calculer la distance d parcourue. *(1 pt)*

5) Pendant tout le parcours, représenter graphiquement la vitesse et l'accélération en fonction du temps. *(1,5 pts)*

Exercice 3 *(8 pts)*

A un instant t = 0 pris comme origine des dates, un autobus prend un virage à vitesse angulaire constante ω_0 (voir figure ci-dessous). O est le centre du virage et la distance OA = R. A ce moment précis, un passager P, immobile en A, se précipite directement vers une place assise libre en B, d'un mouvement d'accélération constante a_0.

1) Dans un référentiel R_A, de repère $(A, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ de base fixe dans l'autobus, préciser la nature du mouvement de P. Déterminer en fonction des données et de t, le vecteur accélération $\vec{a}_r$ et le vecteur vitesse $\vec{v}_r$ du point P, ainsi que l'équation horaire du mouvement. *(2 pts)*

2) Dans le référentiel terrestre R_T et dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ de base mobile des cordonnées polaires, déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_T$ et le vecteur accélération $\vec{a}_T$ du point P. Donner l'équation de la trajectoire du point P en coordonnées polaires du mouvement. *(2 pts)*

3) En utilisant les lois de composition des vitesses et des accélérations, retrouver les vecteurs $\vec{v}_T$ et $\vec{a}_T$ à partir des vecteurs $\vec{v}_r$ et $\vec{a}_r$. *(3 pts)*

4) Exprimer en fonction de a_0 et de la distance AB la vitesse avec laquelle, P atteint le point B. *(1 pt)*

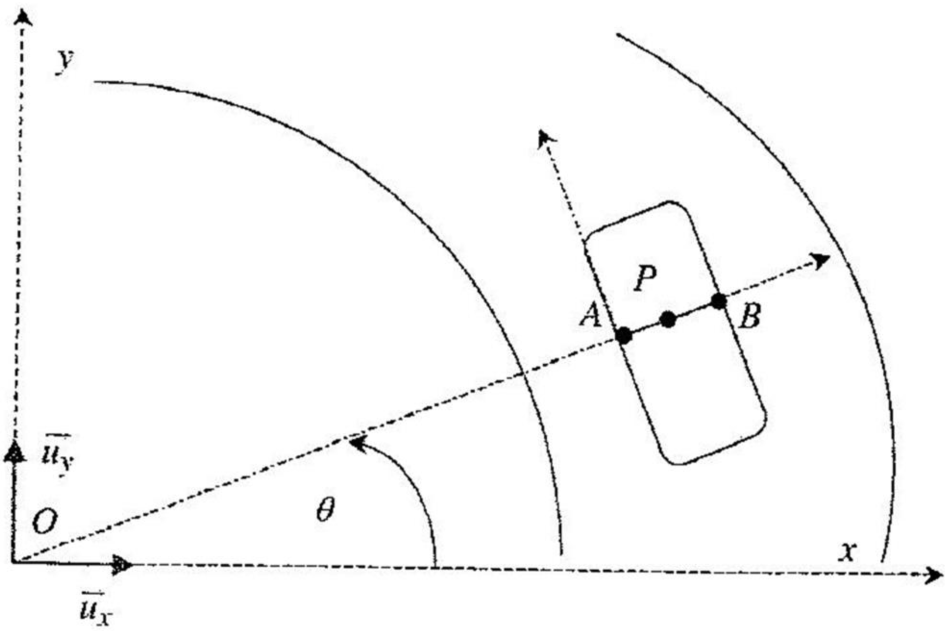


Fig. 1

ESATIC MECANIQUE 12/03/15
L1 DEVOIR N°1

Exercice 1 (5 pts)

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rép.	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

Exercice 2 (7 pts)

1°) 1er Temps :

. $a_1(t) = cte = 2\ m/s^2$ 0,5

. $v_1(t) = \int a_1(t)dt = \int 2dt = 2t + v_{01}$; $t=0$ $v_1(t) = v_1(0) = 0 \Rightarrow v_{01} = 0$

$v_1(t) = 2t$. 0,5

. $x_1(t) = \int v_1(t)dt = \int 2t\,dt = t^2 + x_{01}$; $x_1(0) = 0 \Rightarrow x_{10} = 0$

$x_1(t) = t^2$ 0,5

2°) 2ème Temps :

La vitesse est constante et est égale à $v_1(2)$

$v_2(t) = v_1(2) \Rightarrow v_2(t) = 4\ m/s$ 0,5

$v_2(t) = cte \Rightarrow a_2(t) = 0$ 0,5

$x_2(t) = \int v_2(t) \Rightarrow x_2(t) = 4t + x_{02}$. Pour raison de continuité $x_2(2) = x_1(2) \Leftrightarrow 4(2) + x_{02} = 2^2 \Rightarrow x_{02} = -4$

donc $x_2(t) = 4t - 4$ 0,5

3°) 3ème Temps . $a_3(t) = -1\ m/s^2$ 0,5

$v_3(t) = \int a_3(t)dt = -t + v_{03}$. Or $v_2(5) = v_3(5) \Leftrightarrow$

$4 = -5 + v_{03} \Rightarrow v_{03} = 9 \Rightarrow v_3(t) = -t + 9$ 0,5

$x_3(t) = \int v_3(t)dt = -\frac{1}{2}t^2 + 9t + x_{03}$.

$x_2(5) = x_3(5) \Leftrightarrow 4(5) - 4 = -\frac{1}{2}(5)^2 + 9\times5 + x_{03} \Rightarrow x_{03} = -33/2$

$x_3(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 9t - 33/2$ 0,5

1

4°) Distance d parcourue

Lorsque le mobile a parcouru la distance d, il s'arrête et donc $v_3(t) = 0$. $v_3(t) = 0 \Rightarrow t = 9\,s$ et par conséquent : $d = x_3(9) = 24\,m$ $\underline{\underline{d = 24\,m}}$ (1)

5°) Représentation graphique

$t \in [0,2] \Rightarrow v = 2t$

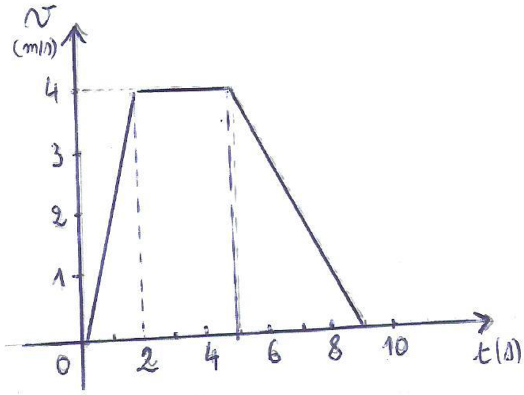
$t \in [2,5] \Rightarrow v = 4$

$t \in [5,9] \Rightarrow v = -t+9$

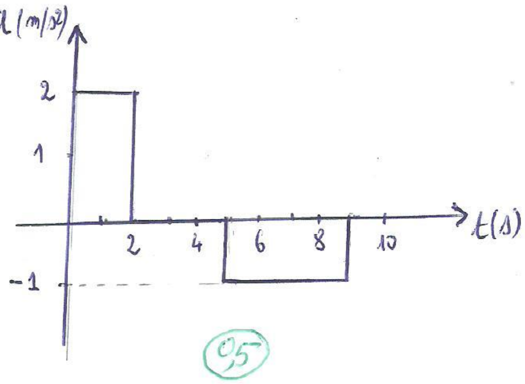
$t \in [0,2] \Rightarrow a = 2$

$t \in [2,5] \Rightarrow a = 0$

$t \in [5,9] \Rightarrow a = -1$



(1)



0,5

2

Exercice 3 (8 pts)

1°) P a un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération constant $\vec{a}_0$ dans la direction de A vers B. (0,5)

$\vec{a}_r = a_0 \vec{u}_\rho$ (0,5)

Le vecteur vitesse de P dans R_A est $\vec{v}_r = a_0 t \vec{u}_\rho$ (0,5)

L'équation horaire $AP = x = \frac{1}{2}a_0 t^2$ (0,5)

2°) $\vec{v}_T$ dans le référentiel terrestre s'écrit $\vec{v}_T = \frac{d\vec{OP}}{dt}$ avec $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$

$\vec{OP} = (R+x)\vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v}_T = \dot{x}\vec{u}_\rho + (R+x)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$; $\dot{\theta} = \omega_0$

$$\boxed{\vec{v}_T = a_0 t \vec{u}_\rho + (R + \tfrac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0 \vec{u}_\theta}$$ (0,5)

L'accélération $\vec{a}_T = \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_T}{dt} = \ddot{x}\vec{u}_\rho + \dot{x}\dot{\theta}\vec{u}_\theta - (R+x)\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho$

$$\boxed{\vec{a}_T = \left[a_0 - (R + \tfrac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0^2\right]\vec{u}_\rho + 2a_0 t\omega_0 \vec{u}_\theta}$$ (1)

L'équation de la trajectoire

$OP = r = (R+x) \Leftrightarrow r = R + \frac{1}{2}a_0 t^2$ or $\theta = \omega_0 t \Rightarrow \boxed{r = R + \frac{1}{2}\frac{a_0}{\omega_0^2}\theta^2}$ (0,5)

3°) Le mouvement de Rotation de R_A par rapport à R_T a pour vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R_A/R_T} = \omega_0 \vec{u}_z = \vec{\omega}$.

$\vec{v}_T = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_r = a_0 t \vec{u}_\rho$ et $\vec{v}_e = \frac{d\vec{OA}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\vec{AP}$

$\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{OA} + \vec{\omega}\wedge\vec{AP} = \vec{\omega}\wedge(\vec{OA}+\vec{AP}) = \vec{\omega}\wedge\vec{OP}$

$\vec{v}_e = \omega_0 \vec{u}_z \wedge (R + \frac{1}{2}a_0 t^2)\vec{u}_\rho = (R + \frac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0 \vec{u}_\theta$

donc $\boxed{\vec{v}_T = a_0 t \vec{u}_\rho + (R + \frac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0 \vec{u}_\theta}$ (1)

La loi de composition des accélérations s'écrit

$\vec{a}_T = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

3

$\vec{a}_r = a_0 \vec{u}_\rho$ (0,5)

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2\,\omega_0 \vec{u}_z \wedge a_0 t\, \vec{u}_\rho = 2 a_0 t \omega_0\, \vec{u}_\theta$ (0,5)

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{OA}}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{AP})$$

$$= \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OA}) + \vec{0} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{AP})$$

$$= \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OA} + \vec{\omega}\wedge\vec{AP})$$

$$= \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge(\vec{OA}+\vec{AP}))$$

$$= \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OP}) = \omega_0\vec{u}_z \wedge\left(\omega_0\vec{u}_z\wedge(R+\tfrac{1}{2}a_0t^2)\vec{u}_\rho\right)$$

$$= \omega_0\vec{u}_z \wedge\left[\left(\omega_0(R+\tfrac{1}{2}a_0t^2)\right)\vec{u}_z\wedge\vec{u}_\rho\right]$$

$$= \omega_0^2(R+\tfrac{1}{2}a_0t^2)\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_\theta$$

$$= -\omega_0^2(R+\tfrac{1}{2}a_0t^2)\,\vec{u}_\rho \quad (0,5)$$

On obtient

$$\vec{a}_T = a_0\vec{u}_\rho + 2a_0 t\omega_0\vec{u}_\theta - \omega_0^2(R+\tfrac{1}{2}a_0t^2)\vec{u}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a}_T = \left(a_0 - (R+\tfrac{1}{2}a_0t^2)\omega_0^2\right)\vec{u}_\rho + 2a_0\omega_0 t\,\vec{u}_\theta} \quad (0,5)$$

4°) Pour atteindre le point B, P met un temps t tel que $AB = \frac{1}{2}a_0t^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2AB}{a_0}}$.

Ainsi P atteint le point avec une vitesse $\vec{v}_B$ tel que $v_B = a_0 t_B = a_0\sqrt{\frac{2AB}{a_0}} = \sqrt{\frac{a_0^2\, 2AB}{a_0}}$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2a_0 \cdot AB}} \quad (1)$$

4