ESATIC — Année académique : 2013 - 2014

TRAVAUX DIRIGES : Série n° 1 (CORRIGE)

Exercice 1

1°) unités de A et B

* A est de même unité que "n", or "n" n'a pas d'unité; donc A n'a pas d'unité.

* B/λ^2 n'a pas d'unité, donc B doit avoir la même unité que λ^2, c'est-à-dire, le mètre carré, d'où l'unité de B est le m^2.

2°) Il faut étudier "n" en fonction de $1/\lambda^2$ car $n = f(\lambda)$ n'est pas une fonction affine; En revanche $n = f(1/\lambda^2)$ est une fonction affine d'ordonnée à l'origine A et de coefficient directeur B.

3°) Détermination de A et B

λ (nm)	400	500	600	700	800	nm
n	1,500	1,489	1,482	1,479	1,476	
λ^2	16.10^4	25.10^4	36.10^4	49.10^4	64.10^4	$10^{-18}\,m^2$
$1/\lambda^2$	$6{,}25\,10^{-6}$	$4{,}0\,10^{-6}$	$2{,}77\,10^{-6}$	$2{,}04\,10^{-6}$	$1{,}56\,10^{-6}$	$10^{18}\,m^{-2}$

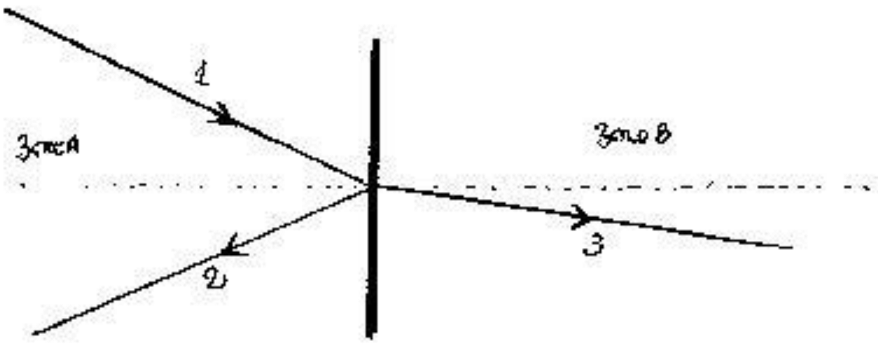
A l'aide d'une calculatrice, on affecte à x la valeur de $1/\lambda^2$ et à y la valeur de n

On trouve $A = 1{,}468$; $B = 5{,}1\,10^{-15}\,m^2$

4) $n(633\,nm) = 1{,}468 + \dfrac{5{,}1\cdot 10^{-15}}{4\cdot 10^{-13}}$

$$\boxed{n(633\,nm) = 1{,}481}$$

Exercice 2



1°) Identification des rayons

Le rayon (1) est le rayon incident
" " (2) " " " réfléchi
Le rayon (3) " " " réfracté

2°) Sens de la lumière : il est indiqué sur la figure

3°) Zone de l'eau

L'indice de l'eau $n = 1,33$ est supérieur à celui de l'air qui vaut 1. Le rayon (3) se rapproche de la normale ; il se propage donc dans le milieu le plus réfringent : l'eau se trouve donc en zone B.

4°) Angle limite de réfraction ℓ

Il est défini par $n_{air} \sin \pi/2 = n \sin \ell$

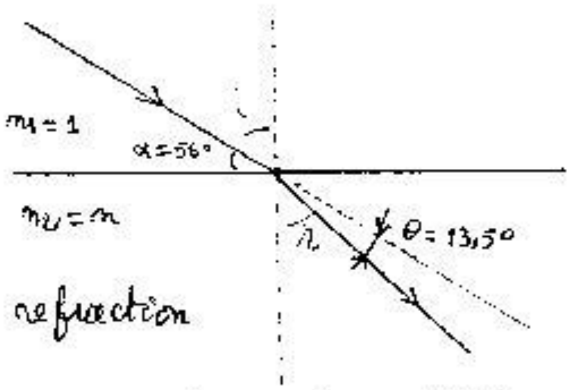
soit $n \sin \ell = 1$ puisque $n_{air} = 1$

$\sin \ell = \frac{1}{n}$; $\sin \ell = \frac{1}{1{,}33} \Rightarrow \boxed{\ell = 48{,}75°}$

5°) Généralisation

L'angle limite de réfraction se trouve dans le milieu le plus réfringent. En conséquence, si l'angle limite se trouve dans le milieu d'incidence du rayon lumineux, il y a réflexion totale au-delà de cet angle.

Exercice 3



Indice du milieu

D'après la loi de la refraction

$n_1 \sin i = n_2 \sin r$

$\sin i = n \sin r$ avec $i = 90° - \alpha = 34°$

et $r = i - \theta = 34° - 13,5° = 20,5°$

AN :

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin 34°}{\sin 20,5°} = 1,5967 \qquad \underline{\underline{n = 1,6}}$$

Exercice 4

1°) Les lois de SNELL - DESCARTES (voir cours)

2°) Troisième loi de Descartes en A et B

En A : $n \sin \pi/2 = n_1 \sin i$ (1)

En B : $n_1 \sin(\pi/2 - i) = n_{air} \sin \alpha$ (où $n_{air} = 1$) ou

$n_1 \cos i = \sin \alpha$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} n = n_1 \sin i \\ n_1 \cos i = \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} n_1^2 \sin^2 i = n^2 \\ n_1^2 \cos^2 i = \sin^2 \alpha \end{cases}$

En additionnant ces 2 équations membre à membre, on obtient $n_1^2 (\cos^2 i + \sin^2 i) = n^2 + \sin^2 \alpha$, soit

$$n_1^2 \times 1 = n^2 + \sin^2 \alpha$$

$$n^2 = n_1^2 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \boxed{n^2 = n_1^2 - \sin^2 \alpha}$$

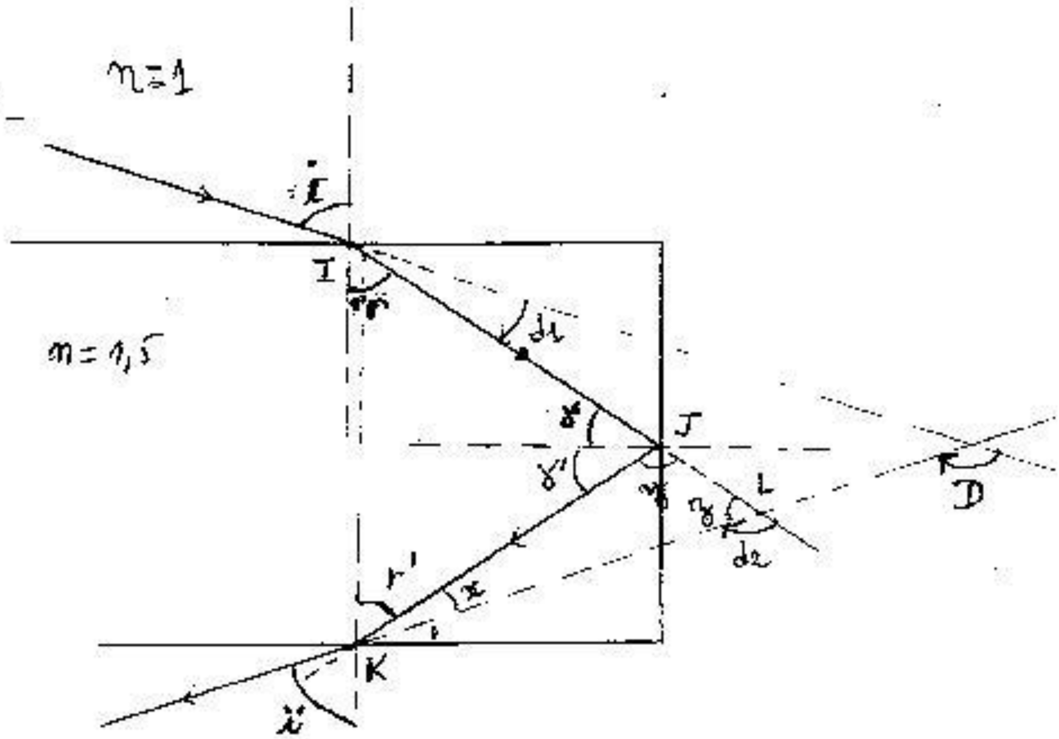
Calculons n :

$$n^2 = 1,732^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$\boxed{n = 1,5}$$

Exercice 5

1).



2). Relations en I, J, K

on applique les lois de SNELL-DESCARTES

- En I : $\sin i = n \sin r$ (1)
- En J : $\gamma = \gamma'$ (2)
- En K : $n \sin r' = \sin i'$ (3)

On a par ailleurs $\gamma + r = \frac{\pi}{2}$ et $\gamma' + r' = \pi/2$

d'après (2) on a $r = r'$

(3) devient $n \sin r = \sin i'$; donc on a (par identification à (1)) $\sin i = \sin i'$ comme $i, i' \in [0, \frac{\pi}{2}]$

donc $\underline{i = i'}$

- On pourra utiliser le principe du retour inverse de la lumière pour justifier que $i = i'$.

3). Montrons que le rayon ne peut pas se refracter en J.

Soit α_c l'angle critique en J. $\sin\alpha_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{1{,}5}$

$\alpha_c \simeq 41{,}8°$

$(1) \Rightarrow \sin i = n \sin r$

$\Rightarrow \sin i = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$0 < i < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \sin i < 1$ $\qquad x \longmapsto \sin x$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

donc $0 < n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) < 1$

on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) < \frac{1}{n}$

soit $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) < \sin\alpha_c$

$\frac{\pi}{2} - \gamma < \alpha_c$

Finalement $\gamma > \frac{\pi}{2} - \alpha_c$

$\gamma > (90 - 41{,}8)$

$\boxed{\gamma > 48{,}2 > \alpha_c}$

donc reflexion totale en J.

4). Montrons qu'il ne peut y avoir de reflexion totale en K.

Calculons l'angle r'

$r' + \gamma' = \pi/2 \Rightarrow r' = \frac{\pi}{2} - \gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma$

or $\gamma > 48{,}2 \Rightarrow -\gamma < -48{,}2$

$\Rightarrow 90 - \gamma < 90 - 48{,}2$

$\Rightarrow r' < 41{,}8$

$\Rightarrow r' < \alpha_c$

Il y a donc refraction en K.

5. Calcul de la déviation D.

$$D = d_1 + d_2 \quad (\text{Voir figure}).$$

- Au point I :

$$d_1 + r = i \qquad \text{donc} \quad d_1 = i - r$$

- Considérons le triangle IKL (Voir figure) : $x + y + z = \pi$

on a : • $i' - r' + \cancel{\pi} - \gamma' - \gamma + \pi - d_2 = \cancel{\pi}$

$x = i' - r'$

$y = \pi - 2\gamma$

$z = \pi - d_2$

or $\begin{cases} i' = i \;,\; r = r' \\ \gamma' = \gamma \\ \gamma + r = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - r \end{cases}$

donc $i - r - 2\gamma + \pi - d_2 = 0$

$$d_2 = i - r - 2\gamma + \pi$$

$$d_2 = i - r - 2\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \pi$$

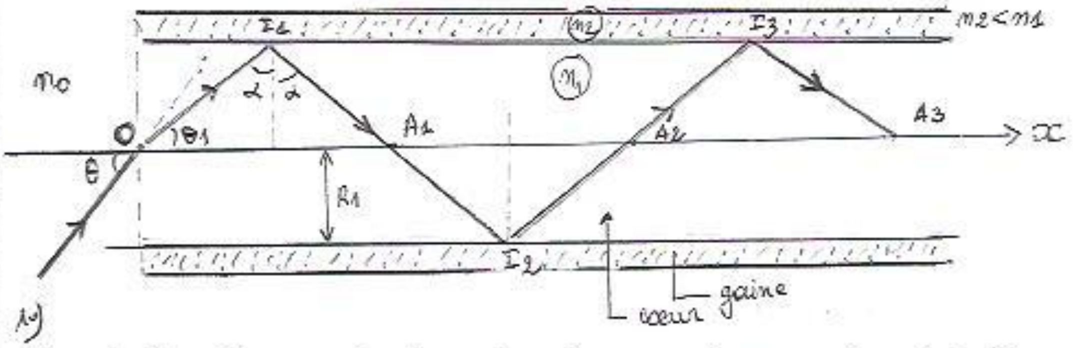
$$d_2 = i - r \cancel{-\pi} + 2r \cancel{+\pi}$$

Finalement $d_2 = i + r$

Alors $$D = d_1 + d_2 = i - r + i + r = 2i$$

$$\underline{\underline{D = 2i}}$$

Exercice 6



1)

Soit λ l'angle de refraction limite au niveau des dioptres coeur-gaine : $n_1 \sin\lambda = n_2 \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\lambda = \frac{n_2}{n_1}$

Le guidage du rayon (R) dans la fibre exige une réflexion totale de (R) sur les dioptres coeur-gaine; la condition de propagation de (R), en ligne brisée dans le coeur, s'écrit donc

$\alpha > \lambda$, soit $\cos\alpha < \cos\lambda$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) < \sqrt{1-\sin^2\lambda} \quad ; \sin\theta_1 < \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

or $n_0 \sin\theta = n_1 \sin\theta_1 \Rightarrow \frac{n_0}{n_1}\sin\theta < \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$

$\sin\theta < \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \Rightarrow \sin\theta < \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}$

On pose $\sin\theta_0 = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}$

et donc

$$\boxed{\theta < \theta_0 \; ; \text{ où } \theta_0 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}\right)}$$

AN : $\theta_0 = 15,91^\circ = 15^\circ 54'$

2) a) $[L_1] = [OI_1A_1] = 2n_1 . OI_1 = 2n_1 \cdot \frac{R_1}{\cos\alpha}$; $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \sin\theta_1 = \frac{n_0}{n_1}\sin\theta \Rightarrow [L_1] = \frac{2n_1^2 R_1}{n_0 \sin\theta}$$

b) $[L] = N[L_1]$ où N désigne le nombre de trajets correspondant à $[L_1]$: $N = \frac{\ell}{OA_1} = \frac{\ell}{2R_1 \tan\alpha}$

or $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{n_1}{n_0 \sin\theta}\right)^2$

$$\tan^2\alpha = \frac{n_1^2}{n_0^2 \sin^2\theta} - 1 = \frac{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}{n_0^2 \sin^2\theta}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}}{n_0 \sin\theta}$$

$$\Rightarrow [L] = \frac{l}{2R_1} \cdot \frac{n_0 \sin\theta}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}} \cdot \frac{2 n_1^2 R_1}{n_0 \sin\theta} \quad ; \quad \boxed{[L] = \frac{n_1^2\, l}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}}}$$

3°)

a) D'après le résultat précédent, le chemin optique suivi par (R) entre O et le détecteur est : $[L] = \dfrac{n_1^2\, x}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}}$

or d'après l'énoncé : $[L] = c\tau$

donc la durée de propagation du signal lumineux dans le coeur de la fibre est : $\tau = \dfrac{n_1^2\, x}{c\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2\theta}}$

b) $\theta = 0 \Rightarrow \tau = \tau_0 = \dfrac{n_1 x}{c}$ $\qquad \boxed{\tau_0 = \dfrac{n_1 x}{c}}$

Autre méthode de calcul de τ_0 :

Lorsque θ_0, le rayon lumineux (R) se propage selon l'axe Ox du coeur de la fibre optique. On a alors $x = v.\tau_0$ où v est la vitesse de propagation de l'onde lumineuse dans le coeur de la fibre $\left(v = \dfrac{c}{n_1}\right)$.

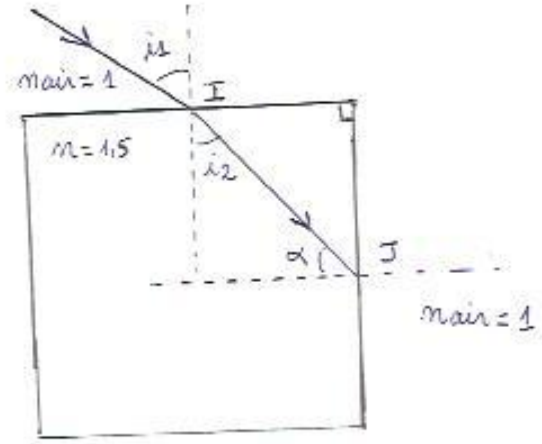
$$\Rightarrow x = \frac{c}{n_1} \cdot \tau_0 \qquad \Rightarrow \tau_0 = \frac{n_1 x}{c}$$

c)

$$\tau_0 = \frac{1{,}515 \times 2000}{3.10^8}$$

$$\boxed{\tau_0 = 10{,}1 \cdot 10^{-6}\, s = 10{,}1\ \mu s}$$

Exercice 7



La lumière émerge en J si $\alpha < \alpha_c$; α_c est l'angle critique déterminé par $\sin \alpha_c = \frac{1}{n}$ AN : $\alpha_c = 41,8°$

Au point I : $\sin i_1 = n \sin i_2$; or $\sin i_2 = \sin(\pi/2 - \alpha)$ puisque $i_2 = \pi/2 - \alpha$ Donc $\sin i_1 = n \sin(\pi/2 - \alpha)$

De plus $0 < i_1 < \pi/2 \Rightarrow 0 < \sin i_1 < 1$

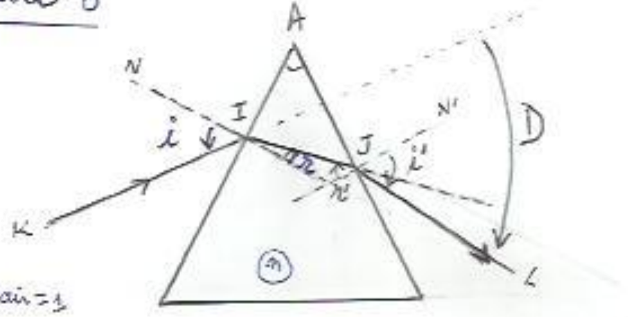
Donc $0 < n \sin(\pi/2 - \alpha) < 1 \Rightarrow \sin(\pi/2 - \alpha) < \frac{1}{n}$

soit $\sin(\pi/2 - \alpha) < \sin \alpha_c \Rightarrow \pi/2 - \alpha < \alpha_c$

$\Rightarrow \alpha > \pi/2 - \alpha_c$ AN : $\alpha > 48,2°$

Au point J, il y a donc reflexion totale.

Exercice 8



1) Définitions des angles i, i', r, r' (voir figure)

Soit (IN) la normale au point d'incidence I et (JN') la normale au point d'émergence J.

$i = (\widehat{IN, IK})$; $r = (\widehat{NI, IJ})$; $r' = (\widehat{N'J, JI})$; $i' = (\widehat{N'J, JL})$

Par convention ces angles sont positifs.

2) Relations entre les angles : $\sin i = n \sin r$
$n \sin r' = \sin i'$

3) Relation liant A et, r et r' : $A + (90° - r) + (90° - r') = 180°$

$$A = r + r'$$

4) Expression de la déviation : $D = (i - r) + (i' - r')$
$= i + i' - (r + r')$
$= i + i' - A$

$$D = i + i' - A$$

Le rayon ne sort pas nécessairement du prisme en J. Il émerge que si r' est inférieur à l'angle limite α_c défini par

$n \sin \alpha_c = 1 . \sin \pi/2 \Rightarrow n \sin \alpha_c = 1 \Rightarrow \sin \alpha_c = \frac{1}{n}$.

Ainsi on doit avoir : $-\alpha_c \leq r' \leq +\alpha_c$, or $A = r + r' \Rightarrow r' = A - r$

$$-\alpha_c \leq A - r \leq +\alpha_c$$

$$r - \alpha_c \leq A \leq \alpha_c + r$$

or la valeur maximum de r est α_c ; à la limite on a donc

$$0 \leq A \leq 2\alpha_c$$

$$0 \leq \frac{A}{2} \leq \alpha_c$$

Soit $\frac{A}{2} \leq \alpha_c \Rightarrow$

$\sin\left(\frac{A}{2}\right) \leq \sin \alpha_c$

$\sin\left(\frac{A}{2}\right) \leq \frac{1}{n}$

En conclusion, le rayon sort en J que si

$$\boxed{\sin\left(\frac{A}{2}\right) \leq \frac{1}{n}}$$

5°) Calcul de la déviation D

$D = i + i' - A$

Pour calculer D, il faut déterminer i'

. $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n}$

AN : $\sin r = 0{,}333 \Rightarrow r = 19{,}47°$

. $A = r + r' \Rightarrow r' = A - r$

$r' = 60 - 19{,}47$

$r' = 40{,}53°$

. $n \sin r' = \sin i'$

AN : $\sin i' = 1{,}5 \sin 40{,}53$

$\sin i' = 0{,}975 \Rightarrow i' = 77{,}1°$

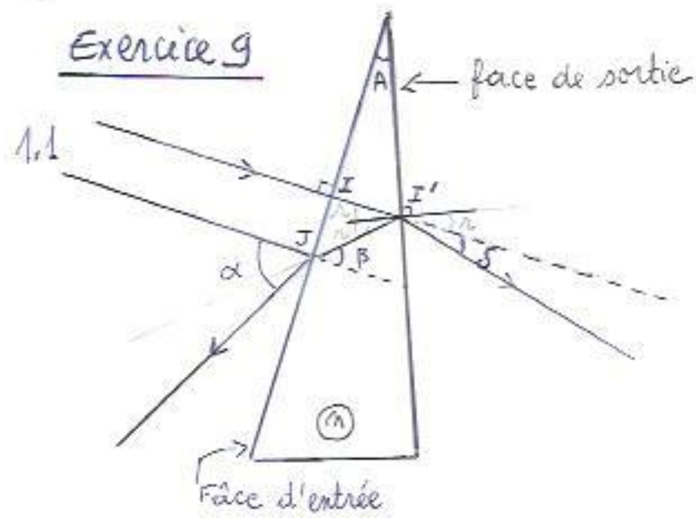
D'où $D = i + i' - A$

$= 30 + 77{,}1 - 6$

$\underline{D = 47{,}1°}$

Exercice 9

1.1



Soit r l'angle d'incidence en I'

Au point J, l'angle d'incidence est $\beta = 2r$

(angles alternes - internes)

1.2. Expressions de n et A en fonction de δ et α

On a sur le schéma au point I' : $n \sin r = \sin(r+\delta)$ (1)

au point J : $n \sin(2r) = \sin \alpha$ (2)

or $A = r$ (angles à côtés perpendiculaires) ou encore

dans le triangle AII' : $A + \pi/2 + (\pi/2 - r) = \pi \Rightarrow A = r$.

(1) devient $n \sin A = \sin(A+\delta)$ et (2) devient $n \sin 2A = \sin\alpha$

Les angles A, δ et α étant petits, on a : $\begin{cases} nA = A+\delta \\ n\,2A \simeq \alpha \end{cases}$

Soit deux équations à deux inconnues A et n dont la résolution donne $\boxed{A \simeq \dfrac{\alpha}{2} - \delta}$ et $\boxed{n \simeq \dfrac{\alpha}{\alpha - 2\delta}} = \dfrac{1}{1 - 2\frac{\delta}{\alpha}}$

A.N : $\underline{A \simeq 2°}$ $\underline{n \simeq 1,625}$

1.3. Valeur de A pour l'émergence effective du rayon réfléchi

Le rayon $(I'J)$ émerge si et seulement si $\beta = 2r$ est inférieur à l'angle limite du dioptre $(n, 1)$; soit $2r < \lambda \ell$; de plus $A = r$

L'angle limite $\lambda\ell$ est tel que $\sin \lambda\ell = \frac{1}{n}$

$2r < \lambda\ell \Leftrightarrow 2A < \lambda\ell \Leftrightarrow \sin(2A) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2A < \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow A < \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$. Le rayon émergera de la face d'entrée si $A < \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$. AN : $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right) \simeq 38°$

Il y a émergence effective du rayon refléchi si

$A < 19°$