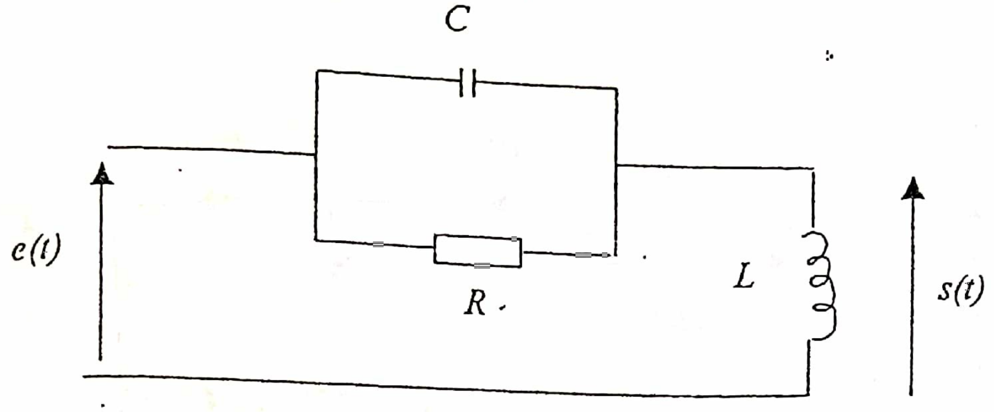
Exercice n°1

Un circuit RLC est représenté par le schéma suivant :



1°) Représenter ce circuit sous de schéma bloc tout en précisant les différentes fonctions de transfert.
2°) Donner la valeur du coefficient d'amortissement m et celle de la pulsation propre ω_0
3°) Quelle est la pulsation propre ω_0 en fonction de R , L ,C sachant qu' il y a amortissement critique ?
4°) Si e(t)=2V quelle sera la réponse de ce système à cette sollicitation si $\frac{L}{R}=2$ et $LC=1$?

Exercice n°2

Soit un circuit LC (voir fig.)

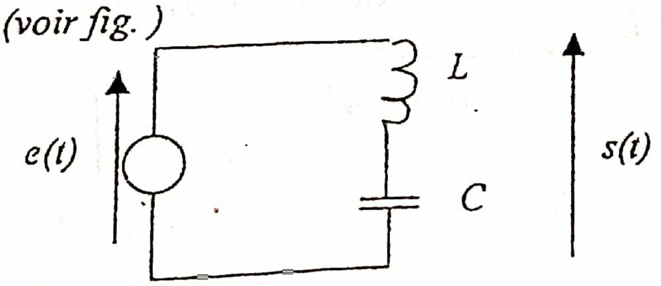


Fig.

Ce circuit est alimenté par une source sinusoïdale telle que $e(t)=\sin\omega t$.
1°) Exprimer s(t) en fonction de u(t) où u(t) désigne la tension aux bornes du condensateur C.
2°) Etablir une relation différentielle entre e(t) et u(t).
3°) Trouver la fonction de transfert $H(P)=\frac{U(P)}{E(P)}$ et déduire G(P)
4°) Représenter ce circuit par un schéma bloc
5°) Quelle la période T de la tension d'alimentation sachant qu'il y a résonance.

Exercice n°3

Un moteur à courant alternatif a un circuit statorique assimilable à un ci...
la résistance R du réseau d'alimentation.

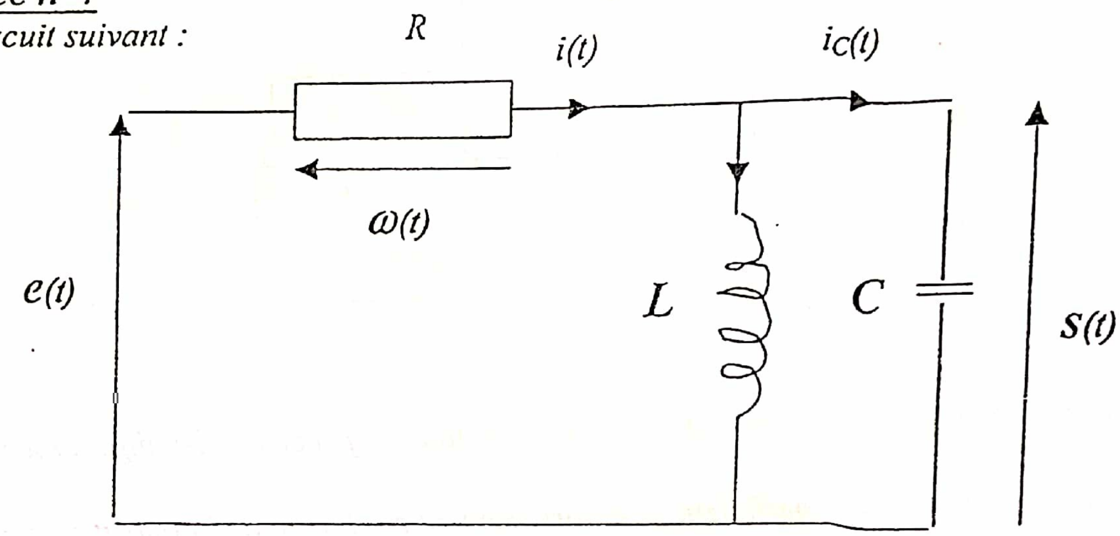
1°) Faire un schéma de ce circuit

2°) Faire un schéma bloc de ce circuit en précisant les différentes fonctions de transfert.

3°) Quelle est la constante de temps de ce circuit.

Exercice n°4

On le circuit suivant :



1°) Donner les expressions en t liant:

1-1°) s(t) à e(t) et ω(t)

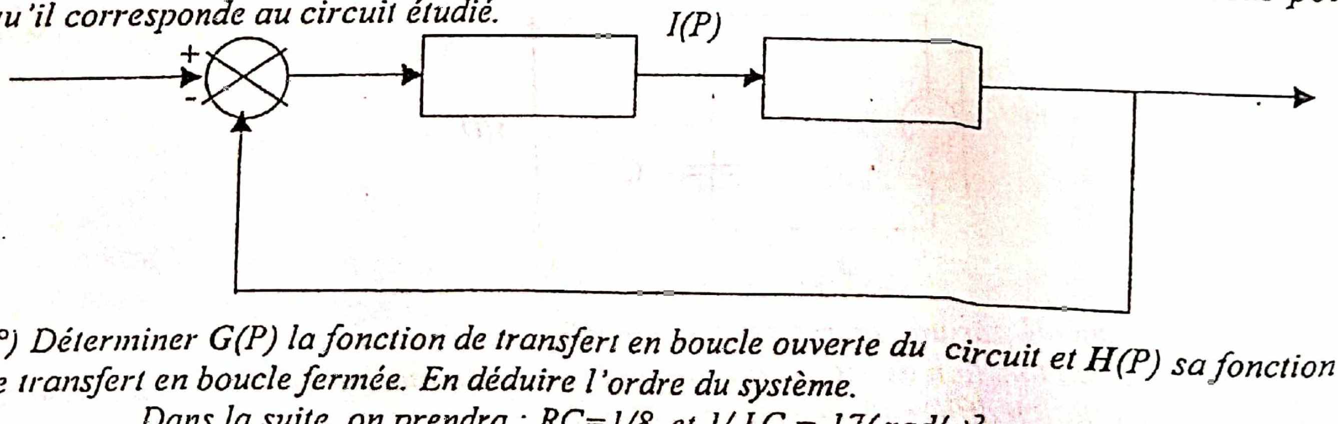
1-2°) ω(t) à i(t)

2°) En déduire les expressions en P des deux relations précédentes

3°) Déterminer Z, l'impédance complexe équivalente de L // C.

En posant $P=j\omega$ et $P^2 = -\omega^2$; déterminer l'expression de S(P) en fonction de I(P)

4°) A partir des relations en P obtenues, compléter le schéma fonctionnel ci-dessous pour qu'il corresponde au circuit étudié.



5°) Déterminer G(P) la fonction de transfert en boucle ouverte du circuit et H(P) sa fonction de transfert en boucle fermée. En déduire l'ordre du système.

Dans la suite, on prendra : $RC=1/8$ et $1/LC = 17(rad/s)^2$.

6°) Donner l'expression de la réponse s(t) du système à une entrée impulsion unitaire.

7°) Déterminer la valeur finale de ω(t) pour une entrée e(t) échelon unitaire.

Exercice n°5

Lorsqu'on applique une force y de 8,9N au système mécanique représenté (Fig.1)
La courbe x(t) de la (Fig.2) décrit le mouvement de la masse M

1°) Etablir la fonction de transfert $\frac{X(P)}{Y(P)}$

2°) Quelle est de la fonction x(t) ?

3°) Déterminer la masse M, le coefficient de frottement visqueux f et le coefficient d'élasticité k du ressort à partir de la courbe voir (Fig.2)

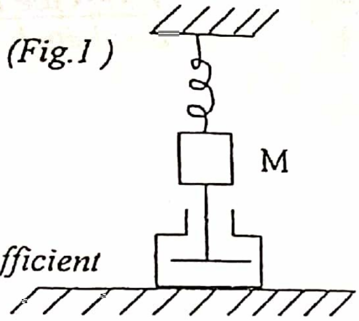


Fig.1

4°) Déterminer le coefficient d'amortissement m et la pulsation propre ω_0

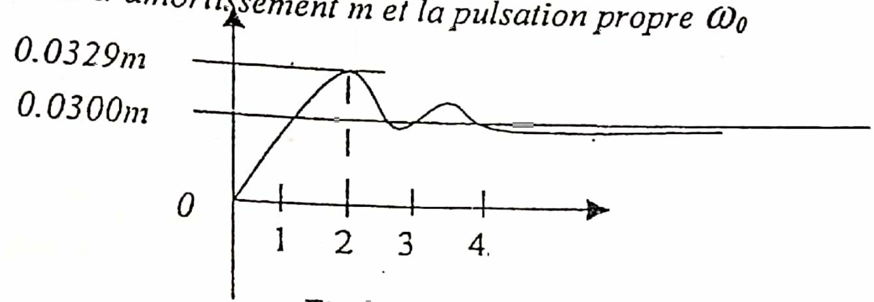
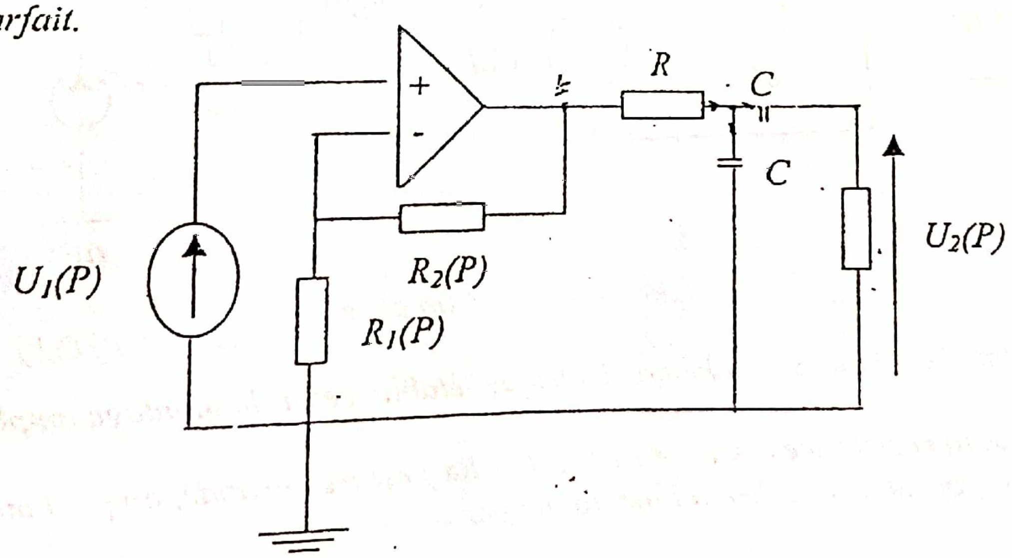


Fig.2

5°) Quelle est la nouvelle valeur de ω_0 pour qu'il y ait amortissement critique ?

Exercice n°6

Soit un montage électronique schématisé dans lequel l'amplificateur pourra être considé·é comme parfait.



1°) Calculer la fonction de transfert du montage G(P) et la mettre sous la forme

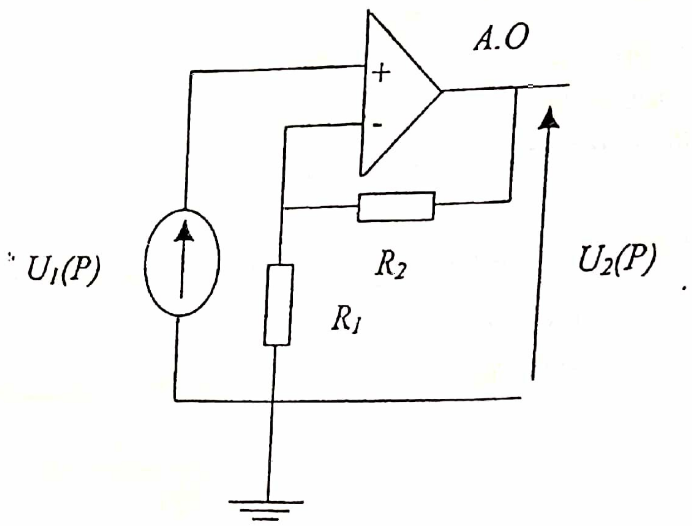
$$G(P)=\frac{U_2(P)}{U_1(P)}=K\frac{\frac{P}{\omega_0}}{1+2m\frac{P}{\omega_0}+\frac{P^2}{\omega_0^2}}$$

pour $RC=10^{-3}s$ et $R_2=9R_1$

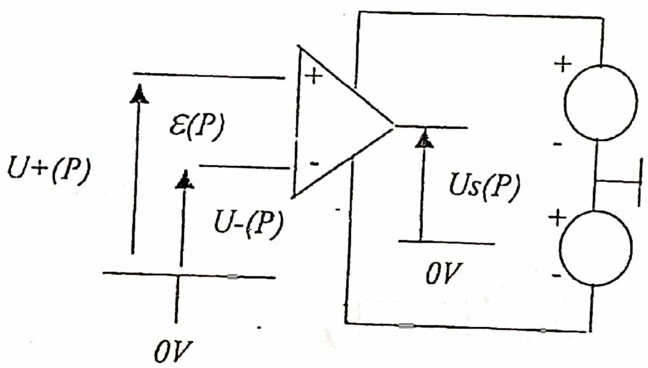
2°) Calculer m et ω_0

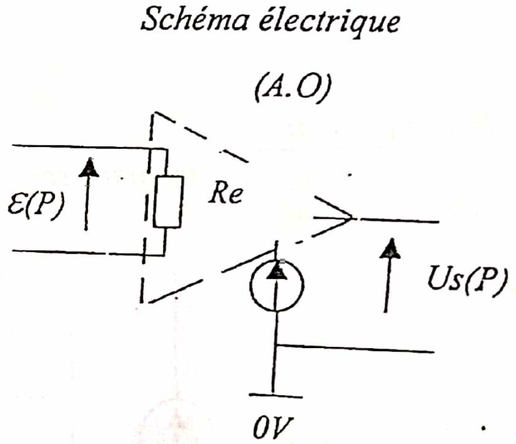
Exercice n°7

Soit l'étude du montage amplificateur donné autour d'un amplificateur opérationnel (AO)



L'amplificateur opérationnel nécessite pour son alimentation en énergie deux générateurs de tensions continues comme le montre le schéma suivant.

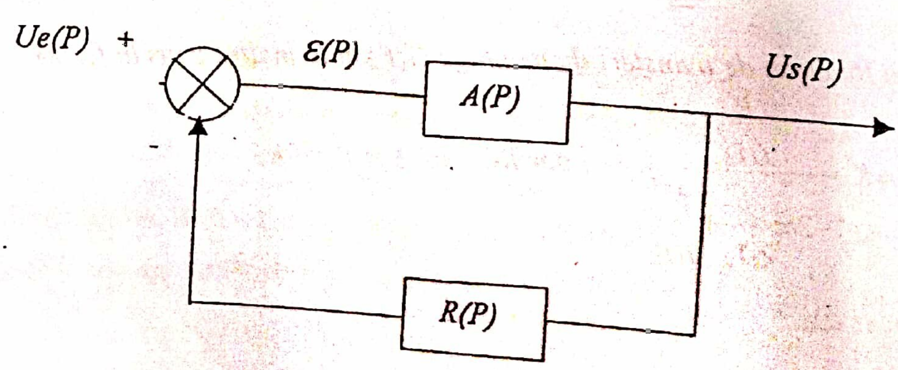




on pose $Us(P) = A(P)\,\mathcal{E}(P)$

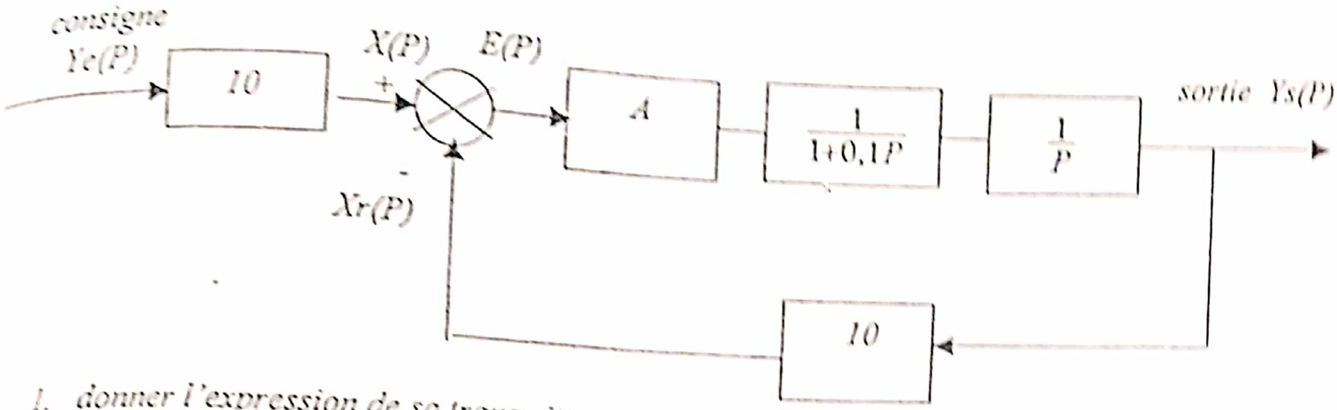
1°) En remplaçant l'A .O par son schéma électrique, établir celui du montage amplificateur non inverseur.

2°) Montrer que si la résistance d'entrée de l'A .O (Re) est très grande, on peut matérialiser le montage sous la forme d'un schéma bloc donné par



Exercice n°8

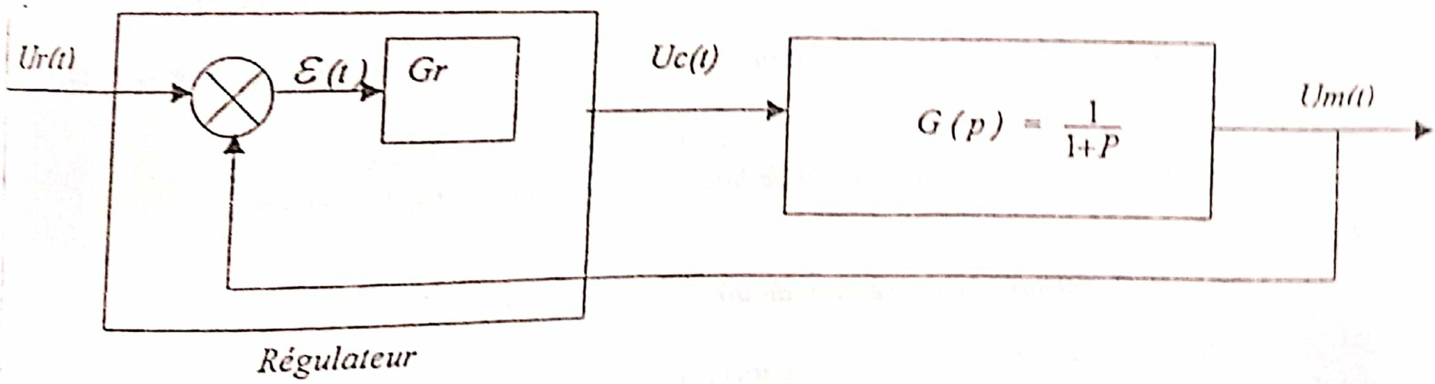
On étudie le système bouclé suivant dans lequel A est un coefficient d'amplification réglable :



1. *donner l'expression de sa transmittance en boucle ouverte T(p) en fonction de A et des constantes du dispositif.*
2. *calculer ensuite la transmittance en boucle fermée* $T(P)=\frac{Y(P)}{Ye(P)}$
3. *Exprimer , en fonction de A , la pulsation propre* W_o *et l'amortissement du système de transmittance T (p) .*

Exercice n°9

Soit un asservissement représenté par le schéma fonctionnel de la figure ci- dessous . On désigne par G (p) par la transmittance du processus à contrôler et Gr le gain du régulateur



1. Déterminer l'expression des fonctions de transfert en boucle fermée sur la grandeur de réglage Uc (t) et sur la sortie réglée Um (t) .

2 . Calculer le gain Gr du régulateur pour avoir une constante de temps en boucle fermée : $\tau = 0.1s$.

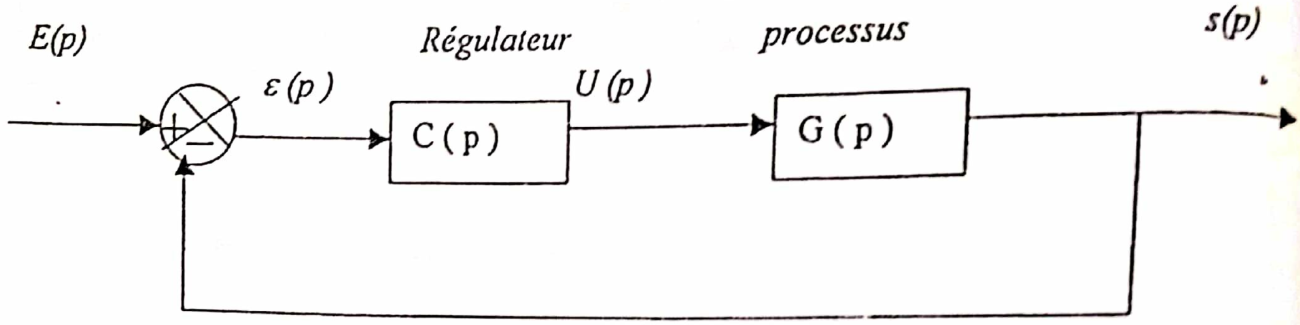
3. On choisit Gr = 9 . tracer le schéma fonctionnel équivalent de l'asservissement (utiliser les valeurs des transmittance calculées.).

Exercice n°10

Un processus physique est modélisé par une fonction de transfert du premier ordre :

$$G(P)=\frac{G_0}{1+\tau P} \qquad \text{avec } \tau = 1s \text{ et } G_0 = 1.$$

Ce processus est inséré dans une boucle d'asservissement contenant un régulateur proportionnel : $C(p) = K$.



Les variables $e(t)$, $\varepsilon(t)$, $u(t)$, et $s(t)$ sont des tensions « images « des grandeurs physiques correspondantes .

1. a . Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)} \text{ et la mettre sous la forme suivante : } H(p)=\frac{H_0}{1+\tau_{BF}p}$$

Exprimer H_o et τ_{BF} en fonction de τ, G_0 et K

b. Calculer les valeurs de la constante de temps en boucle fermée τ_{BF} et du gain statique H_o pour $K = 10$

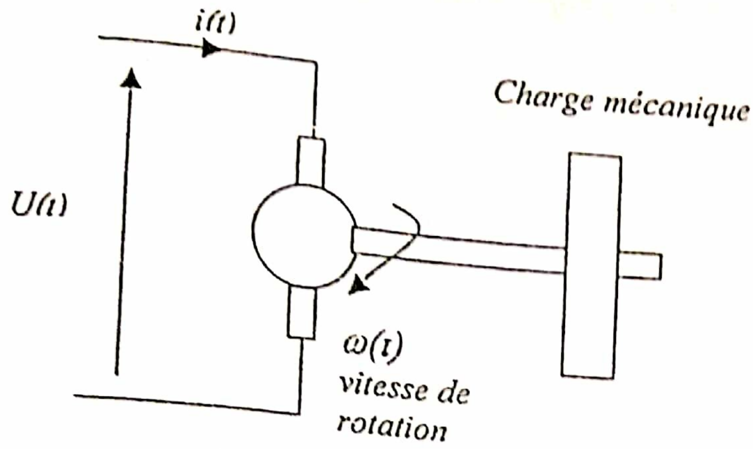
c. Etablir l'expression de la grandeur de commande $U(p)$ en fonction de $E(p)$, K_0, G_0 et τ.

2. On applique à l'entrée un échelon d'amplitude unité : $E = 1\ V$ et on règle le correcteur avec $K = 10$
   a. On se place en régime permanent , calculer les valeurs de la sortie $S(+ :)$ et de la commande $u(+ :)$
   b. A l'aide du théorème de la valeur initiale , calculer $u(o)$.
   c. Déterminer l'expression de $S(t)$ et la représenter graphiquement .
   d. Déterminer l'expression de $u(t)$ et la représenter graphiquement .

3. En fait la grandeur de commande $u(t)$ est limitée par les tensions de saturation suivantes : $6Usat = 65\ v$
   a. Représenter la caractéristique de transfert statique $u(\varepsilon)$ pour $K = 10$.
   b. Déterminer la valeur limite , Kmax , du régulateur pour éviter une saturation de la grandeur de commande lorsque la consigne est un échelon d'amplitude unité.

Exercice n°11

Considérons un moteur à courant continu



:e moteur a les caractéristiques suivantes :

- excitation : aimant permanent
- point nominal de fonctionnement : $10V \longrightarrow 1000$ tours / mm
- moment d'inertie des parties tournantes : $J=10^{-3} Kg\, m^2$
- équations du moteur en fonctionnement linéaire :

  $e(t)=k\omega(t)$ où $e(t)$ est la force électromotrice induite

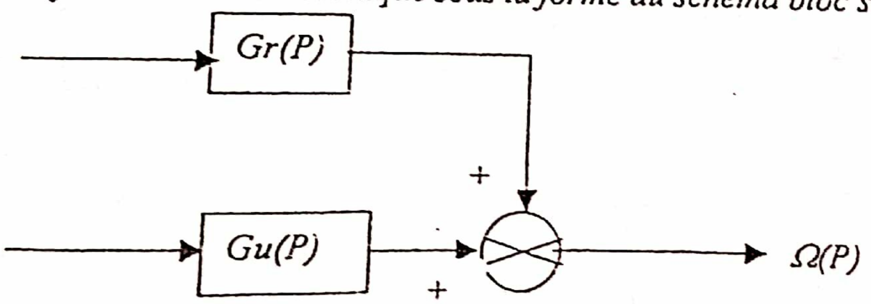
  $c_m(t)=ki(t)$ où $c_m(t)$ est le couple moteur
- résistance de l'induit : $R=4{,}5\Omega$ on néglige l'inductance d'induit.

!°) Calculer la valeur de la constante caractéristique du moteur k en (Vs) / rd.

2°) Faire le schéma électrique de l'induit de ce moteur et l'équation relative à son induit.

°) La charge mécanique produit un couple résistant, $c_r(t)$, sur l'arbre moteur du moteur. Ecrire l'équation relative aux parties tournantes.

a°) Mettre le système électromécanique sous la forme du schéma bloc suivant :



Déterminer dans ce cas les expressions Gr(P) et Gu(P) et les mettre sous la forme
ntes :

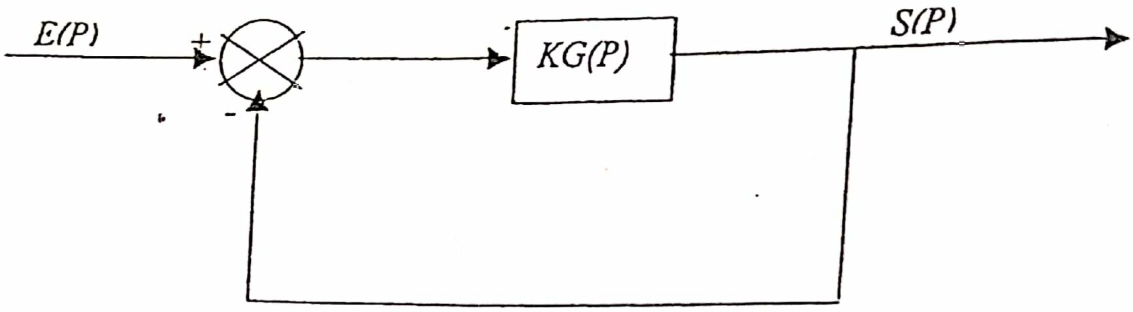
$$G_r(P)=\frac{G_1}{1+\tau_m P} \qquad G_u(P)=\frac{G_0}{1+\tau_m P}$$

onner les expressions de τ_m, G_0 et G_1

Chapitre III : Les propriétés caractéristiques et les problèmes

Exercice n°1

On considère le système asservi ci-dessous :



$$KG(P)=\frac{K}{P(1+P)(1+0,1P)} \qquad \text{où } K>0$$

1°) Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée F(P).

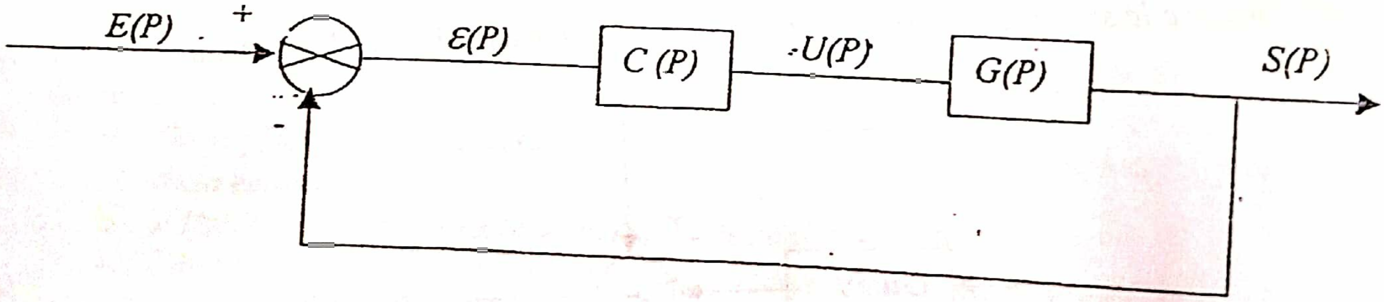
2°) En utilisant le critère de Routh, déterminer les valeurs de K pour lesquelles le système est stable en boucle fermée

3°) Pour quelle valeur de K=Kc, le système en boucle fermée est il à la limite de la stabilité ? En déduire dans ce cas, la valeur de la pulsation.

4°) On donne K=10 , tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de KG(P)

Exercice n°2

Un système industriel de fabrication de lait est symbolisé par :



1°) On donne $C(P)=(1+\frac{1}{\tau_i P})K$ et $G(P)=\frac{G_0}{1+\tau P}$

On applique au système une consigne de type indicielle et on règle le correcteur tel que $\tau_i=\tau$
Quelle est la fonction de transfert du système asservi ?

2°) Donner l'expression de U(P) en fonction de G_0, τ et K

3°) L'erreur constatée est $\varepsilon=\frac{1}{4}$ et le processus est maintenant régit par la fonction de transfert $G(P)=\frac{K}{D(P)}$ avec D(P) l'équation caractéristique du processus.

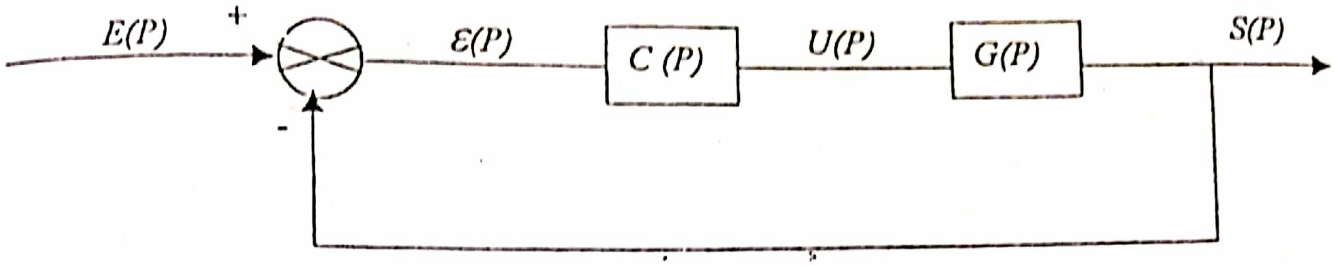
On donne C(P)=6 ; m=7,5 et ω_0=1 rad/s

Trouver :

- a°) La valeur de K pour que l'erreur constatée soit maintenue pour une précision convenable
- b°) Quelle est la réponse du système asservi , en réponse à une sollicitation indicielle ?

Exercice n°3

Le schéma fonctionnel d'un système asservi est donné par :



On donne $C(P)=2P$; $G(P)=\dfrac{K}{P(P+3)}$

1°) Quelle est l'expression U(p) en fonction de K et de E(P) ?

2°) On veut déterminer K. Pour cela, on a montré qu'une expression équivalente à

$C(P)G(P)=\dfrac{12}{2P+6}$

- a°) Déterminer K et en déduire U(P).
- b°) Quelle est la fonction de transfert du système asservi.

3°) Pour connaître le comportement du système, on applique deux types de consigne de manière suivante :

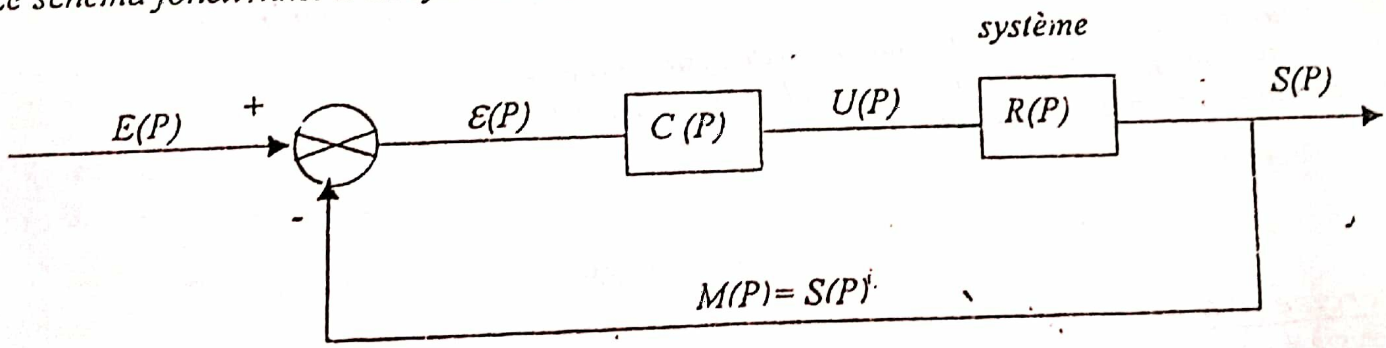
- Un échelon d'amplitude 2 S.I
- Une rampe d'amplitude 2 S.I

Quelle est la consigne que le système supporte-t-il ?

4°) Donner la réponse du système de la consigne supportée.

Exercice n°4

Le schéma fonctionnel d'un système asservi est donné ci-dessous



°) Lorsque $C(P)=\dfrac{1}{P+2}$, la sortie du système et l'entrée sont reliées par l'équation ifférentielle :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}+6\frac{ds(t)}{dt}+10s(t)=2e(t)$$

1°) Déterminer la fonction de transfert H(P) du système

2°) En déduire l'expression de R(P)

3°) Déterminer la réponse indicielle du système de fonction de transfert R(P)

4°) En déduire le temps de réponse à 5% du système non asservi R(P).

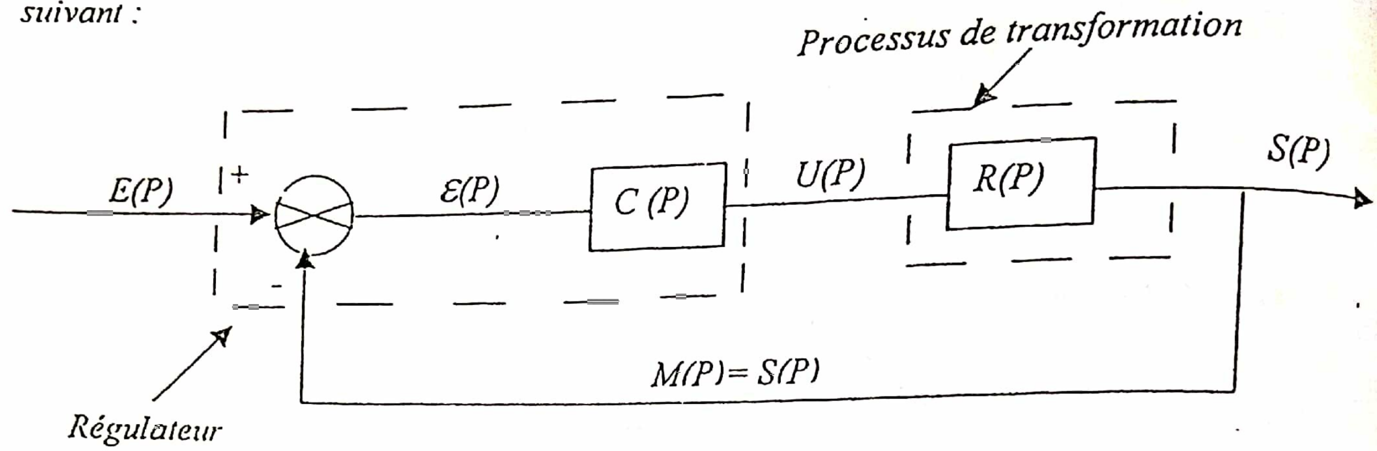
) $C(P)=10$

1°) Déterminer le temps de réponse à 5% du système asservi.

2°) Calculer l'erreur stationnaire de position et l'erreur de vitesse.

Exercice n°5

Un système industriel de transformation de pétrole est modélisé par le schéma fonctionnelle suivant :



Le processus de transformation est commandé par un automate programmable ayant une fonction P I D utilisé pour assurer la régulation du processus de transformation.
Le signal sortant de cet automate est une équation intégro-différentielle

$u(t)=5\varepsilon(t)+6\int\varepsilon(t)dt+\frac{d\varepsilon}{dt}$

L'ingénieur chargé de la programmation doit trouver la fonction de transfert du régulateur C(P).

1°) Trouver C(P) fonction de transfert du régulateur

2°) On donne $G(P)=\frac{6\alpha P}{P^3+7P^2+16P+12}$ *fonction de transfert du processus.*

a°) Déterminer le gain statique du processus de transformation régulé pour que l'erreur constaté diminue jusqu'à $15\ 10^{-2}$ *si la tension qui alimente l'automate programmable est 12 volts.*

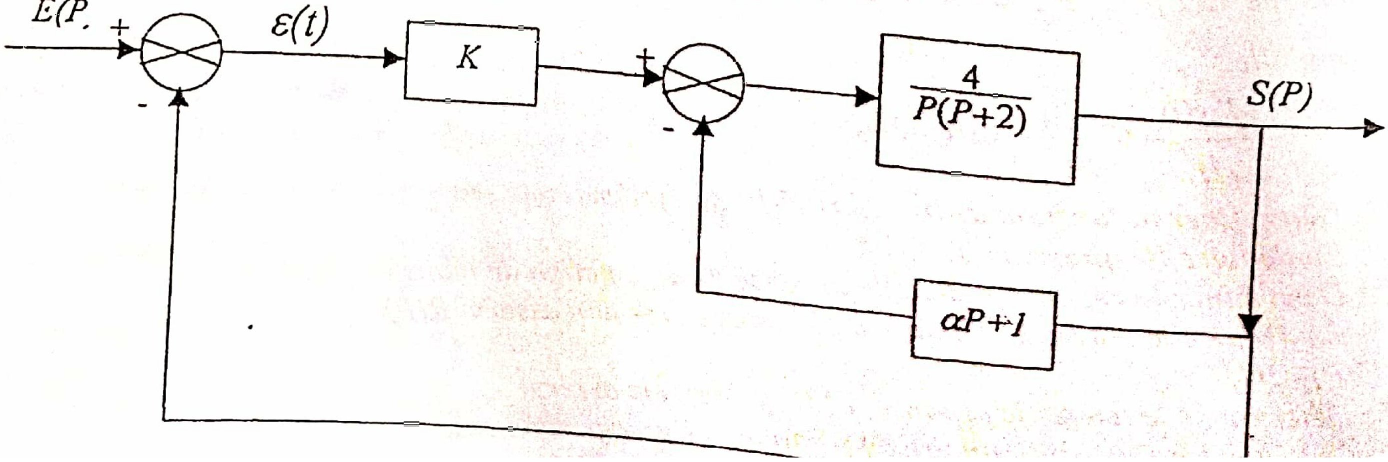
b°) Trouver le temps de stabilisation à 7% du système réguler.

c°) Ce système peut il supporter un signal de type rampe ?

3°) Etudier la stabilité du système régulé.

Exercice n°6

Un système est défini par le schéma fonctionnel suivant :



1. Dans cette première partie, on considère que $K=2$ et $\alpha=0$

1.1 Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H(P)$

1.2 Calculer la valeur de la pulsation propre ω_0 et m le facteur d'amortissement du système en boucle fermée.

1.3 Pour une entrée échelon unitaire, calculer la période des oscillations transitoires, le premier dépassement et l'erreur permanente de position.

2. On suppose à présent que $K=3$ et $\alpha \neq 0$ ($\alpha > 0$)

2.1 Déterminer la nouvelle fonction de transfert $H'(P)$.

2.2 Pour quelle(s) de α le système est il stable ?

2.3 Pour quelle valeur de $\alpha=\alpha_1$ le régime est il apériodique critique ?

2.4 Déterminer pour $\alpha=\alpha_1$, l'expression de $s(t)$ à une entrée échelon unitaire.

2.5 Déterminer pour $\alpha=\alpha_1$, l'erreur permanente de position.

Exercice n°7

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un système à retour unitaire de contrôle de température pour expression :

$$G(P)=\frac{40}{(2P+1)(0,5P+1)}$$

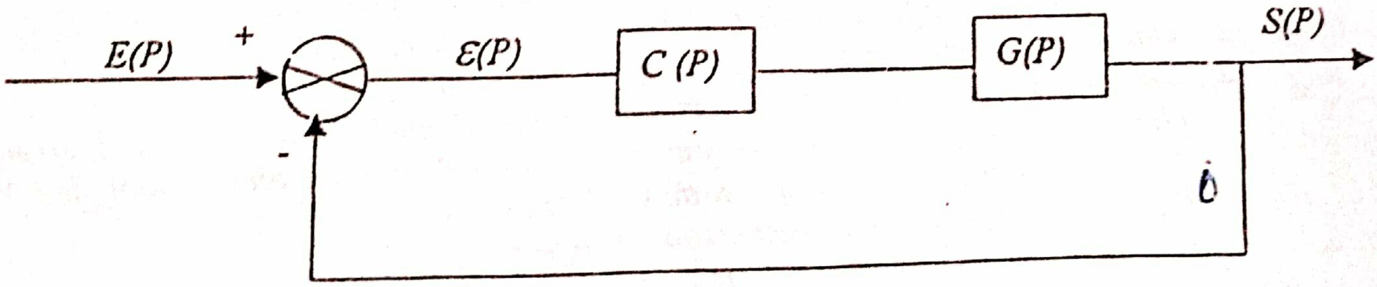
1. Déterminer l'erreur statique de position pour une entrée échelon unitaire
2. Ce système est il stable en boucle fermée ? si oui, déterminer sa marge de phase.
3. Pour améliorer les performances du système, on introduit un correcteur série $C(P)$ dans la chaîne directe comme l'indique le schéma ci-dessous. La fonction de transfert de ce correcteur est $C(P)=8(P+0,5)$.

3.1 Montrer que la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est du premier du 1^er ordre . Déterminer sa constante de temps.

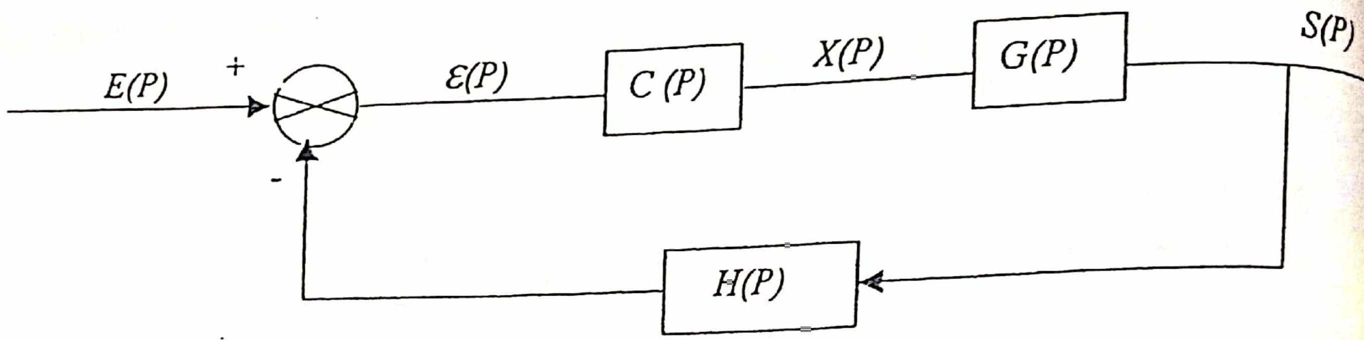
3.2 Déterminer la nouvelle erreur statique de position.

3.3 Le système corrigé est il stable en boucle fermée ? Si oui, déterminer sa marge de phase.

3.4 Quelles sont les améliorations apportées par ce correcteur



Exercice n°8 √



$G(P)=\frac{1}{P(P+1)}$ $\qquad E(P)=\frac{2}{P+2}$ $\qquad H(P)=K$

K est un nombre réel.

1. Pour quelles valeurs de K le système est il stable ?
2. Donner toutes les racines de l'équation caractéristique pour K=3. Le système est il stable ?
3. Représenter la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan de Nyquist pour K=1 et en déduire la marge de gain et la marge de phase.

Exercice n°9

Le système est constitué par un moteur et un tapis roulant. L'ensemble est un système linéaire asservi qui se déplace à une vitesse angulaire $\omega_0=10$ rad/s.

Le concepteur de ce système précise que le coefficient d'amortissement m est tel que $\frac{2m}{\omega_0}=1$.

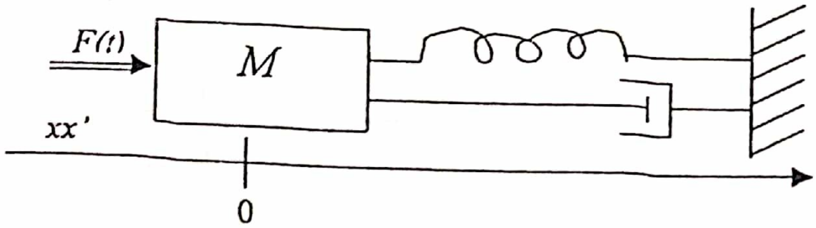
Le gain statique du système asservi est (1/2

On demande de :

1. a°) Déterminer la fonction de transfert H(P) du système asservi
   b°) Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte G(P)
2. Donner le schéma fonctionnel du système mécanique
3. On introduit dans la boucle un correcteur proportionnel d'amplitude K_0. L'erreur effectuée par le système asservi vaut maintenant 1/8 pour une alimentation de 6 V.
   a°) Déterminer le gain statique K du système asservi
   b°) Peut il supporter une alimentation de type rampe ?
   c°) Etudier la stabilité du système asservi

Exercice n°10

Soit une masse M, attachée à un ressort. La masse est soumise à un effort dans la direction xx'. Le mouvement de M est amorti par un amortisseur à frottement visqueux. Voir schéma suivant :



$x(t)$: déplacement de la masse

f : coefficient de frottement visqueux

K : raideur du ressort

$F(t)$: effort qui déplace la masse M

1°) Trouver la fonction de transfert $\dfrac{X(P)}{F(P)} = H(P)$

2°) Trouver le coefficient d'amortissement m et la pulsation propre ω_0. Le système est il amorti ? justifiez votre réponse.

3°) Quelle est la pulsation ω à la résonance sachant que $F(t)=1$ V et le système oscillation ?

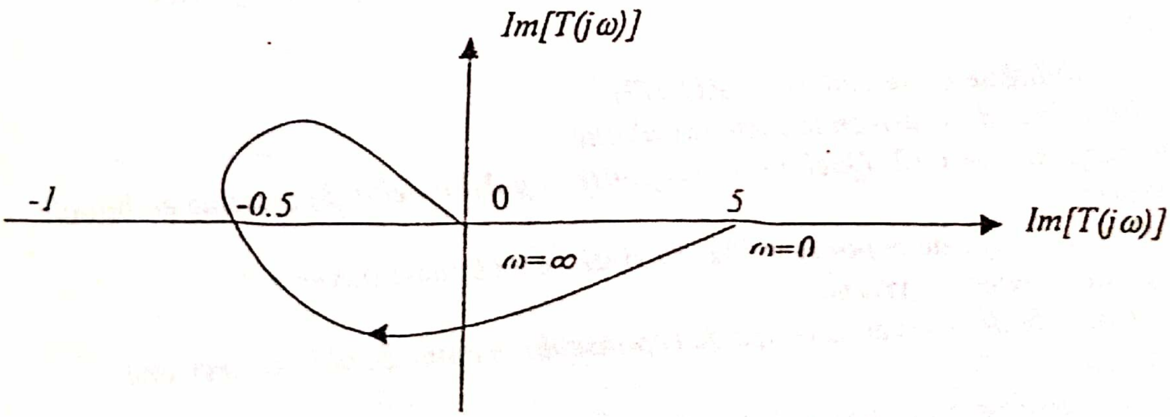
Exercice n°11

Soit la masse M en rotation autour d'un axe. Cette masse est soumise à un couple moteur $C_m(t)$ et une force de frottement $f\dfrac{d\theta}{dt}$. Il y a un ressort en spiral de raideur K développe une force $K\theta(t)$.

Quelle est l'équation différentielle liant l'entrée et la sortie. Déterminer donc la fonction de transfert.

Exercice n°12

Un asservissement à retour unitaire est caractérisé par sa fonction de transfert en boucle ouverte $T(P)$ dont le diagramme de Nyquist est représenté par la fig. ci-dessous

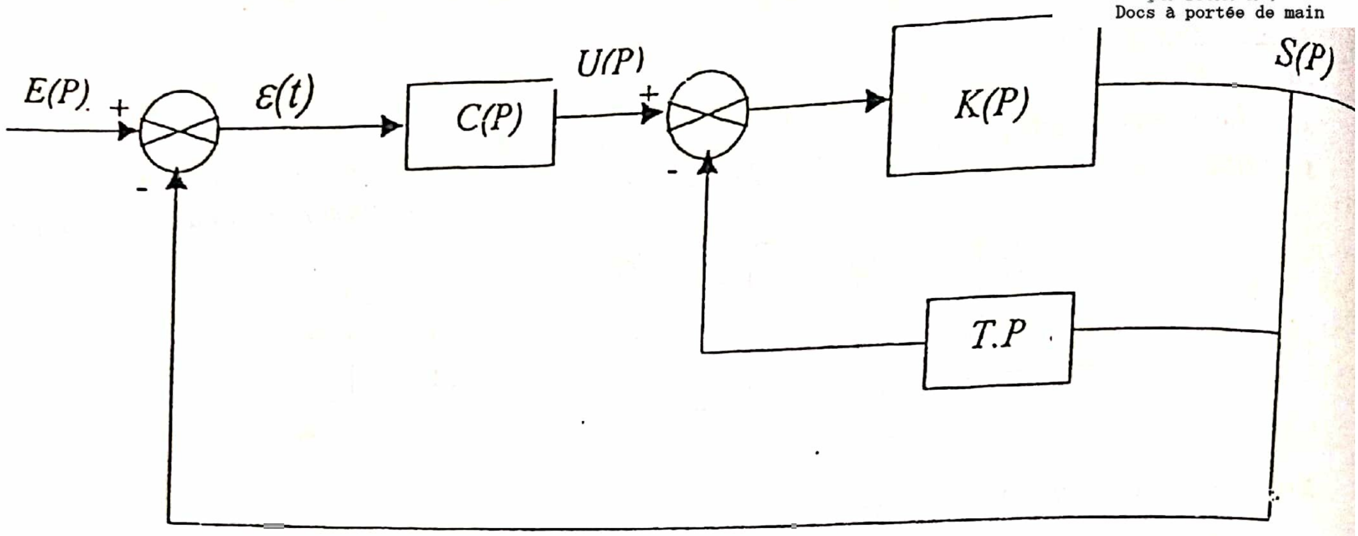


°) Que vaut le gain statique T_0 du système en boucle fermée ?

°) Le système est il stable ? justifier votre réponse.

II

a fonction de transfert de l'asservissement étant $K(P)=\dfrac{5}{P+1}$. On réalise le montage suivant :



Avec $C(P)=\frac{1}{P}$, *T est une constante et P la variable de Laplace.*

1.°) Donner l'expression de la fonction $G(P)=\frac{S(P)}{U(P)}$.

2.°) Tracer le diagramme de BODE de G(P). En déduire la valeur de ω *pour que le module de* $G(j\omega)$ *soit égal à* $-3dB$.

3.°) Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $F(P)=\frac{S(P)}{E(P)}$. *En déduire l'équation caractéristique du système.*

4.°) Etudier la stabilité du système en utilisant le critère de ROUTH.

5.°) Pour $T=\frac{1}{5}$. *Donner l'expression de s(t) , la réponse du système à un échelon d'amplitude unité . La mettre sous la forme* $s(t)=A\,[1-B\sin(\omega_p t+\theta)]$. *En déduire les valeurs de A , B ,* ω_p *et* θ.

Exercice n°13

La fonction de transfert d'un système en boucle ouverte est donner par F(P). Avec

$F(P)=\frac{1}{P(P+x)}$

1°) Etudier la stabilité selon le critère de ROUTH

2°) Pour quelle valeur de x a-t-on la juste instabilité ?

3°) a.°) On suppose que x=2. Quelle est la réponse impulsionnelle du système en boucle ouverte ?

b°) Quel est le temps de réponse à 5% du système en boucle ouverte ?

4°) On boucle maintenant le système.

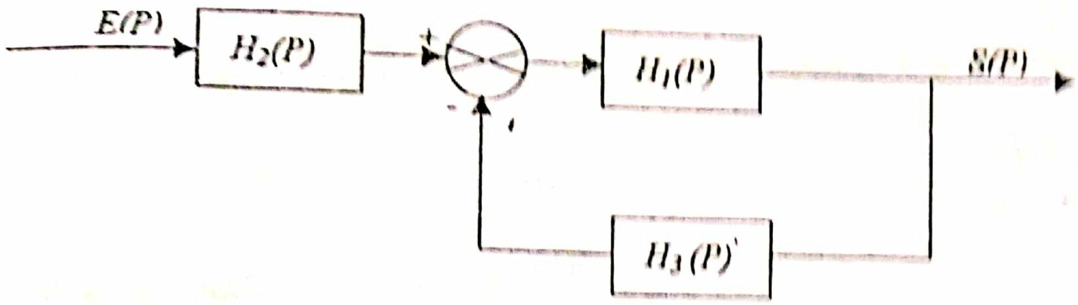
a°) On demande de trouver le temps de réponse du système bouclé et tirer une conclusion.

b°) On veut améliorer la vitesse de réaction du système bouclé. Quel type de correcteur faut il utiliser ?

c°) Quelle précaution faut il prendre dans l'utilisation du correcteur choisi ?

Exercice n°14

Soit le système dont le schéma fonctionnel est le suivant :



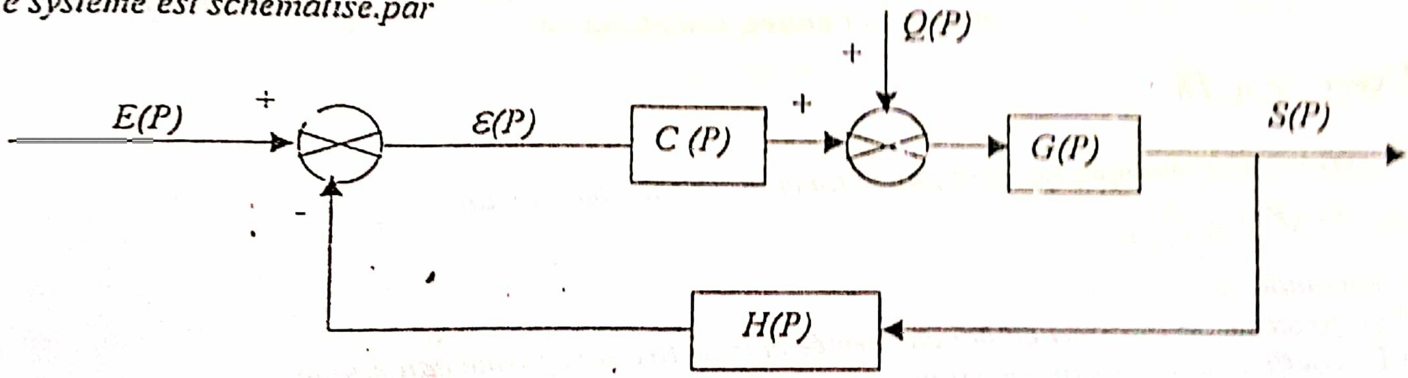
Avec $H_2(P)=\frac{5}{(1+10P)(1+5P)}$ $H_3(P)=\frac{1}{1+0,1P}$ $H_1(P)=\frac{15}{P(1+P)}$

On suppose que e(t) est un échelon unité. Que vaut la valeur finale de s(t) ?

Exercice n°15

Un système industriel commandé par un échelon unité d'amplitude 24V, se trouve dans un milieu où il subit de la part de ce milieu des perturbations équivalentes à 12 S.I.

Ce système est schématisé par



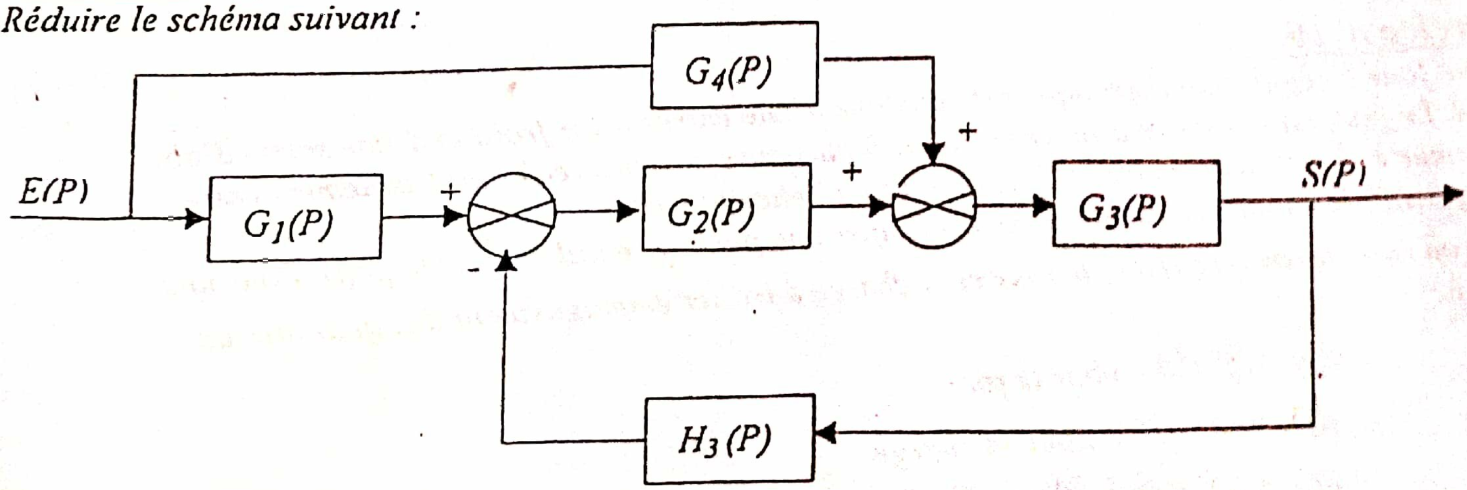
$C(P)=\frac{0,25}{2+P}$ $G(P)=\frac{1}{1+2P}$ $H(P)=\frac{1}{1+P}$

a°) Quelle est la valeur finale s(t) du système industriel ?

b°) Quelle est l'erreur Ɛ effectué par ce système ?

Exercice n°16

Réduire le schéma suivant :



Exercice n°17

Un système linéaire asservi à retour unitaire est modélisé par l'équation différentielle suivante.

$$1.3\frac{d^2s(t)}{dt^2}+12,74\frac{ds(t)}{dt}+63,7s(t)=63,7e(t)$$

1. Déterminer la fonction de transfert $F(P)=\frac{S(P)}{E(P)}$ du système . En déduire le coefficient d'amortissement m et la pulsation naturelle ω_n.
2. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte G(P).
3. On applique à l'entrée du système un échelon unitaire. Déterminer le temps de réponse à 5%.
4. On introduit dans la chaîne directe un amplificateur de gain K.

4.1 Déterminer la valeur de K qui permet d'obtenir un pic de résonance Mp=1,4 en régime harmonique.

4.2 Calculer les valeurs correspondantes de m et de ω_n. Déterminer le temps de réponse à 5% suite à échelon unitaire à l'entrée. Conclusion ?

Exercice n°18

Un système automatique est régit par la fonction de transfert suivante :

$$KG(P)=\frac{K}{P(1+TP)}$$

On demande de calculer :

1°) La fonction de transfert en boucle fermée et la mettre sous forme canonique

2°) Le coefficient d'amortissement m du système si $K \longrightarrow 0$ et représenter l'allure pour une sollicitation de type indicielle.

3°) Le coefficient d'amortissement m du système si $K \longrightarrow \infty$ et représenter l'allure pour une sollicitation de type indicielle.

4°) On considère maintenant que K=10 et T=0,5s.

4-1 / Calculer la fonction de transfert H(P).

4-2 / Quel est le premier dépassement ?

4-3 / Quel est le temps de réponse à 5% ?

Exercice n°19

Soit un four à régulation thermique est constitué d'une entrée d'air froid et d'une sortie d'air chaud. Le four est constitué d'une enveloppe à plusieurs couches réalisant l'isolement entre l'intérieur et l'extérieur ambiant .L'épaisseur de l'enceinte est e

Le dispositif de chauffage est capable de dissiper une puissance utile réglable pc(t). Pour une élévation de température $d\theta i$, le four et la charge à traiter emmagasinent des quantités de chaleur :

$dQf = \delta f.\ d\theta i$ pour le four

$dQc = \delta c.\ d\theta i$ pour la charge

$dQ' = (\delta f + \delta c).\ d\theta i = \delta .d\theta i$

où δ_f et δ_c sont des constantes

La quantité de chaleur perdue à travers l'enceinte, pendant un intervalle de temps dt a pour expression $dQe(t)=K\,S\,(\theta i(t)-\theta e(t))dt$ où K=coefficient de convection intérieur et extérieur ainsi que l'épaisseur e ; S= surface de l'enveloppe

1°) Montrer que $\theta i(P)=\dfrac{1}{1+\tau P}\left(\alpha P_c(P)+\theta e(P)\right)$ (conditions d'Heaviside)

2°) Calculer α et τ sachant que $\delta=140\ kJ/°c$ et $KS=7w/°c$

3°) On n'est plus dans des conditions d'Heaviside.

Le cycle de traitement thermique nécessite un refroidissement contrôlé du four par la circulation d'air forcé de débit massique q de l'extérieur vers l'intérieur. La température extérieur.

La quantité de chaleur évacuée dans un intervalle de temps dt a pour expression :

$dQe(t)=q\,Ca(\theta i(t)-\theta e(t))dt$ où Ca=chaleur massique à pression constante de l'air (1,1kJ / kg.k)

On active le système de refroidissement sachant que la température d'équilibre du four est θ_0 à l'instant t=0

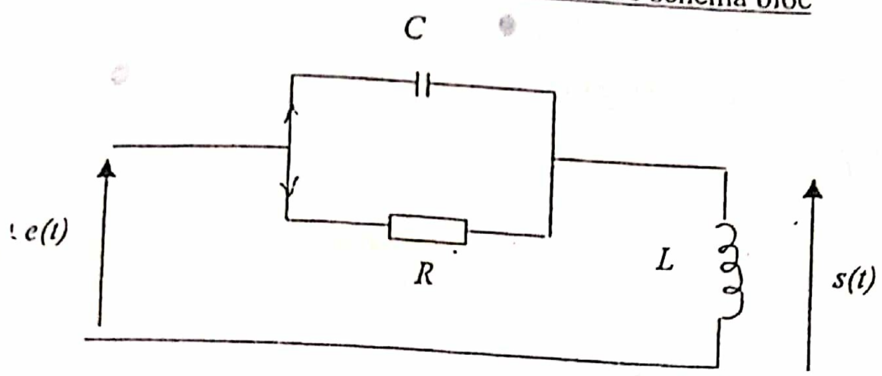
Exprimer l'évolution de la température intérieur du four et tracer son allure .

RESOLUTION DES EXERCICES
ET
PROBLEMES

Chapitre II :La modélisation

Exercice n°1

1°) Représentons ce circuit sous forme de schéma bloc



Déterminons d'abord l'équation différentielle

On sait que $i(t)= i_C(t) + i_R(t)$ avec $\frac{1}{C}\int i_C(t)dt = i_R(t).R$ car $u_c = u_R$

Dérivons et l'on a : $\frac{1}{C}\, i_C(t)= R\frac{di_R(t)}{dt}$ dans ce cas , $i_C(t)=C\,R\frac{di_R(t)}{dt}$

En remplaçant l'expression $i_C(t)$ dans l'expression de $i(t)$, on obtient :

$$i(t)= C\,R\frac{di_R(t)}{dt} + i_R(t)$$

Dans la maille (R ; L ; e(t)) on a : $e(t) - i_R(t)R - s(t)=0$

on en déduit l'expression de $i_R(t)$ et l'on a :

$$i_R(t)=\frac{e(t)-s(t)}{R}$$

Comme on connaît l'expression de $i_R(t)$, alors l'expression de $i(t)$ devient :

$$i(t)=C\frac{de(t)}{dt}-C\frac{ds(t)}{dt}+\frac{1}{R}e(t)-\frac{1}{R}s(t)$$

Dérivons l'expression du courant $i(t)$

$$\frac{di(t)}{dt}=C\frac{d^2e(t)}{dt^2}-C\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{de(t)}{dt}-\frac{1}{R}\frac{ds(t)}{dt}$$

En multipliant l'expression de la dérivée par L , on a :

$$L\frac{di(t)}{dt}=LC\frac{d^2e(t)}{dt^2}-LC\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{de(t)}{dt}-\frac{L}{R}\frac{ds(t)}{dt}$$

Or la sortie du circuit $s(t)$ est définit par :

$$s(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

Alors l'on a :

$$s(t)= LC\frac{d^2e(t)}{dt^2}-LC\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{de(t)}{dt}-\frac{L}{R}\frac{ds(t)}{dt}$$

Regroupons toutes les expressions contenant $s(t)$ à gauche du signe de l'égalité et l'on a :

$$\boxed{s(t)+\frac{L}{R}\frac{ds(t)}{dt}+LC\frac{d^2s(t)}{dt^2}=\frac{L}{R}\frac{de(t)}{dt}+LC\frac{d^2e(t)}{dt^2}}$$

Trouvons maintenant la transformée de LAPLACE de l'équation différentielle encadrée

$$S(P)+\frac{L}{R}PS(P)+LCP^2S(P)=\frac{L}{R}PE(P)+LCP^2E(P)$$

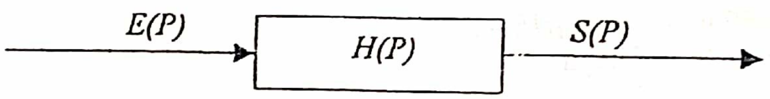
$$S(P)(1+\frac{L}{R}P+LCP^2)=E(P)(\frac{L}{R}P+LCP^2)$$

$$\frac{S(P)}{E(P)}=\frac{\frac{L}{R}P+LCP^2}{1+\frac{L}{R}P+LCP^2}$$

La fonction de transfert cherchée est donc :

$$\boxed{H(P)=\frac{\frac{L}{R}P+LCP^2}{1+\frac{L}{R}P+LCP^2}}$$

On a donc :



Pour faire le schéma block du système, trouvons d'abord la fonction de transfert en boucle ouverte G(P)

Pour cela , appliquons la formule de BLACK et déduisons $G(P)$

$$H(P)=\frac{G(P)}{1+G(P)}$$

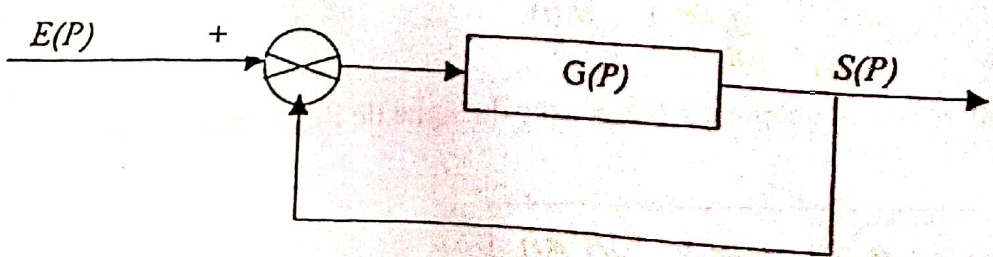
On en déduit $G(P)$:

$$G(P)=\frac{H(P)}{1-H(P)}$$

Connaissant $H(P)$, alors l'on a :

$$\boxed{G(P)=\frac{L}{R}P+LCP^2}$$

On obtient finalement :



2°) Donnons le coefficient d'amortissement m et la pulsation propre ω_0

Le dénominateur de la fonction de transfert H(P) est déjà sous forme canonique car l'on peut écrire que :

$$1+\frac{2m}{\omega_0}P+\frac{1}{\omega_0^2}P^2=1+\frac{L}{R}P+LCP^2$$

d'où l'on a :

$$\frac{2m}{\omega_0}=\frac{L}{R} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2}=LC$$

On tire des deux égalités ω_0 et m. On trouve donc :

$$\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad m=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

3°) La pulsation lorsqu'il y a amortissement critique

Il y a amortissement critique lorsque le coefficient d'amortissement $m=1$

Dans ce cas l'on a :

$$\frac{2}{\omega_0}=\frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{\omega_0=\frac{2R}{L}}$$

4°) La réponse $s(t)$

Sachant que e(t)=2V ; $\frac{L}{R}=2$ - et LC = 1 alors $H(P)$ devient :

$$H(P)=\frac{2P+P^2}{1+2P+P^2} \Leftrightarrow \frac{S(P)}{E(P)}=\frac{2P+P^2}{1+2P+P^2}$$

Tirons $S(P)$:

$$S(P)=\frac{2P+P^2}{1+2P+P^2}E(P) \quad \text{avec} \quad E(P)=\frac{2}{P}$$

En remplaçant $E(P)$ par son expression on a :

$$S(P)=\frac{2P+P^2}{1+2P+P^2}\cdot\frac{2}{P} \Rightarrow S(p)=\frac{4+2P}{1+2P+P^2}$$

$$\Rightarrow S(p)=\frac{4+2P}{(1+P)^2}$$

L'expression précédente est transformée de la manière suivante

$$S(p)=\frac{8(P+\frac{1}{2})}{(1+P)^2}$$

La transformée inverse de LAPLACE correspondante est :

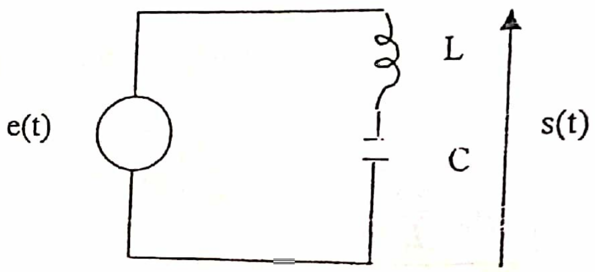
$$S(t) = 8[((\frac{1}{2}-1)t+1]\,e^{-t}$$

$$\boxed{S(t) = (-4t+8)\,e^{-t}}$$

Exercice n°2

1°) Exprimons s(t) en fonction de u(t)

Considérons le schéma suivant :



$$s(t)=\frac{Ldi(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int idt \quad \text{avec} \quad u(t)=\frac{1}{C}\int idt$$

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{1}{C}i'(t)\Rightarrow\ i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$$ donc on a :

$$\boxed{s(t)=LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}+u(t)}$$

2°) Etablissons l'équation différentielle du système électrique

$$e(t)-s(t)=0 \Leftrightarrow s(t)=e(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}+u(t)=e(t)}$$

3°) Trouvons la fonction de transfert H(P) du système électrique

Appliquons la transformée de LAPLACE à l'équation différentielle

$$LCp^2U(P)+U(P)=E(P)$$

$$U(P)[LCp^2+1]=E(P)$$

donc

$$\boxed{H(P)=\frac{1}{LCp^2+1}}$$

<u>Déduisons G(P)</u>

D'après la formule de BLACK l'on a : $H(P)=\frac{G(P)}{1+G(P)} \Leftrightarrow G(P)=\frac{H(P)}{1-H(P)}$

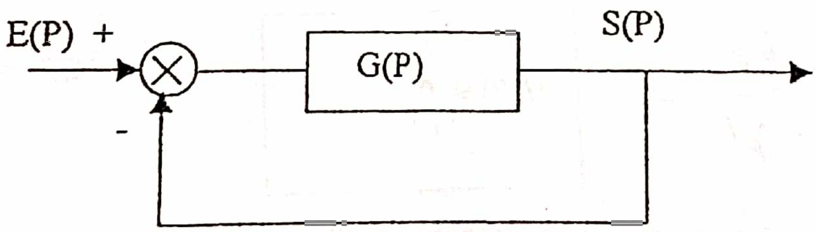
Comme $1-H(P)=1-\frac{1}{LCp^2+1}$

$$1-H(P)=LC\frac{LCp^2}{LCp^2+1}$$

on en déduit

$$\boxed{G(P)=\frac{1}{LCp^2}}$$

4°) <u>Représentons le circuit sous forme de schéma bloc</u>



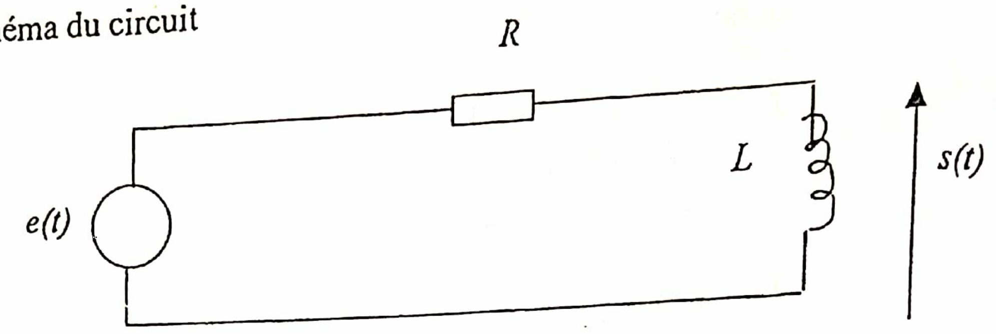
5°) <u>Trouvons la période de résonance</u>

C'est un oscillateur non amorti (m =0) la période de résonance est la période propre

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \Leftrightarrow T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc $\boxed{T_0=2\pi\sqrt{LC}}$

Exercice n°3

Faisons le schéma du circuit



2°) Le schéma bloc

L'équation différentielle

$$s(t)=L\frac{di}{dt}$$

or $e(t)-Ri(t)-s(t)=0$ $\Rightarrow$ $i(t)=\frac{e(t)-s(t)}{R}$

En remplaçant i(t) par son expression dans l'expression de s(t) , on obtient l'équation différentielle suivante

$$\boxed{s(t)+\frac{L}{R}\frac{ds(t)}{dt}=\frac{L}{R}de(t)}$$

La transformée de LAPLACE correspondante est

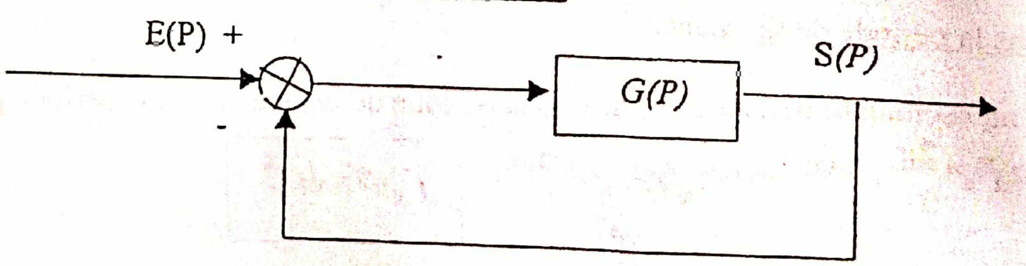
$$S(P)+\frac{L}{R}PS(P)=\frac{L}{R}PE(P)$$

Déduisons la fonction de transfert $H(P)$

$$\frac{S(P)}{E(P)}=\frac{\frac{L}{R}P}{1+\frac{L}{R}P} \Rightarrow \boxed{H(P)=\frac{\frac{L}{R}P}{1+\frac{L}{R}P}}$$

Déduisons la fonction de transfert $G(P)$

$$\boxed{G(P)=\frac{L}{R}P}$$



3°) La constante de temps du circuit

$$\boxed{\tau=\frac{L}{R}}$$

Exercice n°4

1.1 Expression de s(t)

$s(t) = e(t) - \varepsilon(t)$

1.2 Expression de ε(t)

$\varepsilon(t) = Ri(t)$

2 La transformée de LAPLACE

$S(P) = E(P) - \varepsilon(P)$

$\varepsilon(P) = RI(P)$

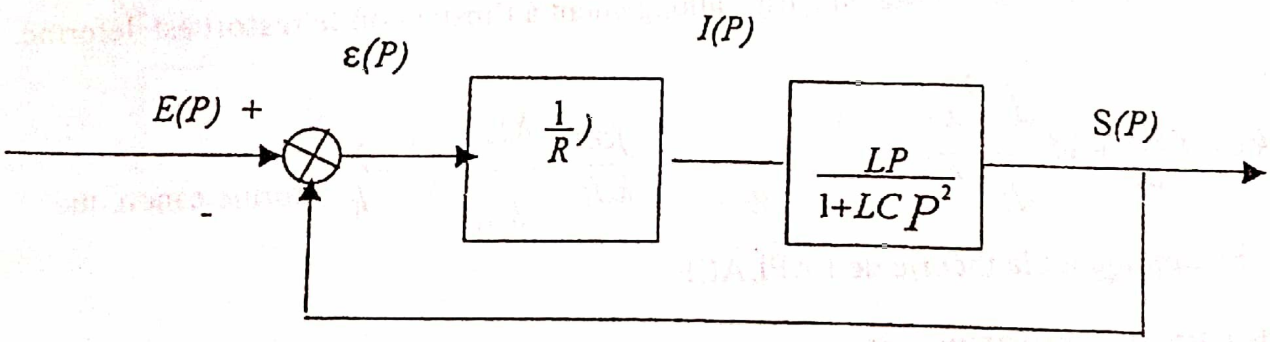
3°) L'expression de l'impédance complexe et l'expression de S(P)

$$Z_{LC} = \frac{jL\omega * \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow Z_{LC} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Si $P = j\omega$ alors l'on a : $P^2 = -\omega^2$

$$\boxed{S(P) = Z_{LC} I(P) = \frac{LP}{1 + LCP^2}}$$

4°) Le schéma bloc du système électrique



5°) Les expressions de la fonction de transfert en boucle ouverte et fermée

En boucle ouverte $G(P) = \frac{1}{R}\frac{LP}{1 + LCP^2}$

En boucle fermée $H(P) = \frac{\frac{L}{R}P}{1 + \frac{L}{R}P + LCP^2}$

6°) La réponse pulsionnelle du système électrique

$e(t)=\delta(t) \quad \Rightarrow \quad E(P)=1$

Dans ce cas $S(P)=H(P)=\dfrac{8P}{P^2+8p+17}=8\left[\dfrac{P+4}{(P+4)^2+1}-\dfrac{4}{(P+4)^2+1}\right]$

On en déduit l'expression de s(t)

$\boxed{s(t)=8e^{-4t}(\cos t-\sin t)}$ ou $\boxed{s(t)=8\sqrt{17}e^{-4t}\cos(t+75{,}96°)}$

Exercice n°5

1°) Etablissons la fonction de transfert : $\dfrac{X(P)}{Y(P)}$

La masse est soumise à :

$\vec{y}$ = force d'intensité 8,9N

$\vec{P}$ = vecteur poids,

$\vec{V_f}$ =force visqueuse due à l'élément d'amortissement,

$\vec{T}$ =force de rappel du ressort.

En appliquant la première loi de Newton on a :

$\vec{y}+\vec{P}+\vec{V_f}+\vec{T}=M\vec{a}$

Projection sur l'axe xx' :

$Y + mg + V_f - k(x - x_0) = Ma$ où x est l'allongement à l'instant où le ressort est déformé.

$\Rightarrow kx+f\dfrac{dx}{dt}+M\dfrac{d^2x}{dt^2}=y$ ou $x+\dfrac{fdx}{kdt}+\dfrac{Md^2x}{kdt^2}=\dfrac{y}{k}$ forme canonique

En appliquant la théorie de LAPLACE :

$X(P)k + PX(P) + MP^2X(P) = Y(P) \Leftrightarrow X(P)\,[\,k + fP + MP^2\,] = Y(P)$

$\Rightarrow \dfrac{X(P)}{Y(P)}=\dfrac{1}{k+fP+MP^2}$ ou $\dfrac{X(P)}{Y(P)}=\dfrac{1/k}{1+\frac{f}{k}P+\frac{M}{k}P^2}$

2°) La fonction x(t)

$$\frac{X(P)}{Y(P)}=\frac{1}{k+fP+MP^2} \Rightarrow X(P)=\frac{Y(P)}{k+fP+MP^2} \text{ avec } Y(P)=\frac{8,9}{P} \text{ d'où}$$

$$X(P)=\frac{8,9}{P(k+fP+MP^2)}$$

$$X(P)=\frac{a}{P}+\frac{bP+c}{k+fP+MP^2}$$

Déterminons a,b et c en fonction de k, f et M :

$$a=\lim_{P\to 0} PX(P)=\frac{8,9}{k} \Rightarrow \boxed{a=\frac{8,9}{k}}$$

$$\lim_{P\to\infty} PX(P)=a+\frac{b}{M}=0 \Rightarrow b=-aM \Leftrightarrow \boxed{b=\frac{-8,9M}{k}}$$

Trouvons c :

$$X(P)=\frac{a(k+fP+MP^2)+bP^2+cP}{P(k+fP+MP^2)}=\frac{8,9}{P(k+fP+MP^2)}$$

$$(aM+b)P^2+(af+c)P+ka=8,9$$

$$\begin{cases} b+aM=0 \\ c+af=0 \\ ak=8,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-aM \\ c=-af \\ a=\dfrac{8,9}{k} \end{cases}$$

d'où $\boxed{c=\dfrac{-8,9f}{k}}$

Ainsi l'on a :

$$X(P)=\frac{8,9}{P}+\frac{\frac{-8,9M}{k}P-\frac{8,9}{k}f}{k+fP+MP^2} \Leftrightarrow X(P)=\frac{8,98}{k}\left[\frac{1}{P}-\frac{MP+f}{k+f+MP^2}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow X(P)=\frac{8,9}{k}\left[\frac{1}{P}-\frac{P+\frac{f}{2M}}{(P+\frac{f}{2M})^2+\frac{4k-f^2}{4M}}-\frac{3f}{M}\times\frac{1}{(P+\frac{f}{2M})^2+\frac{4k-f^2}{4M}}\right]}$$

D'où l'on a :

$$\boxed{x(t)=\frac{8,9}{k}\left[1-e^{\frac{-ft}{2M}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4k-f^2}}{2M}t\right)-\frac{-3f}{\sqrt{4k-f^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4k-f^2}}{2M}t\right)\right]\right]}$$

3°) Déterminons la masse M,f et k :

D'après la figure 2, l'on a :

$$\frac{8,9}{k}=0,03 \Rightarrow k=\frac{8,9}{0,03} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=296,7}$$

Le temps de pic est défini par : $t_P=2=\dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$ avec $\omega_0=\dfrac{\sqrt{4k-f^2}}{2M}$ et

$$m=\frac{f\sqrt{4k-f^2}}{4Mk}$$

$$\Rightarrow \quad 2=\frac{2M\pi}{\sqrt{\frac{4k-f^2}{2M}}\sqrt{1-\frac{F^2}{16M^2k^2}(4k-f^2)}} \quad (1)$$

$$D\%=(0,0329-0,0300)\times 100=100\times\exp\left(\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \Leftrightarrow 0,0029=\exp\left(\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \quad (2)$$

On a $\quad 0,0329=\dfrac{8,9}{k}\exp\left(\dfrac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \quad (3)$

Les égalités (1), (2) et (3) permettent de déterminer f et M.

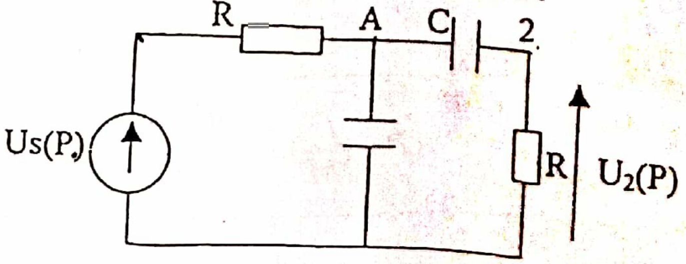
4°) Il suffit de remplacer k,f et M par leurs valeurs dans les expressions de m et ω_0.

5°) Pour cette question il faut prendre m=1.

Exercice N°6

1°) Calculons la fonction de transfert G(P) :

L'amplificateur étant idéal. alors l'on a :



(1) Au nœud A, $U_A(P)=(\frac{1}{R}+2CP)-U_2(P)-U_S(P)(\frac{1}{R})=0$

(2) Au nœud 2 : $U_2(P)(\frac{1}{R}+CP)-U_A(P)CP=0$

On sait que $G(P)=\frac{U_2(P)}{U_1(P)}$

En effet $U_A(P)=U_2(P)(\frac{1}{RCP}+1)$. En remplaçant $U_A(P)$ dans l'équation (1), on a :

$$U_2(P)(\frac{1}{RCP}+1)(\frac{1}{R}+2CP)-U_2(P)-(1+\frac{R_2}{R_1})U_1(P)\frac{1}{R}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{G(P)=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{RCP}{1+3RCP+(RCP)^2}}$$

mettons $G(P)$ sous forme la forme $\frac{\frac{P}{\omega_0}}{1+2m\frac{P}{\omega_0}+\frac{P^2}{\omega_0^2}}$

Ainsi $G(P)=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{RCP}{1+3RCP+(RC)^2P^2}$

Avec $\boxed{\omega_0=\frac{1}{RC}\ ,\quad K=1+\frac{R_1}{R_2} \quad \text{et} \quad m=\frac{3}{2}}$

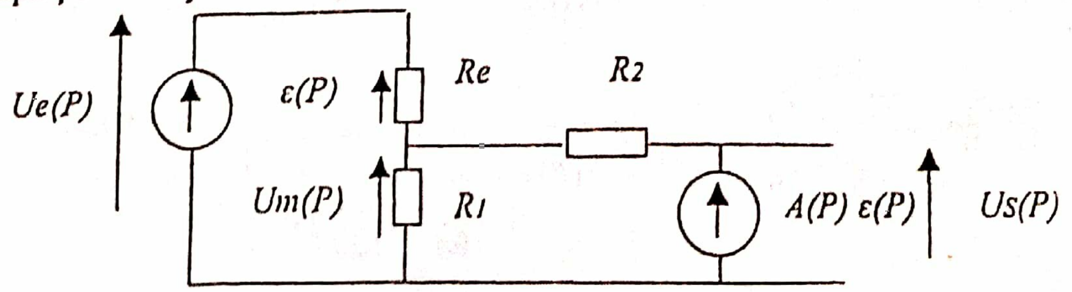
2°) Calculons m et ω_0

$\boxed{\omega=\frac{3}{2}\Rightarrow \omega_0=1,5}$ et $\boxed{\omega_0=\frac{1}{10^{-3}}\Rightarrow \omega_0=1000\,rad/s}$

Exercice n°7

1°) Schéma électrique équivalent

En remplaçant l'amplificateur par son schéma équivalent



2°) Montrons que si la résistance $R_e \to \infty$, on peut mettre le schéma électrique sous forme de schéma bloc

$$\varepsilon(P)=Ue(P)-Um(P) \quad \text{et} \quad Us(P)=A(P)\varepsilon(P)$$

$$R_e \to \infty \quad Um(P)=\frac{R_1}{R_1+R_2}Us(P) \Rightarrow \frac{Um(P)}{Us(P)}=\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$\text{Or } Us(P)=A(P)\varepsilon(P)=A(P)[Ue(P)-\frac{R_1}{R_1+R_2}Us(P)]$$

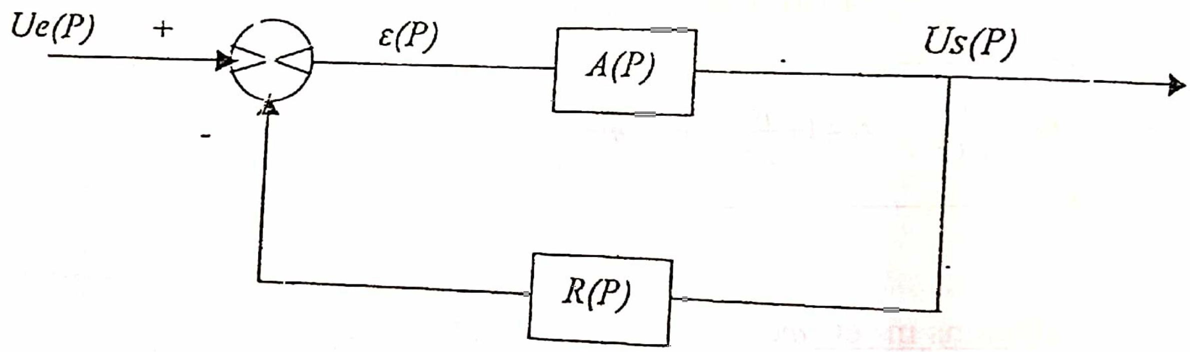
$$Us(P)+\frac{R_1}{R_1+R_2}A(P)Us(P)=A(P)Ue(P)$$

$$Us(P)[1+\frac{R_1}{R_1+R_2}A(P)]=A(P)Ue(P) \Rightarrow \frac{Us(P)}{Ue(P)}=\frac{A(P)}{1+\frac{R_1}{R_1+R_2}A(P)}$$

posons $H(p)=\frac{Us(P)}{Ue(P)}$ et $R(P)=\frac{R_1}{R_1+R_2}$

d'où $$\boxed{H(P)=\frac{A(P)}{1+A(P)R(P)}}$$

Le schéma bloc correspondant est donc



Exercice n°8

1°) Donnons l'expression de la transmit tance

$To(P)=10.A.\frac{1}{1+0,1P}\frac{1}{P}10$ alors l'on a : $To=\frac{100A}{P(1+0,1P)}$

2°) Trouvons la transmit tance en boucle fermée $T(P)$

$T(P)=\frac{Ys(P)}{Ye(P)}$ or $X(P)=10Ye(P)$ et $\frac{Ye(P)}{E(P)}=\frac{A}{P(1+0,1P)}$ avec $E(P)=10[Ye(P)-Y(P)]$

d'où $$\frac{Ys(P)}{10[Ye(P)-Y(P)]}=\frac{A}{P(1+0,1P)} \Rightarrow Y(P)=10\frac{A}{P(1+0,1P)}[Ye(P)-Ys(P)]$$

$$\frac{Ys(P)}{Ye(P)}=\frac{\frac{10A}{P(1+0,1P)}}{1+\frac{10A}{P(1+0,1P)}} \Rightarrow \boxed{T(P)=\frac{1}{1+\frac{1}{10A}P+\frac{0,1}{10A}P^2}}$$

3°) Exprimons en fonction de A la pulsation ω_0 et l'amortissement m

$$\frac{2m}{\omega_0}=\frac{1}{10A} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2}=\frac{1}{10A}$$

On déduit que

$$\boxed{m=\frac{1}{2\sqrt{10A}} \text{ et } \omega_0=\sqrt{10A}}$$

Exercice n°9

1°) Déterminons l'expression des fonctions en boucle fermée

Soit H(P) la fonction de transfert en boucle fermée

Selon la formule de BLACK, on a :

$$H(P)=\frac{GrG(P)}{1+GrG(P)} \quad \text{avec} \quad 1+GrG(P)=\frac{1+P+Gr}{1+P}$$

d'où l'on a :

$$\boxed{H(P)=\frac{Gr}{1+P+Gr}}$$

2°) Calculons Gr pour avoir $\tau=0,1$s

$$H(P)=\frac{Gr}{1+Gr+P} \Rightarrow H(P)=\frac{Gr}{(1+Gr)(1+\frac{1}{1+Gr}P)}$$

En posant $Kf=\frac{Gr}{1+Gr}$ et $\tau=\frac{1}{1+Gr}$ on trouve la forme canonique de $H(P)$ telle que

$$H(P)=\frac{Kf}{1+\tau P}$$

Calculons maintenant Gr, connaissant l'expression et la valeur de τ

$$\tau=\frac{1}{1+Gr} \Rightarrow 1+Gr=\frac{1}{\tau}$$

$$Gr=\frac{1}{\tau}-1 \quad \Leftrightarrow \quad Gr=\frac{1}{0,1}-1=10-1=9$$

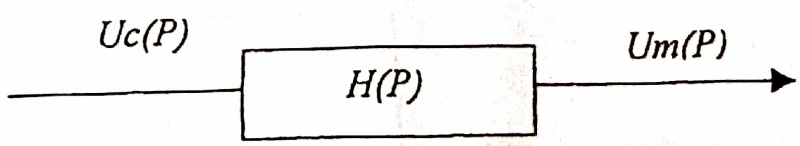
$$\boxed{Gr=9}$$

3°) Traçons le schéma fonctionnel ou schéma bloc du système

On sait que $H(P)=\frac{Kf}{1+0,1P}$ avec $Kf=\frac{9}{10}$

Donc

$$\boxed{H(P)=\frac{9}{10+P}}$$



Exercice n°10

1- a°) Déterminons l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée

D'après la formule de BLACK on a :

$$H(P)=\frac{G(P)C(P)}{1+G(P)C(P)} \quad \text{avec} \quad G(P)=\frac{Go}{1+\tau P} \quad \text{et} \quad C(P)=K \quad \text{alors}$$

$$H(P)=\frac{KGo}{1+KGo+\tau P}$$

Mettons maintenant $H(P)$ sous forme de $\frac{Ho}{1+\tau_{BF}P}$

Dans ce cas $H(P)$ devient $H(P)=\dfrac{\frac{KGo}{1+KGo}}{1+\frac{\tau}{1+KGo}P}$

$$\boxed{\text{donc } Ho=\frac{KGo}{1+KGo} \quad \text{et} \quad \tau_{BF}=\frac{\tau}{1+KGo}}$$

b°) Calculons Ho et τ_{BF} sachant que $K=10$, $Go=1$ et $\tau=1s$

$Ho=0{,}91$ et $\tau_{BF}=91ms$

c°) Expression de $U(P)$

$$\frac{S(P)}{U(P)}=G(P)\Rightarrow U(P)=\frac{S(P)}{G(P)} \quad \text{avec} \quad S(P)=H(P)E(P)$$

$$\boxed{U(P)=\frac{Ko}{1+KGo}*\frac{1}{1+\frac{\tau}{1+KGo}P}*E(P)}$$

2-a°) Calculons $s(\infty)$ et $u(\infty)$

$s(\infty)=\lim\limits_{P\to 0}[PS(P)]$ alors $s(\infty)=\lim\limits_{P\to 0}\left(\frac{HoE}{1+\tau_{BF}P}\right)=HoE$ avec $E=1$ d'où

$$\boxed{s(\infty)=0{,}91V}$$

$u(\infty)=\lim\limits_{P\to 0}[PU(P)]=\frac{Ko}{1+KoGo}E$ d'où

$$\boxed{u(\infty)=0{,}91V}$$

b°) Calculons u(0)

$u(0)=\lim\limits_{P\to\infty}[PU(P)] \Rightarrow u(0)=\lim\limits_{P\to\infty}\left[\frac{Ho}{Go}\,\frac{\tau P}{\tau_{BF}P}\right]=\boxed{}$ donc

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{u(0)=10V}$$

c°) Expression de s(t)

$$S(P)=\frac{Ho}{1+\tau_{BF}P}*\frac{E}{P}=\frac{HoE}{P(1+\tau_{BF}P)}=\frac{A}{P}+\frac{B}{1+\tau_{BF}P}$$

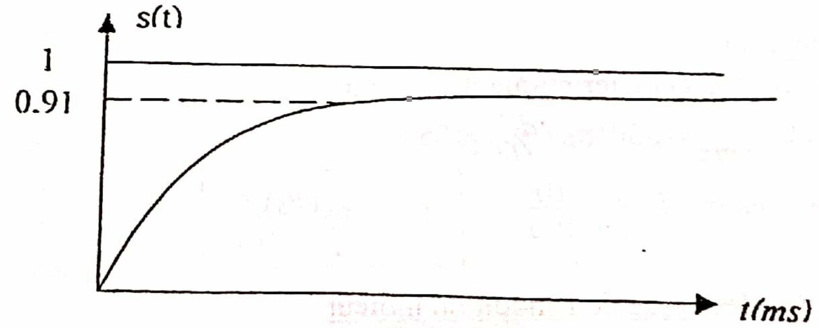
$$A=\lim_{P\to 0}[\frac{HoE}{1+\tau_{BF}P}]=HoE\Rightarrow A=0,91$$

$$B=\lim_{P\to\frac{-1}{\tau_{BF}}}[\frac{HoE}{P}]\Rightarrow B=-0,91$$

Conclusion

$$\boxed{s(t)=0,91(1-e^{\frac{-t}{\tau_{BF}}})}$$ avec t>0

la courbe représentative de s(t)

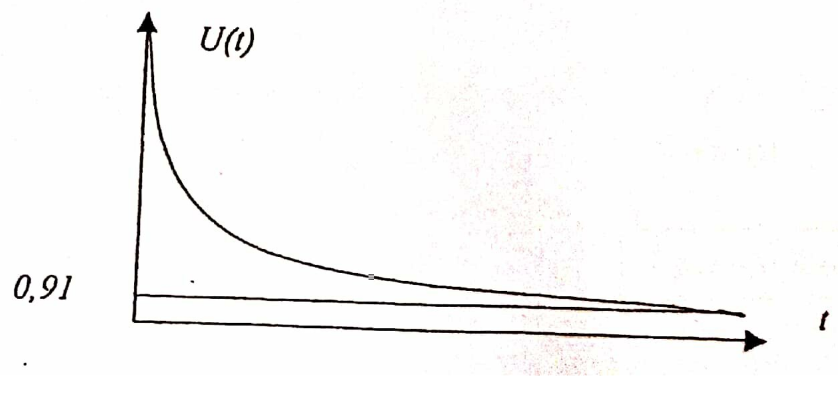


d°) Déterminons l'expression u(t)

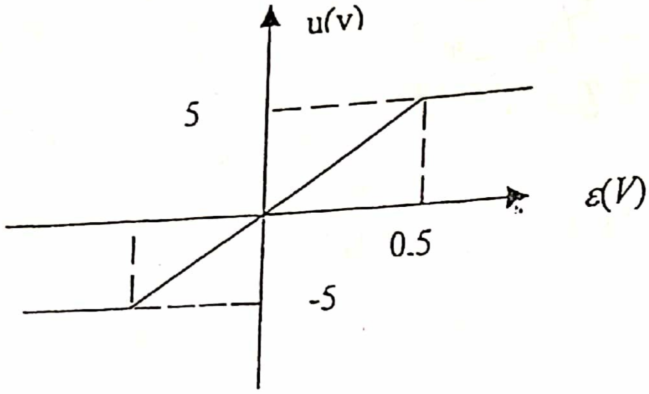
$$U(P)=\frac{Ho}{Go}*\frac{1+\tau P}{1+\tau_{BF}P}*\frac{E}{P}$$

On déduit u(t)

$$u(t)=0,91[1+KGo\,e^{\frac{-t}{\tau_{BF}}}]$$



3-a°) La caractéristique de transfert



b°) Détermination de la valeur limite

On se place à la limite de saturation $U_{SAT}=K_{MAX}E \Rightarrow K_{MAX}=\frac{U_{SAT}}{E}=5V$

$$\boxed{K_{MAX}=5V}$$

$s(\infty)=HoE=\frac{KGo}{1+KGo}E \Rightarrow E=(1+\frac{1}{K_{MAX}Go})s(\infty)$ donc $\boxed{E=1{,}2V}$

Il y a un signal d'erreur. Il faut donc régler le signal de commande à $E=1{,}2V$

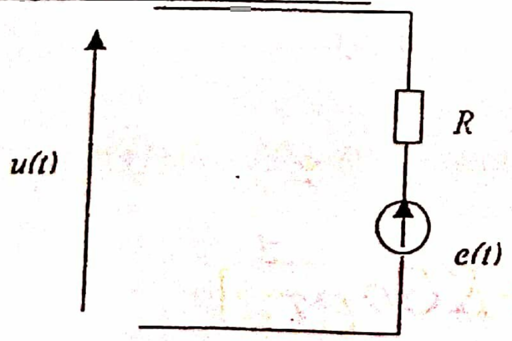
Exercice n°11

1°) Calculons la caractéristique d eur

$10V \rightarrow 1000^{tr}/_{mn}=1000*8\pi^{rd}/_{60}=105^{rd}/_{s}$

or $e=k\omega$ alors $k=\frac{e}{\omega}=\frac{10}{105} \Rightarrow$ $\boxed{k=0{,}095^{(Vs)}/_{rd}}$

2°) Schéma électrique de l'induit du moteur



Equation de l'induit

$u(t)=Ri(t)+e(t)$ avec $e(t)=k\omega(t)$

$$\boxed{u(t)=Ri(t)+k\omega(t)}$$

3°) Equation relative aux parties tournantes

D'après la relation fondamentale de la dynamique

$$Cm(t)-Cr(t)=J\frac{d\omega}{dt}$$

donc $$\boxed{ki(t)-Cr(t)=J\frac{d\omega}{dt}}$$

4 –a°) Mettons sous forme de schéma bloc le système électromagnétique

$$u(t)=Ri(t)+k\omega(t)\Rightarrow U(P)=RI(P)+k\Omega(P)$$

$$ki(t)-Cr(t)=J\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow kI(P)-Cr(P)=JP\Omega(P)$$

Alors dans ce cas :

$$I(P)=\frac{1}{R}[U(P)-k\Omega(P)]$$

Remplaçant I(P) par sa valeur

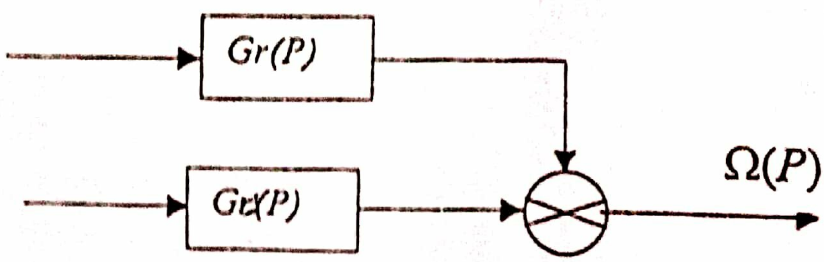
On a : $$\frac{k}{R}U(P)-\frac{U^2(P)}{R}\Omega(P)-Cr(P)=JP\Omega(P)$$

$$\Omega(P)[JP-\frac{k^2}{R}]=\frac{k}{R}U(P)-Cr(P)$$

$$\Omega(P)\frac{k^2}{R}(1+\frac{JR}{k^2}P)=\frac{k}{R}U(P)-Cr(P)$$

$$\boxed{\Omega(P)=\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{JR}{k^2}P}U(P)-\frac{\frac{k^2}{R}}{1+\frac{JR}{k^2}P}Cr(P)}$$

Le schéma bloc est le suivant :



b°) Les expressions de τ_m ; Go et Gl

Le schéma nous permet d'écrire : $\Omega(P)=Gu(P)U(P)+Gr(P)Cr(P)$

Par identification on a : $Gu(P)=\dfrac{\frac{1}{k}}{1+\frac{JR}{k^2}P}$ avec $Go=\dfrac{1}{k}\Rightarrow Go=10{,}5\,rd/(Vs)$

$$Gr(P)=\dfrac{\frac{-R}{k^2}}{1+\frac{JR}{k^2}P} \quad \text{avec} \quad G_1=\frac{-R}{k^2}\Rightarrow G_1=-500\,rd/(sNm)$$

$$\tau_m=\frac{JR}{k^2}\Rightarrow\tau_m=0{,}5s$$

Donc

$$\boxed{Go=\frac{1}{k}\Rightarrow Go=10{,}5\,rd/(Vs)}$$

$$\boxed{Gr=\frac{-R}{k^2}\Rightarrow Gr=-500\,rd/(sNm)}$$

$$\boxed{\tau_m=\frac{JR}{k^2}\Rightarrow\tau_m=0{,}5s}$$

Exercice n°1

1°) Exprimons La fonction de Transfert en Boucle fermée

D'après La formule de BLACK, on a :

$$F(P) = \frac{KG(P)}{1+KG(P)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1+G(P)K = \dfrac{0{,}1P^3+1{,}1P^2+P+K}{P(1+P)(1+0{,}1P)} \\ KG(P) = \dfrac{K}{P(1+P)(1+0{,}1P)} \end{cases}$$

On conclut en écrivant que

$$\boxed{F(P) = \frac{K}{0{,}1P^3+1{,}1P^2+P+K}}$$

2°) Determinons Les valeurs de K

Selon Le critère de Routh L'on a :

$0{,}1P^3+1{,}1P^2+P+K=0$ L'équation caractéristique du système.

Disposition du calcul

$$\begin{array}{c|cccc} P^3 & 0{,}1 & 1 & 0 & 0 \\ P^2 & 1{,}1 & K & 0 & 0 \\ P^1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ P^0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ & \gamma & & & \end{array}$$

Determinons α_i ; β_i ; γ avec $i \in \{1,2,3\}$

$$\alpha_1 = \frac{1{,}1 \times 1 - 0{,}1 \times K}{1{,}1} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1{,}1 - 0{,}1K}{1{,}1}$$

$$\alpha_2 = \frac{1{,}1 \times 0 - 0{,}1 \times 0}{1{,}1} \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = \frac{1{,}1 \times 0 - 0{,}1 \times 0}{1{,}1} \Rightarrow \alpha_3 = 0 \; ; \; \alpha_4 = 0$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \times K - 1{,}1 \times 0}{\alpha_1} \Rightarrow \beta_1 = K.$$

$$\beta_2 = 0 \; ; \; \beta_3 = 0 \; ; \; \beta_4 = 0$$

$$\gamma = 0$$

La disposition précédente devient :

$$\begin{array}{c|cccc}
p^3 & 0{,}1 & 1 & 0 & 0 \\
p^2 & 1{,}1 & K & 0 & 0 \\
p^1 & \frac{1{,}1-0{,}1K}{1{,}1} & 0 & 0 & 0 \\
p^0 & K & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & & &
\end{array}$$

© Le système est stable si le coefficient de la 1ère Colonne de la disposition sont tous positifs.
Dans ce cas $\underline{K > 0}$ et $\frac{1{,}1 - 0{,}1K}{1{,}1} > 0$

$$\frac{1{,}1 - 0{,}1K}{1{,}1} > 0 \Rightarrow 1{,}1 - 0{,}1K > 0$$

$$\Rightarrow K < 11.$$

On conclut que

$$\boxed{0 < K < 11}$$

3-) Valeur de $K = K_c$ pour laquelle le sy[illegible] à la limite de la stabilité

A la limite de la stabilité, K peut prendre la valeur 0 ou 11

D'après l'hypothèse $K > 0$, alors $\boxed{K_c = 11}$

Déduisons dans ce cas la valeur de la pulsation ω_c

* A la limite de la stabilité, l'on a :

$11G(j\omega_c) = -1 \iff \|11G(j\omega_c)\| = 1$ condition d'amplitude

et

$\mathrm{Arg}(11G(j\omega_c)) = -\pi$ Condition de phase

Cependant nous savons que

$$11G(P) = \frac{11}{P(1+P)(1+0{,}1P)}$$

$$\boxed{11G(P) = \frac{11}{P + 1{,}1P^2 + 0{,}1P^3}}$$

En posant $P = j\omega$ on a :

$$11G(j\omega) = \frac{11}{j\omega - 0{,}1j\omega^3 - 1{,}1\omega^2}$$

$$\boxed{11G(j\omega) = \frac{11}{-1{,}1\omega^2 + j\omega(1 - 0{,}1\omega^2)}}$$

⊙ Pour calculer ω_c, il est plus facile d'utiliser la condition de phase

$$\mathrm{Arg}(11G(j\omega_c)) = -\pi \iff -\mathrm{Arctan}\left[\frac{\omega_c(1 - 0{,}1\omega_c^2)}{-1{,}1\omega_c^2}\right] = -\pi$$

$$\iff \mathrm{Arctan}\left(\frac{1 - 0{,}1\omega_c^2}{-1{,}1\omega_c}\right) = \pi$$

$$\text{Arctan}\left(\frac{1-0{,}1\omega_c^2}{-1{,}1\omega_c}\right) = \pi$$ ce qui équivaut

ainsi à $\frac{1-0{,}1\omega_c^2}{-1{,}1\omega_c} = 0$

$1-0{,}1\omega_c^2 = 0$

$$\boxed{\omega_c = \sqrt{10}\ rd/s \Leftrightarrow \omega_c \simeq}$$

4°/ Traçons les diagrammes asymptotiques de Bode de K

$$10G(P) = \frac{10}{P(1+P)(1+0{,}1P)}$$ avec $K = 10 \Rightarrow$ système stab

posons que $P = j\omega$ et l'on obtient.

$$\boxed{10G(j\omega) = \frac{10}{-1{,}1\omega^2 + j\omega(1-0{,}1\omega^2)}}$$

Trouvons maintenant les fonctions de BODE

$(M_G)_{dB} = 20\log\|10G(j\omega)\|$

$= 20\log\left[\frac{10}{\sqrt{1{,}21\omega^2+\omega^2(1-0{,}1\omega^2)^2}}\right]$

$$\boxed{(M_G)_{dB} = 20\log 10 - \frac{1}{2}\log\left[1{,}21\omega^2+\omega^2(1-0{,}1\omega^2)\right]}$$

Considérons le tableau de valeurs suivants.

ω	0,001	0,01	0,1	1	2	4	8
$(M_G)_{dB}$	20	20	20	19,8	19,5	19,3	19,0

$$\varphi = Arg[10G(j\omega)] \iff \varphi = Arg\left[\frac{10}{-1,1\omega^2 + j\omega(1-0,1\omega^2)}\right]$$

$$\iff \varphi = -Arg\left[-1,1\omega^2 + j\omega(1-0,1\omega^2)\right]$$

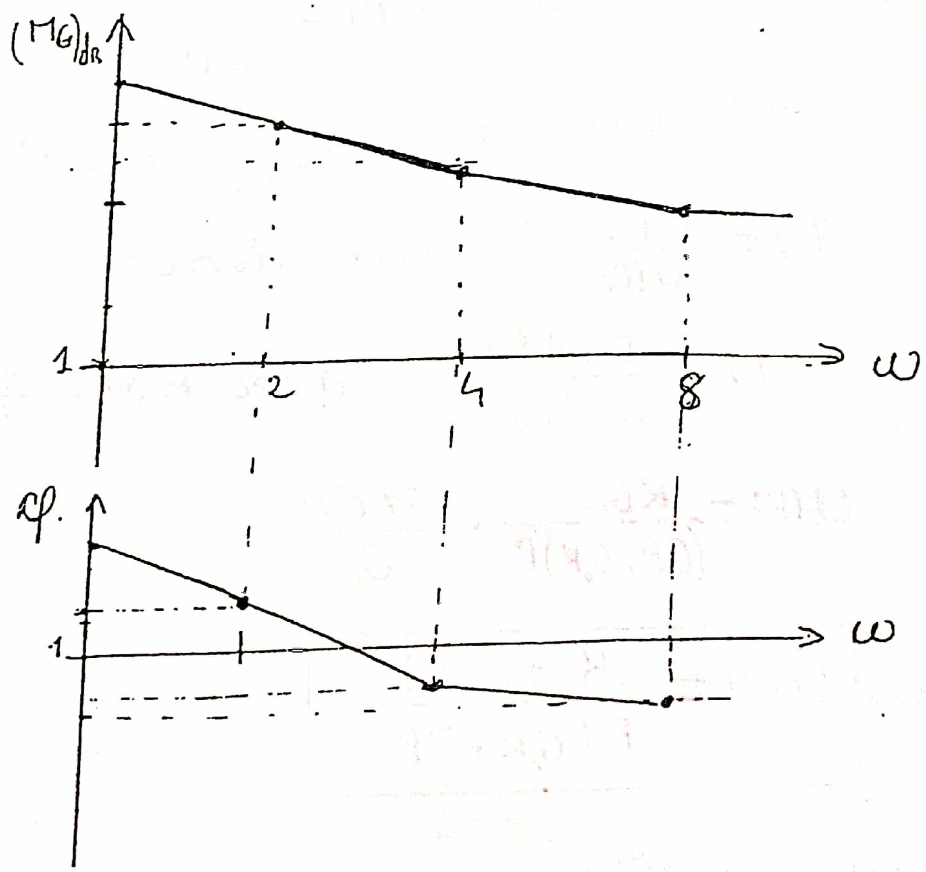
$$\iff \varphi = -Arctan\ \frac{\omega(1-0,1\omega^2)}{-1,1\omega^2}$$

$$\iff \boxed{\varphi = Arctan\left[\frac{1-0,1\omega^2}{1,1\omega}\right]}$$

Considerons le tableau suivant :

ω	1	2	4	8
φ°	39,9	15,3	-7,76	-31,5
φ(rd)	0,6	0,26	-0,1	-0,5

Traçons Les courbes de BODE



Ex 1 à suivre } AD

Exercice N°2

1°) La fonction de transfert du système

D'après BLACK, L'on a:

$$H(p) = \frac{G(p)\,C(p)}{1+G(p)\,C(p)} \quad \text{avec } 1+G(p)C(p) = \frac{\tau p + G_0 K}{\tau p}$$

$$G(p)\cdot C(p) = \frac{(\tau p+1)K}{\tau p}\cdot\frac{G_0}{1+\tau p} \Leftrightarrow G(p)\,C(p) = \frac{K G_0}{\tau p}$$

$$H(p) = \frac{K G_0}{\tau p}\cdot\frac{\tau p}{\tau p + G_0 K} \Leftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{K G_0}{\tau p + G_0 K}}$$

2°) L'expression de U(p)

On sait maintenant que $G(p) = \dfrac{S(p)}{U(p)}$

On sait aussi que $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} \Leftrightarrow S(p) = H(p)\cdot E$

d'où $G(p) = \dfrac{E(p)\cdot H(p)}{U(p)}$ on a donc:

$$U(p) = \frac{E(p)\,H(p)}{G(p)} \quad \text{avec } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$U(p) = \frac{K G_0}{(\tau p + G_0 K)p}\cdot\frac{1+\tau p}{G_0}$$

$$\boxed{U(p) = \frac{K(1+\tau p)}{p(G_0 K + \tau p)}}$$

3°) a°) Trouvons K pour une précision convenable

$\varepsilon = \lim\limits_{p\to 0} p\,\varepsilon(p)$ avec la transmittance dans la chaîn directe $\dfrac{S(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)\,G(p) \Rightarrow S(p) = C(p)\cdot G(p)\,\varepsilon(p)$

En effet $\mathcal{E}(P) = E(P) - S(P)$

$$\mathcal{E}(P) = E(P) - C(P)G(P)\mathcal{E}(P)$$

$$\mathcal{E}(P) + C(P)G(P)\mathcal{E}(P) = E(P)$$

$$\mathcal{E}(P)[1 + C(P)G(P)] = E(P)$$

$$\boxed{\mathcal{E}(P) = \frac{E(P)}{1 + C(P)G(P)}}$$

Le produit $C(P)G(P) = \frac{6K}{D(P)}$, d'où L'on a :

$$\mathcal{E}(P) = \frac{D(P)E(P)}{6K + D(P)} \quad \text{avec } E(P) = \frac{1}{P}$$

$$\boxed{\mathcal{E}(P) = \frac{D(P)}{P(6K + D(P))}}$$

Trouvons $\lim\limits_{P \to 0} P\mathcal{E}(P) = \lim\limits_{P \to 0} \frac{D(P)}{6K + D(P)}$

$$\boxed{\lim P\mathcal{E}(P) = \frac{D(0)}{6K + D(0)}}$$

Trouvons maintenant $D(0)$

D'après Les hypothèses du problème

$$D(P) = 1 + \frac{2m}{\omega_0} P + \frac{1}{\omega_0^2} P^2$$

$$\boxed{D(0) = 1}$$

Dans ce cas $\lim P\mathcal{E}(P)$ devient :

$$\lim P\mathcal{E}(P) = \frac{1}{6K + 1}$$

Rappelons que $\mathcal{E} = \lim\limits_{P \to 0} P\mathcal{E}(P)$

d'où L'on a : $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{1 + 6K}}$

)

Tirons de la valeur précédente K.

$$\varepsilon = \frac{1}{1+6K} \Rightarrow 1+6K = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 6K = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\boxed{K = \frac{1}{6\varepsilon} - \frac{1}{6}}$$

En remplaçant ε par $\frac{1}{4}$ (valeur donnée dans le p

On a : $K = \frac{1}{\frac{6}{4}} - \frac{1}{6}$

$$K = \frac{4}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}}$$

b) Réponse du système à une sollicitation indicie

D'après BLACK l'on a :

$$H(p) = \frac{G(p)\,C(p)}{1+G(p)\,C(p)} \quad \text{avec } C(p) = 6 \text{ et } G(p) = \frac{1/2}{D(p)}$$

Or $D(p) = 1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2$ avec $m = 7{,}5$ $\omega_0 = 1\,rd/s$

$$D(p) = 1 + 15p + p^2.$$

L'expression de G(p) devient dans ce cas

$$G(p) = \frac{1/2}{1+15p+p^2}$$

H(p) devient en introduisant C(p) et G(p)

$$\boxed{H(p) = \frac{3}{4+15p+p^2}}$$

Rappelons que $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

Dans ce cas $S(p) = H(p) \cdot E(p)$ avec $E(p) = \frac{1}{p}$

$$S(p) = \frac{3}{p(4 + 15p + p^2)}$$

Factorisons $p^2 + 15p + 4$

$$p^2 + 15p + 4 = (p + 0{,}25)(p + 14{,}75)$$

L'expression $S(p)$ devient :

$$S(p) = \frac{3}{p(p + 0{,}25)(p + 14{,}75)}$$

Decomposition en élément simple

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 0{,}25} + \frac{C}{p + 14{,}75}$$

$$A = \lim_{p \to 0} p S(p) \Rightarrow A = \lim_{p \to 0} \frac{3}{4 + 15p + p^2}$$

$$\boxed{A = 3/4}$$

$$B = \lim_{p \to -0{,}25} (p + 0{,}25) S(p) \Rightarrow B = \lim_{p \to -0{,}25} \frac{3}{p(p + 14{,}75)}$$

$$\boxed{B = -0{,}83}$$

$$C = \lim_{p \to -14{,}75} (p + 14{,}75) S(p) \Rightarrow C = \lim_{p \to -14{,}75} \frac{3}{p(p + 0{,}25)}$$

$$\boxed{C = 0{,}014}$$

$$S(P) = \frac{3/4}{P} - \frac{0{,}83}{P+0{,}25} + \frac{0{,}014}{P+14{,}75}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{3}{4} - 0{,}83e^{-0{,}25t} + 0{,}014e^{-14{,}75t}}$$

Exercice N°3

1°) Expression de $U(P)$ en fonction de K et $E(P)$

$$C(P) = \frac{U(P)}{\mathcal{E}(P)} \Rightarrow U(P) = C(P)\cdot\mathcal{E}(P)$$

avec $\mathcal{E}(P) = \frac{E(P)}{1+C(P)G(P)}$

L'on a dans ce cas

$$\boxed{U(P) = \frac{E(P)\,C(P)}{1+C(P)\,G(P)}}$$

avec $C(P) = 2P$ et $1+C(P)G(P) = \frac{2K+3+P}{P+3}$

$U(P)$ devient donc

$$\boxed{U(P) = \frac{2P(P+3)E(P)}{3+2K+P}}$$

2 a.) Determination de K

On sait que $C(P)G(P) = \frac{12}{2P+6}$ avec ~~$C(P)G(P) = \frac{2K}{P+3}$~~

$C(P)\,G(P) = \frac{2K}{P+3}$ alors L'on a :

$$\frac{2K}{P+3} = \frac{12}{2P+6} \Leftrightarrow \frac{2K}{P+3} = \frac{6}{P+3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K=3}$$

b°) Fonction de Transfert $H(p)$

$$H(P) = \frac{G(P)C(P)}{1+G(P)C(P)} \iff \boxed{H(p) = \frac{6}{p+9}}$$

3°) Choisissons La consigne que peut supporter Le système

Pour ce choix, il suffit de connaître L'erreur ε que fait le système Lorsqu'on lui applique les différentes consignes.

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+C(p)G(p)}$$

avec $\quad 1 + C(p)G(p) = \frac{p+9}{p+3}$

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)(p+3)}{p+9}}$$

- Application des consignes

* échelon d'amplitude 2 $e(t) = 2 \implies E(p) = \frac{2}{p}$

$$\varepsilon(P) = \frac{2(P+3)}{P(P+9)}$$

$$\varepsilon = \lim_{p \to 0} \frac{2(p+3)}{p+9} \iff \boxed{\varepsilon = \frac{2}{3}}$$

* La rampe d'amplitude 2 $e(t) = 2t \Rightarrow E(p) = \frac{2}{p^2}$

$$\varepsilon(P) = \frac{2(P+3)}{P^2(P+9)}$$

$$\lim_{p \to 0} \frac{2(P+3)}{P(P+9)} \iff \boxed{\varepsilon = +\infty}$$

2

Conclusion

$\boxed{\text{La consigne que peut supporter le système est La Consigne de type échelon car L'erreur effectuée est faible et est } \varepsilon = \frac{2}{3}}$

4°) La Reponse du système à la consigne supportée

$$H(p) = \frac{6}{p+9} \Leftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{6}{p+9}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{6}{p+9} E(p) \quad \text{avec } E(p) = \frac{2}{p}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{2 \times 6}{p(p+9)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S(p) = \frac{12}{p(p+9)}}$$

Decomposition en éléments simples

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+9}$$

Determinons A et B par l'application du Théorème des residus.

$$A = \lim pS(p) \Leftrightarrow A = \lim_{p \to 0} \frac{12}{p+9} \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{4}{3}}$$

$$B = \lim_{p \to -9} (p+9)S(p) \Leftrightarrow B = \lim_{p \to -9} \frac{12}{-p} \Rightarrow \boxed{B = \frac{-4}{3}}$$

$$S(p) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+9}\right)$$

$$\boxed{s(t) = \frac{4}{3}\left(1 - e^{-9t}\right)}$$

5/

La consigne que peut supporter le système est La Consigne de type échelon car L'erreur effectuée est faible et est $\varepsilon = \frac{2}{3}$

4°) La Reponse du système à la consigne supporté

$$H(p) = \frac{6}{p+9} \Leftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{6}{p+9}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{6}{p+9} E(p) \text{ avec } E(p) = \frac{2}{p}$$

$$\Leftrightarrow S(p) = \frac{2 \times 6}{p(p+9)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S(p) = \frac{12}{p(p+9)}}$$

Decomposition en éléments simples

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+9}$$

Determinons A et B par l'application du Théorème des residus.

$$A = \lim p S(p) \Leftrightarrow A = \lim_{p \to 0} \frac{12}{p+9} \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{4}{3}}$$

$$B = \lim_{p \to -9} (p+9) S(p) \Leftrightarrow B = \lim_{p \to -9} \frac{12}{-p} \Rightarrow \boxed{B = \frac{-4}{3}}$$

$$S(p) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+9}\right)$$

$$\boxed{s(t) = \frac{4}{3}\left(1 - e^{-9t}\right)}$$

Exercice N°4

1-1°) Determinons La fonction de transfert H(P)

On rappelle que $\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 6\frac{ds(t)}{dt} + 10s(t) = 2e(t)$

$P^2S(P) + 6PS(P) + 10S(P) = 2E(P)$

$S(P)[P^2 + 6P + 10] = 2E(P)$

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{2}{10+6P+P^2}$$

$$\boxed{H(P) = \frac{2}{10+6P+P^2}}$$

1-2°) Déduisons L'expression R(P)

D'après La formule de BLACK.

$$H(P) = \frac{C(P)\cdot R(P)}{1+C(P)R(P)} \iff \boxed{R(P) = \frac{H(P)}{(1-H(P))C(P)}}$$

Connaissance H(P) et C(P) R(P) devient.

$$R(P) = \frac{2}{10+6P+P^2} \times \frac{(10+6P+P^2)\times(P+2)}{8+6P+P^2}$$

$$\boxed{R(P) = \frac{2(P+2)}{8+6P+P^2}}$$ avec $\frac{S(P)}{U(P)} = \frac{2(P+2)}{8+6P+P^2} = \frac{2}{P+4}$

1-3°) La réponse du système de fonction de transfert R(P)

$$S(P) = \frac{2(P+2)}{8+6P+P^2} \times U(P) \quad \text{avec } U(P) = \frac{1}{P}$$

$$S(P) = \frac{2(P+2)}{P(8+6P+P^2)}$$

14

$$R(P) = \frac{2(P+2)}{P(8+6P+P^2)}$$. Simplifions $R(P)$.

Considerons $8+6P+P^2$

$$8+6P+P^2 = (P+2)(P+4).$$

d'où

$$S(P) = \frac{2(P+2)}{P(P+2)(P+4)} \Longleftrightarrow \boxed{S(P) = \frac{2}{P(P+4)}}.$$

Decomposition en éléments simples

$$S(P) = \frac{A}{P} + \frac{B}{P+4}$$

Determinons A et B par le théorème des Residus.

$$A = \lim_{P \to 0} P\,S(P) \Longleftrightarrow A = \lim_{P \to 0} \frac{2}{P+4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$B = \lim_{P \to -4} (P+4)\,S(P) \Longleftrightarrow B = \lim_{P \to -4} \left(\frac{2}{P}\right) \Rightarrow \boxed{B = \frac{-1}{2}}$$

$$S(P) = \frac{1}{2}\left(1/P - \frac{1}{P+4}\right) \Longleftrightarrow \boxed{S(P) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P+4}\right)}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4t}\right)}$$

1-4°/ Le temps de reponse à 5% du non asservi de fonction de Transfert $R(P)$

$s(t) = e'(t) - 5\%\, e'(t)$ avec $e'(t) = \frac{1}{2}$.

$$s(t) = e'(t)(1 - 0{,}05)$$

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-4t}) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}05)$$

$$1 - e^{-4t} = 1 - 0{,}05$$

$$e^{-4t} = 0{,}05 \Rightarrow t_r = \frac{-1}{4}\ln(0{,}05)$$

$$t_r = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{t_r = 0{,}75\, s}$$

2-1°/ Determinons le temps de reponse à 5%

$t_{r_F} = -\tau_F \ln\left(\frac{x}{100}\right)$ avec $x = 5$

Cherchons τ_F :

$H(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$ avec $\begin{cases} C(p)G(p) = \frac{10}{4+p} \\ 1 + C(p)G(p) = \frac{14+p}{p+4} \end{cases}$

$H(p) = \frac{10}{p+4} \cdot \frac{p+4}{14+p} \Leftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{10}{p+14}}$

On sait que $\tau_F = \frac{-1}{p}$ avec $p = -14$

$\tau_F = \frac{1}{14}$

$t_{r_F} = \frac{-\ln(0,05)}{14}$

$\boxed{t_{r_F} = 0,21\ s}$

2-2°/ Calculons l'erreur stationnaire et de de vitesse

$\varepsilon = \lim\limits_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)$ avec $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + C(p)G(p)}$

or $1 + C(p)G(p) = \frac{p+14}{p+10} \Rightarrow \boxed{\varepsilon(p) = \frac{(10+p)E(p)}{p+14}}$

Erreur stationnaire $E(p) = \frac{1}{p}$

$\varepsilon_s = \lim\limits_{p \to 0} \frac{10+p}{p+14} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_s = \frac{5}{7}}$

Erreur de vitesse $E(p) = \frac{1}{p^2}$

$\varepsilon_v = \lim\limits_{p \to 0} \frac{10+p}{p(p+14)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_v = +\infty}$

Exercice N° 5

1°) Trouvons La fonction de Transfert C(p) du Regulateur

$$\xrightarrow{\varepsilon(p)} \boxed{C(p)} \xrightarrow{U(p)}$$

par definition $C(p) = \dfrac{U(p)}{\varepsilon(p)}$

$$u(t) = 5\varepsilon(t) + 6\int \varepsilon(t)\,dt + \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Appliquons à cette expression, La transformée de LAPLACE

$$U(p) = 5\varepsilon(p) + \frac{6\varepsilon(p)}{p} + p\varepsilon(p)$$

$$U(p) = \varepsilon(p)\left[5 + \frac{6}{p} + p\right]$$

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{6+5p+p^2}{p}$$

d'où $\boxed{C(p) = \dfrac{6+5p+p^2}{p}}$

2°/ a.) Determinons le gain statique K

Par definition Le gain statique d'un système regulé est :

$$K = \lim_{p \to 0} H(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = \frac{C(p)\,G(p)}{1 + C(p)\,G(p)}$$

$$C(p)\,G(p) = \frac{(6+5p+p^2)\,6\alpha}{p^3 + 7p^2 + 16p + 12}$$ où L'on peut factoriser

$p^3 + 7p^2 + 16p + 12$..

On obtient finalement

$$p^3 + 7p^2 + 16p + 12 = (p+2)(6+5p+p^2)$$

d'où $\boxed{C(p)\,G(p) = \dfrac{6\alpha}{p+2}}$ et $\boxed{1 + C(p)G(p) = \dfrac{6\alpha + 2 + p}{2+p}}$

$$H(P) = \frac{6\alpha}{P+2} \cdot \frac{P+2}{2+6\alpha+P} \Leftrightarrow \boxed{H(P) = \frac{6\alpha}{2+6\alpha+P}}$$

$$K = \lim_{P \to 0} H(P) \Leftrightarrow K = \lim_{P \to 0} \frac{6\alpha}{P+2+6\alpha}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{6\alpha}{2+6\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K = \frac{3\alpha}{1+3\alpha}}$$

Determinons α

$\boxed{\varepsilon = \lim P\varepsilon(P)}$ avec $\varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+C(P)G(P)}$ i-e $\varepsilon(P) = \frac{E(P)(P+2)}{2+6\alpha+P}$

$$\boxed{\varepsilon(P) = \frac{12(P+2)}{P(P+2+6\alpha)}}$$ Car $E(P) = \frac{12}{P}$.

$$\varepsilon = \lim_{P \to 0} \frac{12(P+2)}{P+2+6\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{24}{2+6\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{12}{1+3\alpha}$$

Comme $\varepsilon = 15 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{3}{20}$ alors

$$\frac{12}{1+3\alpha} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow \frac{4}{1+3\alpha} = \frac{1}{20}$$

On deduit α et L'on obtient

$$\alpha = \frac{79}{3}.$$

$$\boxed{K = \frac{79}{80}}$$

b.) temps de stabilisation à 7%

$$t_s = -\tau \ln \frac{x}{100} \quad \text{avec } x = 7\% = \frac{7}{100}$$

or $\tau = \frac{-1}{P}$ et $\boxed{H(p) = \frac{158}{160+P}}$

$P+160=0 \Rightarrow P=-160$ d'où $\boxed{\tau = \frac{1}{160}}$

$$t_s = \frac{-\ln(0,07)}{160}$$

$\boxed{t_s = 0,0167s}$ C'est le temps cherché

c.) vérifions si Le système peut supporter La consigne de type rampe.

$$e(t) = v \cdot t \Longrightarrow E(p) = \frac{v}{p^2}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{v(p+2)}{p^2(p+160)}$$ D'après ce qui précède

$$\varepsilon = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{v(p+2)}{p(p+160)}$$

$$\boxed{\varepsilon = \infty}$$

Cette consigne consigne provoque des erreurs très grandes

d'où le système ne supporte pas La consigne de type rampe.

3) Etudions la stabilité du système du système Regulé

On sait que $H(P) = \dfrac{158}{P+160}$

$P + 160 = 0 \Rightarrow P = -160$

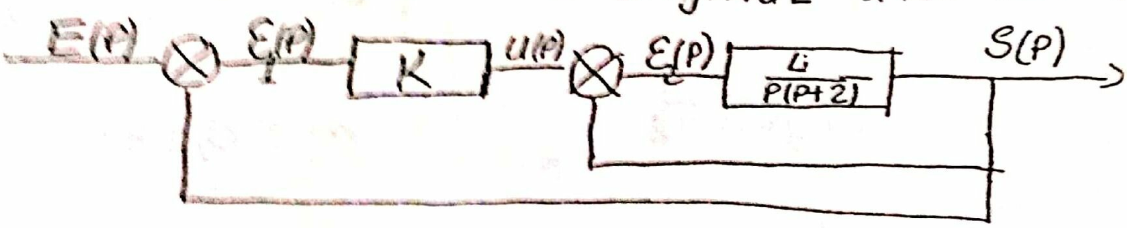
Comme les pôles de l'équation caractéristique sont à coefficient ou à partie réelle négative alors

$\boxed{\text{le système regulé est stable}}$

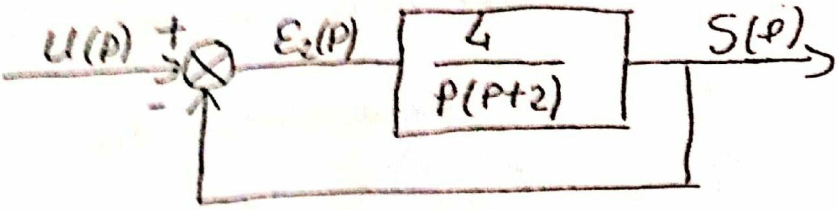
Exercice N°6

1-1) Determinons l'expression de la fonction de Transfert

Considerons le système original avec $\alpha = 0$ et $K = 2$



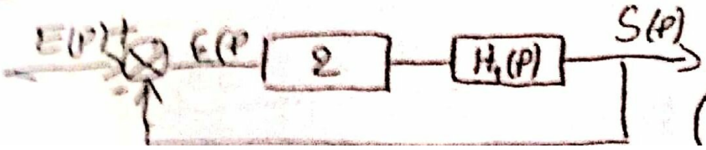
Considerons le systeme tel que



$$H_1(P) = \frac{\frac{4}{P(P+2)}}{1 + \frac{4}{P(P+2)}} \iff \boxed{H_1(P) = \frac{4}{P^2 + 2P + 4}}$$

Le système d'entrée U(P) devient

On a donc :



Dans ce cas $H(p)$ est :

$$H(p) = \frac{2H_1(p)}{1+2H_1(p)}$$ D'après la formule de BLACK

$$\boxed{H(p) = \frac{8}{p^2+2p+12}}$$

1-2°) Calculons ω_0 et m

on met sous forme canonique $H(p)$

$$H(p) = \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{\frac{1}{12}p^2+\frac{1}{6}p+1} \Leftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{2/3}{1+\frac{1}{6}p+\frac{1}{12}p^2}}$$

Comme d'une manière générale

$$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

En identifiant on obtient :

$$\begin{cases} \frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \omega_0 = 3,46 \text{ rd/s} \\ m = 0,289 \end{cases}}$$

1-3°) Calculons la période des oscillations transitoires le prémier dépassement et l'erreur permanente

Période des oscillations transitoires

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-2m^2}} \Rightarrow \boxed{T = 1,896 \text{ s}}$$

Prémier dépassement D%

$$D\% = 100 \times \exp\left(\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

$$= 100 \times \exp\left[\frac{-3,14 \times 0,289}{\sqrt{1-(0,289)^2}}\right]$$

$$\boxed{D\% = 38,7}$$

L'erreur permanente de position

$$\varepsilon = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+2G(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{(p^2+2p+4)E(p)}{p^2+2p+12} \quad \text{où} \quad E(p) = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{p^2+2p+4}{p(p^2+2p+12)}}$$

par application du Théorème de la valeur finale

on a: $$\varepsilon = \lim_{p \to 0} \frac{p^2+2p+4}{p^2+2p+12}.$$

$$\varepsilon = \frac{4}{12} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon = 0{,}33}$$

2-1°/ Determinons La nouvelle valeur de la fonction de transfert si $K=3$ et $\alpha \neq 0$

$$G(p) = \frac{4}{p^2+(2+4\alpha)p+4}$$

$$H'(p) = \frac{3G(p)}{1+3G(p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 3G(p) = \dfrac{12}{p^2+(2+4\alpha)p+4} \\ 1+3G(p) = \dfrac{p^2+(2+4\alpha)p+16}{p^2+(2+4\alpha)p+4} \end{cases}$$

$$\boxed{H'(p) = \frac{12}{p^2+(2+4\alpha)p+16}}$$

2-2°/ Trouvons α pour que le système soit stable

Considerons L'équation caractéristique suivante

$$p^2+(2+4\alpha)p+16 = 0$$

utilisons le critère de ROUTH.

2)

$$\begin{array}{c|ccc} p^2 & 1 & 16 & 0 \\ p^1 & 2+4\alpha & 0. & 0 \\ p^0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ & \gamma & & \end{array}$$

Calculons $\beta_1 ; \beta_2 ; \beta_3$

$$\beta_1 = \frac{16(2+4\alpha)}{2+4\alpha} = 16$$

$\beta_2 = 0$ et $\beta_3 = 0$

· Calculons γ

$\gamma = 0$

On remarque que tous les coefficient de "ROUTH" de la 1ère colonne sont positifs $\forall \alpha > 0$

$$\boxed{\text{donc } \forall \alpha > 0 \text{ le système est stable}}$$

2-3°/ Trouvons $\alpha = \alpha_1$ pour le regime soit apériodique critique

$$H'(P) = \frac{12}{P^2 + (2+4\alpha)P + 16}$$

forme canonique

$$H(P) = \frac{3/4}{1 + \frac{1}{8}(1+2\alpha)P + \frac{1}{16}P^2} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}P + \frac{1}{\omega_0^2}P^2}$$

Par identification L'on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{16} \\ \frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{8}(1+2\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = 4\,rd/s \\ m = \frac{1}{4}(1+2\alpha) \end{cases}$$

Le système étant dans un regime apériodique et critique alors $m = 1$

$$\frac{1}{4}(1+2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 1 + 2\alpha = 4$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$$

2-4 Determinons $s(t)$ pour $\alpha = \alpha_1$

$$H'(P) = \frac{12}{P^2 + (2 + 4(\frac{3}{2}))P + 16}$$

$$H'(P) = \frac{12}{P^2 + 8P + 16} \quad \text{or} \quad S(P) = E(P) \cdot H'(P)$$

$$S(P) = \frac{12}{P(P^2 + 8P + 16)} \Longleftrightarrow S(P) = \frac{12}{P(P+4)^2}$$

Decomposition en éléments simples

$$S(P) = \frac{A}{P} + \frac{B}{P+4} + \frac{C}{(P+4)^2}$$

Appliquons le Théorème des résidus

$$A = \lim_{P \to 0} P S(P) \Longleftrightarrow A = \frac{12}{16} \Longrightarrow \boxed{A = \frac{3}{4}}$$

$$C = \lim (P+4)^2 S(P) = -3 \Longrightarrow \boxed{C = -3}$$

Appliquons le Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{P \to +\infty} P S(P) = A + B = 0 \Longleftrightarrow B = -A = \frac{-3}{4}$$

d'où $\boxed{B = \frac{-3}{4}}$

$$S(P) = \frac{3/4}{P} - \frac{3/4}{P+4} - \frac{3}{(P+4)^2}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{3}{4} - \left(3t + \frac{3}{4}\right) e^{-4t}}$$

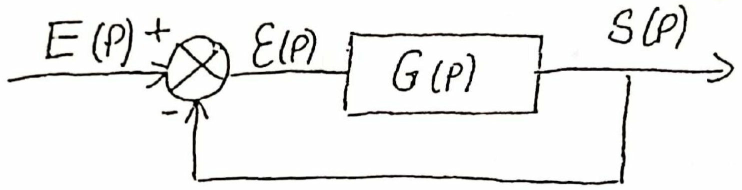
2-5°) Determinons L'erreur permanente

$$\varepsilon = \lim_{P \to +\infty} P\,\mathcal{E}(P) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(P) = \frac{P^2 + 8P + 4}{P(P^2 + 8P + 16)}$$

$$\varepsilon = \lim \frac{P^2 + 8P + 4}{P^2 + 8P + 16} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon = 0,25}$$

Exercice N°7

I 1°/ Déterminons L'erreur statique de position



$$G(P) = \frac{40}{(2P+1)(0,5P+1)}$$

$$\varepsilon = \lim P\varepsilon(P) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1+G(P)} \quad \text{avec}$$

$$E(P) = \frac{1}{P} \quad \text{et} \quad 1+G(P) = \frac{(2P+1)(0,5P+1)+40}{(2P+1)(0,5P+1)}$$

$$\boxed{\varepsilon(P) = \frac{(2P+1)(0,5P+1)}{P[(2P+1)(0,5P+1)+40]}}$$

$$\varepsilon = \lim_{P \to 0} \frac{(2P+1)(0,5P+1)}{(2P+1)(0,5P+1)+40}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{41} \Rightarrow \boxed{\varepsilon \simeq 0,02439}$$

2°/ Etude de La stabilité

Considérons Le polynôme caractéristique

$$D(P) = (2P+1)(0,5P+1)+40 \quad \text{car}$$

$$H(P) = \frac{G(P)}{1+G(P)} \quad \text{et} \quad 1+G(P) = D(P)$$

$$D(P) = P^2+2,5P+41 \Leftrightarrow D(P) = P^2+2,5P+41$$

utilisons le critère de ROUTH

p^2	4	41	0
p^1	2,5	0	0
p^0	41	0	0
	0		

Les coefficients de la première colonne sont tous positifs.

$\boxed{\text{d'où le système est stable}}$

Déterminons sa marge de phase

$M\varphi = Arg[G(j\omega_1)] + 180°$ avec $\|G(j\omega_1)\| = 1$

$$\|G(j\omega_1)\| = 1 \Leftrightarrow \frac{40}{\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{0,25\omega^2+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 + 4,25\omega^2 - 1599 = 0$$

C'est une équation bicarré que l'on obtient alors $x^2 + 4,25x - 1599 = 0$ avec $x = \omega_1^2$.

$\Delta = 6414,0625 \quad \sqrt{\Delta} = 80,08$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 37,91 \\ x = \omega_1^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{x}$$

d'où $\boxed{\omega_1 = 6,16 \text{ rd/s}}$

$Arg[G(j\omega_1)] = -Arctan\, 2\omega_1 - Arctan\, 0,5\,\omega_1$

$M\varphi = -Arctan(2\times 6,16) - Arctan(0,5\times 6,16) + 180$

$M\varphi = -85,36 - 72,01 + 180$

$\boxed{M\varphi = 22,635°}$

3-1 Montrons que la fonction de Transfert en Boucle ouverte est du 1er ordre

Soit $T(P) = G(P)\,C(P)$

$$= \frac{40}{(2P+1)(0,5P+1)} \times 8(P+0,5)$$

$$= \frac{40 \times 4(2P+1)}{(2P+1)(0,5P+1)}$$

$$T(P) = \frac{160}{0,5P+1} \Leftrightarrow \boxed{T(P) = \frac{160}{0,5P+1}}$$

C'est La fonction de Transfert d'un système du 1er ordre de gain statique

$K = 160$

Déterminons La constante de temps τ

$\tau = -\frac{1}{P}$ avec $0,5P+1 = 0$

$P = \frac{-1}{0,5} \Rightarrow P = -2$

$\tau = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\tau = 0,5s}$

3-2 La nouvelle valeur de $\varepsilon_S(P)$

$\varepsilon_B = \lim P.\varepsilon(P)$ avec $\varepsilon(P) = \frac{(0,5P+1)E(P)}{0,5P+161}$

Comme $E(P) = \frac{1}{P}$ alors L'on a:

$$\varepsilon(P) = \frac{(0,5P+1)}{P(0,5P+161)}$$

$$\varepsilon = \lim \frac{0,5P+1}{0,5P+161} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{161} \simeq 0,00621\,s}$$

3-3°/ Verifions La stabilité en Boucle fermée

$$H(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)} \Leftrightarrow H(p) = \frac{160}{0{,}5p+161}$$

$$\Leftrightarrow H(p) = \frac{160}{161} \cdot \frac{1}{\frac{0{,}5}{161}p+1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{H(p) \simeq \frac{0{,}99}{1+0{,}0031p}}$$

On obtient un systèm du 1er ordre.
C'est donc un système stable en boucle fermée
La marge phase est infinie.

3-4. Les améliorations apportées par ce correcteur

Le correcteur a amélioré La précision et a augmenté la stabilité; mais le système est moins rapide.

Exercice N°8

1°) Trouvons K pour que le système soit stable

Considerons l'équation caracteristique

$$1 + C(P)\,G(P)\,H(P) = 0 \iff 1 + \frac{2K}{P(P+1)(P+2)} = 0$$

$$\iff P(P+1)(P+2) + 2K = 0$$

$$\iff P\left[P^2 + 3P + 2\right] + 2K = 0$$

$$\iff P^3 + 3P^2 + 2P + 2K = 0$$

Appliquons le critère de ROUTH

$$\begin{array}{c|cccc}
P^3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
P^2 & 3 & 2K & 0 & 0 \\
P^1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\
P^0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\
 & \gamma & & &
\end{array}$$

Calcul des α_i avec $i = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\alpha_1 = \frac{6 - 2K}{3} \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 0 \quad \text{et } \alpha_4 = 0$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 \times 2K}{\alpha_1} \Rightarrow \beta_1 = 2K \quad \beta_2 = 0\ ;\ \beta_3 = 0\ ;\ \beta_4 = 0$$

$$\gamma = 0$$

Le système est stable si les coefficients de la prémière colonne sont positifs

$$\frac{6 - 2K}{3} > 0 \quad \text{et } 2K > 0$$

$$-2K > -6 \quad \text{et } K > 0$$

$$K < 3 \quad \text{et } K > 0$$

donc $\boxed{0 < K < 3}$

2°) Donnons toutes les racines de L'équati[on] pour $K = 3$

Pour $K=3$ alors $P^3+3P^2+2P+6=0$ (1)

Factorisons L'équation caractéristique (1).

$$P^3+3P^2+2P+6=0 \Leftrightarrow P^2(P+3)+2(P+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (P+3)(P^2+2)=0$$

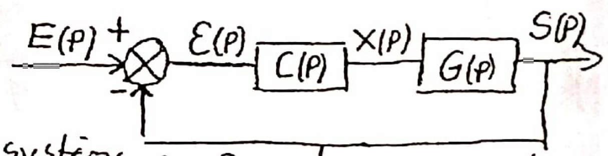
$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} P=-3 \\ P=-i\sqrt{2} \\ P=i\sqrt{2} \end{cases}}$$

verifions La stabilité du systeme

Comme $P=-3$ ou $P=-i\sqrt{2}$ ou $P=i\sqrt{2}$; alors le système n'est pas stable car tous les pôles de L'équation caractéristiques ne sont pas tous à parties réelles négatives.

2°) Représentons La fonction de transfert en Boucle ouverte pour $K=1$

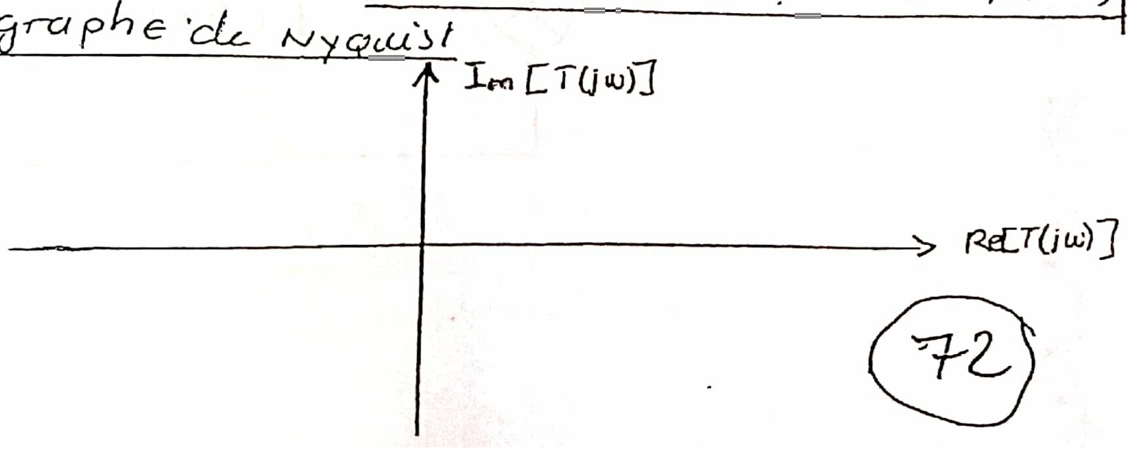
Le schéma bloc devient:



Soit $T(P)$ La Transmittance du système en Boucle ouverte

$$T(P)=\frac{2}{P(P+1)(P+2)} \Leftrightarrow \boxed{T(j\omega)=\frac{-6\omega^2}{9\omega^4+(2\omega-\omega^3)^2}-\frac{2j(2-\omega^2)}{9\omega^3+(2-\omega^2)}}$$

Le graphe de Nyquist



Exercice N°9

1°) a-) Determinons La fonction de Transfert $H(p)$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{2}\ 2}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 10 rd/s \text{ et } \frac{2m}{\omega_0}$$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + p + 0{,}01p^2}$$

Deduisons La valeur de m

$$m = \frac{\omega_0}{2} \iff \boxed{m = 5}$$

Comme $m > 1{,}5$; alors L'on a :

$$H(p) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p} \iff \boxed{H(p) = \frac{\frac{1}{2}}{1+p}}$$

b-) Determinons La fonction de Transfert $G(p)$ en boucle ouverte

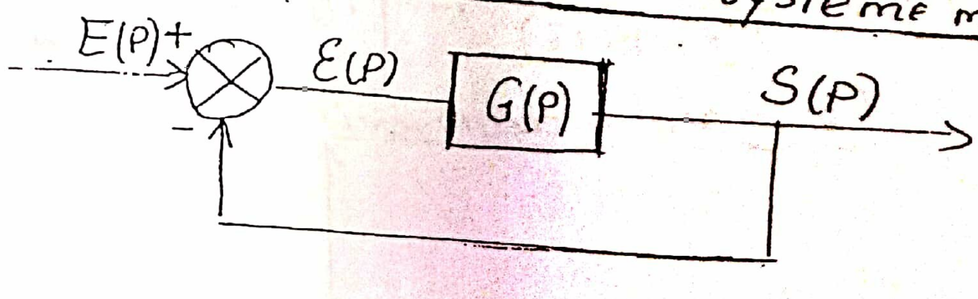
D'après La formule de BLACK, $H(p) = \frac{\frac{1}{2}}{1+p}$; on en déduit

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 - H(p)} \quad \text{avec} \quad 1 - H(p) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1+p}$$

$$1 - H(p) = \frac{p + \frac{1}{2}}{1+p}$$

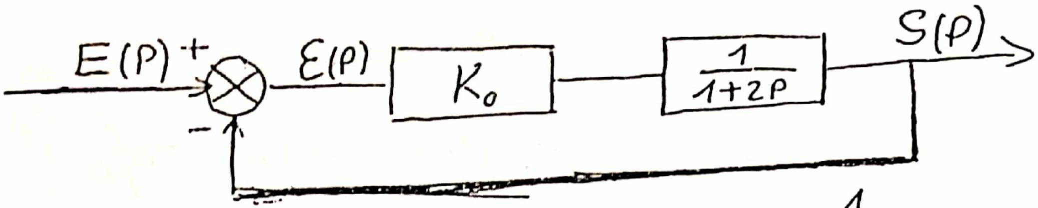
$$G(p) = \frac{\frac{1}{2}}{1+p} \times \frac{1+p}{\frac{1}{2}+p} \iff \boxed{G(p) = \frac{1}{1+2p}}$$

2-) Schéma fonctionnel du système mécanique



1

3 a-/ Determinons Le gain statique du systèm



$$C(P) = K_0 \quad \text{et} \quad G(P) = \frac{1}{1+2P}$$

$$K = \lim_{P \to 0} H'(P) \quad \text{avec} \quad H'(P) = \frac{K_0 G(P)}{1 + K_0 G(P)}$$

or $1 + K_0 G(P) = \frac{1 + 2P + K_0}{1 + 2P}$ alors L'on a:

$$\boxed{H'(P) = \frac{K_0}{1 + K_0 + 2P}}$$

Deduisons K

$$\boxed{K = \frac{K_0}{1 + K_0}}$$ car Lorsque $P \to 0$ $\lim H'(P) = \frac{K_0}{1+K_0}$

Determinons K_0

$$\varepsilon = \lim_{P \to 0} P\,\varepsilon(P) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(P) = \frac{E(P)}{1 + K_0 G(P)}$$

L'on sait que $E(P) = \frac{6}{P}$ et $1 + K_0 G(P) = \frac{1 + K_0 + 2P}{1 + 2P}$

$$\varepsilon(P) = \frac{6(1+2P)}{P(1+K_0+2P)}$$

$$\varepsilon = \lim_{P \to 0} \frac{6(1+2P)}{1+K_0+2P} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{6}{1+K_0}}$$

Comme $\varepsilon = \frac{1}{8}$ alors L'on a:

$$\frac{6}{1+K_0} = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow \frac{1+K_0}{6} = 8 \Longleftrightarrow 1 + K_0 = 48$$

$$\boxed{K_0 = 47}$$

$$K = \frac{47}{1+47} \Longleftrightarrow \boxed{K = \frac{47}{48}}$$

b°/ vérification pour L'...

$\varepsilon = \lim pE(p)$ avec $E(p) = \dfrac{\ldots}{1+K_c G(p)}$ où $E(p) = \dfrac{v}{p^2}$

où v = rampe d'amplitude $6V/s$.

$$\varepsilon = \lim_{p \to 0} \frac{6(1+2p)}{p(1+K_c+2p)} \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon = +\infty}$$

Le système ne supportera pas une alimentation d type rampe

c°/ Etudions la stabilité du système asservi

$$\boxed{H'(p) = \frac{47}{48+2p}}$$

L'équation caractéristique $2p+48=0$ admet comme solution $p=-24$. (partie réelle négat

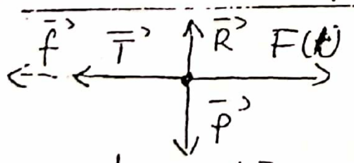
d'où le système stable.

D'autre part

Le système est système du 1^e ordre ; donc ce système est stable.

Exercice N°10

1°/ Trouvons la fonction de Transfert $\dfrac{X(p)}{F(p)} = H(p)$



Le système M est un point matériel

Le système avec les forces :

$\vec{f}$ = vecteur force de frottement ; $\vec{T}$ = vecteur tension du ressort

$\vec{P}$ = vecteur poids $\vec{R}$ = vecteur réaction du plan

$\vec{F}(t)$ = vecteur force motrice.

$$\vec{F}(t) + \vec{T} + \vec{f} + \vec{R} + \vec{P} = m_0\vec{a}$$

projection sur L'axe xx'

$$F(t) - Kx - bv(t) + 0 + 0 = m_0 a$$

avec $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ et $a = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

$$F(t) - Kx - b\frac{dx}{dt} = m_0\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m_0\frac{d^2x}{dt^2} + Kx + b\frac{dx}{dt} = F(t)$$

$$\boxed{Kx + b\frac{dx}{dt} + m_0\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)}$$

La Transformée de Laplace de l'équation encadrée

$$KX(p) + bpX(p) + mp^2X(p) = F(p)$$

$$X(p)[K + bp + mp^2] = F(p)$$

$$\frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{K + bp + mp^2} \Longleftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{1}{K + bp + mp^2}}$$

2°) Trouvons Le coefficient d'amortissement m et la pulsation propre ω_0

$$H(p) = \frac{1}{K + bp + mp^2} \Longleftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{1/K}{1 + \frac{b}{K}p + \frac{m_0}{K}p^2}}$$

D'une manière générale $H(p) = \dfrac{1/K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

par identification L'on a: $\dfrac{2m}{\omega_0} = \dfrac{b}{K}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \dfrac{m}{K}$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$m_0 = \frac{b}{2K}\omega_0 \Longleftrightarrow m = \frac{b}{2\sqrt{Km}}$$

Conclusion

$$\boxed{m = \frac{b}{2\sqrt{Km_0}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_0}}}$$

si $b = 0$ alors le système est non amorti
si $b \neq 0$ alors le système est amorti

3-) La pulsation ω à la résonance

A la résonance, $\omega = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_2}}$ et $m = \frac{b}{2\sqrt{Km_2}} \Rightarrow m^2 = \frac{b^2}{4Km_2}$

d'où $\omega = \sqrt{\frac{4Km_2 - 2b^2}{4m_2^2}}$

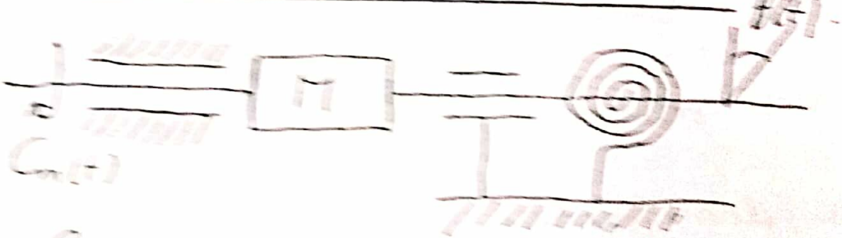
$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{4Km_2 - 2b^2}}{2m_2}}$$

A la résonance, les amplitudes deviennent maximales, donc il y a des oscillat° grandes qui peuvent entraîner des ruptures.

Exercice N°11

1-) L'équation différentielle

$\theta(t)$



$C_m(t)$

$C_m(t)$: Couple moteur (entrée) ; $\theta(t)$ = position angulaire (sortie)

f : coefficient de frottement visqueux.

J : moment d'inertie. K : raideur du ressort en spi

$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ex}) = J\ddot{\theta}$ avec $K\theta(t)$ = force développée p le ressort.

$f\dot{\theta}(t)$: force de frottement

on a : $J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = C_m(t) - [K\theta(t) + f\frac{d\theta(t)}{dt}]$

$$C_m(t) = K\theta + f\frac{d\theta(t)}{dt} + J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$ d'où l'on a :

$$\boxed{K\theta(t) + f\frac{d\theta(t)}{dt} + J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = C_m(t)}$$

Determinons La fonction de Transfert

$$K\theta(P) + fP\theta(P) + JP^2\theta(P) = C_m(P)$$

$$\theta(P)[K + fP + JP^2] = C_m(P)$$

$$\frac{\theta(P)}{C_m(P)} = \frac{1}{K + fP + JP^2}$$

$$\boxed{H(P) = \frac{1}{K + fP + JP^2}}$$

Exercice N°12

I

1°/ Le gain statique T_0 du système en Boucle fermée

$$T_0 = \frac{-1}{-0{,}5} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2}$$

2°/ Justifions :

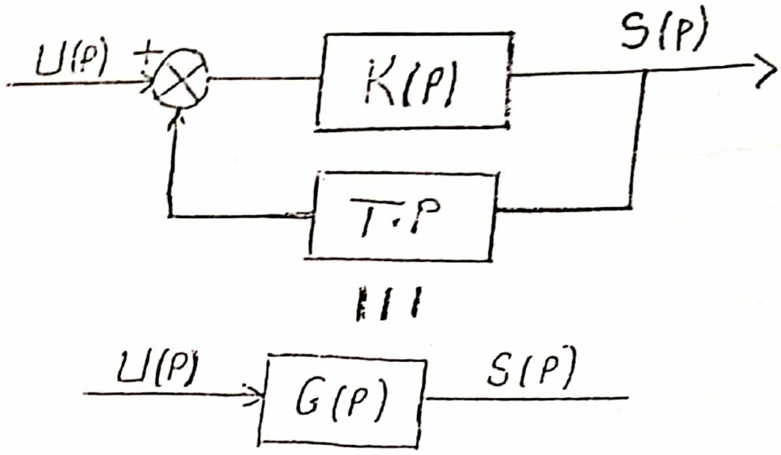
Comme $T_0 > 0$ ~~de~~ que le point critique étant Sur La gauche, alors, le système est stable.

II

1.) L'expression de $G(P)$

$$K(P) = \frac{5}{P+1} \qquad C(P) = \frac{1}{P}$$

Considerons le système d'entrée $U(P)$



$$G(P) = \frac{K(P)}{1 + T \cdot P K(P)} \Longleftrightarrow \boxed{G(P) = \frac{5}{1+(1+T)P}}$$

2°) <u>Traçons Le diagramme de BODE de G(P)</u>

$$G(j\omega) = \frac{5}{1 + j(1+T)\omega}$$ en remplaçant P par $j\omega$

$$\|G(j\omega)\| = \frac{5}{\sqrt{1+(1+T)^2\omega^2}}$$

Le module $(M_G)_{dB}$ en decibels

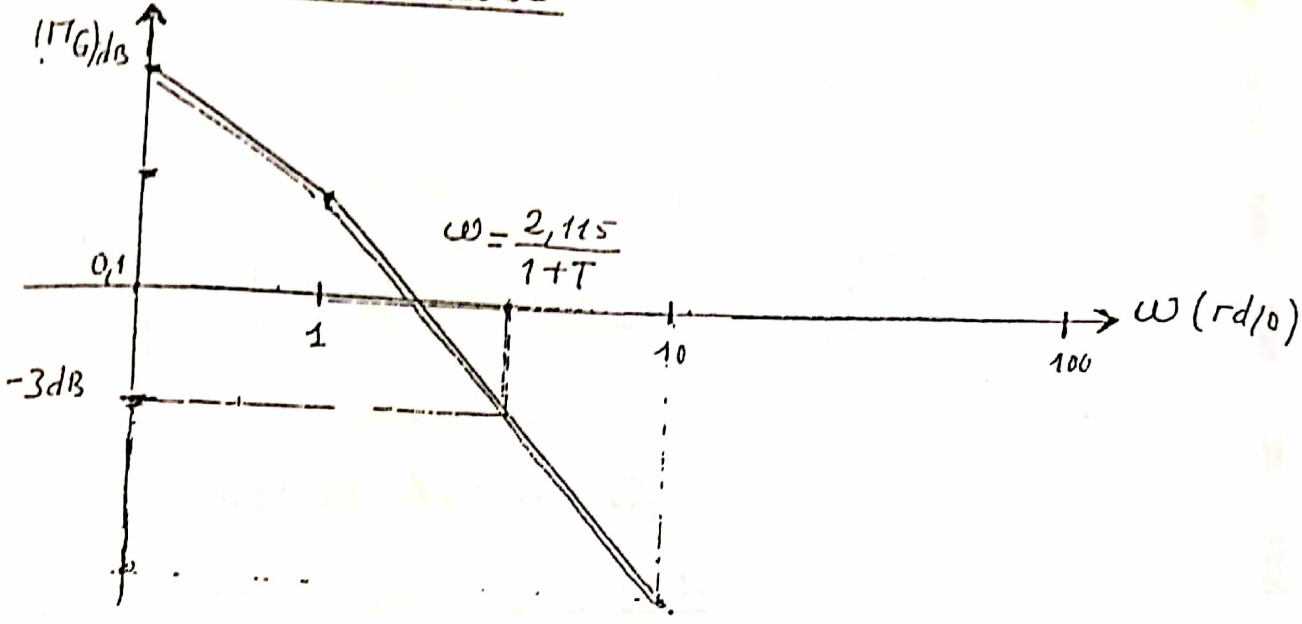
$$(M_G)_{dB} = 20\log\|G(j\omega)\| \Longleftrightarrow (M_G)_{dB} = 20\log 5 - 10\log[1+(1+T)$$

$$\boxed{(M_G)_{dB} \simeq 14 - 10\log[1+(1+T)^2\omega^2]}$$

Tableau de valeurs pour le graphe de BODE

ω (rd/s)	0,1	1	10
$(M_G)_{dB}$	$14 - 10\log[1+0{,}01(1+T)^2]$	$14 - 10\log[1+(1+T)^2]$	$14 - 10\log[1+100(1+$

Le diagramme de BODE



Deduisons ω pour que le module en dB soit -3dB

$$20\log 5 - 10\log[1+(1+T)^2\omega^2] = -3dB$$

$$10\log[1+(1+T)^2\omega^2] = 3 + 20\log 5$$

$$10\log[1+(1+T)^2\omega^2] = 3 + 14$$

$$\text{Log}[1+(1+T)^2\omega^2] = \frac{17}{10}$$

$$\text{Log}[1+(1+T)^2\omega^2] = 1,7$$

$$1+(1+T)^2\omega^2 = e^{1,7}$$

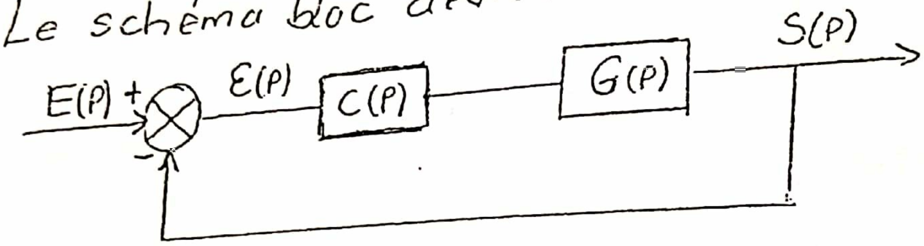
$$\omega^2 = \frac{e^{1,7}-1}{(1+T)^2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4,47}}{1+T}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2,115}{1+T}\ rd/s}$$

3°) La fonction de Transfert en Boucle fermée $F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$

Le schéma bloc devient



D'après La formule de BLACK, L'on a :

$$F(P) = \frac{C(P) \cdot G(P)}{1 + C(P)\,G(P)} \quad \text{avec} \quad C(P)\,G(P) = \frac{5}{P[1+(1+T)P]}$$

$$1 + C(P)G(P) = 1 + \frac{5}{P[1+(1+T)P]}$$

$$= \frac{P[1+(1+T)P]+5}{P[1+(1+T)P]}$$

d'où L'on a :

$$\boxed{F(P) = \frac{5}{P[1+(1+T)P]+5}}$$

Deduisons L'équation caractéristique

C'est le denominateur de la fonction F(P)

$$P[1+(1+T)P]+5 = 0 \iff \boxed{5 + P + (1+T)P^2 = 0}$$

4.) Etudions La stabilité selon Le critère de ROUTH

p^2	$1+T$	5	0
p^1	1	0	0
p^0	α_1	α_2	α_3
	β		

Determination de α_i et β

$$\alpha_1 = \frac{5 \times 1 - 0 \times (1+T)}{1} \Rightarrow \alpha_1 = 5$$

$\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$

$\beta = 0$

on obtient finalement

39)

p^2	$1+T$	5	0
p^1	1	0	0
p^0	5	0	0
	0		

Tous les "coefficients de ROUTH" de La première colonne sont $1+T; 1; 5; 0$

Si $T > -1$ alors le système est stable

Si $T = -1$ alors le système est juste instable.

Si $T < -1$ alors système est instable.

5°) Donnons $s(t)$ pour $T = 1/5 \Rightarrow T = 0,2$

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{5}{5+P+1,2P^2} \Rightarrow S(P) = \frac{5}{P[5+P+1,2P^2]} \quad \text{Car } E(P) = \frac{1}{P}$$

$$S(P) = \frac{1}{P[1+0,2P+0,24P^2]}$$ La Transformée inverse de $S(P)$

est $s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t}\left[\sin(\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t + \varphi)\right]$

Determinons m et ω_0.

$$\frac{2m}{\omega_0} = 0,2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = 0,24 \Rightarrow \omega_0^2 = 4,167$$

$\omega_0 = 2,041\ rd/s$

$$m = \frac{0,2\,\omega_0}{2} \Rightarrow m = \frac{0,2 \times 2,041}{2} \Rightarrow m = 0,2041$$

d'où $\boxed{\omega_0 = 2\ rd/s \text{ et } m = 0,2}$

$$\boxed{s(t) = 1 - 0,96e^{-0,4t}[\sin(1,96t + 78)]}$$

Deduisons A, B; ω_p et θ

en la mettant sous la forme $s(t) = A[1 - B\sin(\omega_p t + \theta)]$

On en deduit $\boxed{A = 1 \quad B = 0,96e^{-0,4t} \quad \omega_p = 1,96 \quad \theta = 78°}$

Exercice N°13

1°/ Etudions la stabilité : critère de ROUTH

L'équation caractéristique

$1+F(P)=0 \Longleftrightarrow 1+xP+P^2=0$

$$\begin{array}{c|ccc} P^2 & 1 & 1 & 0 \\ P^1 & x & 0 & 0 \\ P^0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ & \beta & & \end{array}$$

Déterminons α_i où $i \in \{1;2;3\}$ et β

$\alpha_1 = \frac{x}{x} \Rightarrow \alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$

$\beta = 0$

donc on a :

$$\begin{array}{c|ccc} P^2 & 1 & 1 & 0 \\ P^1 & x & 0 & 0 \\ P^0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & \end{array}$$

Si $x>0$ alors le système est stable

Si $x<0$ alors le système est i…

Si $x=0$ alors le system est juste instable.

2°/ La valeur de x pour la juste instabilité

Il y a la juste instabilité lorsque

$\boxed{x=0}$

3a°/ La Reponse $s(t)$ du système si $E(P)=1$

$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{P(P+2)} \Longleftrightarrow S(P) = \frac{1}{P(P+2)}$

$S(P) = \frac{A}{P} + \frac{B}{P+2}$

Déterminons A et B

$A = \lim_{P\to 0} PS(P) \Rightarrow A = \lim_{P\to 0} \frac{1}{P+2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$B = \lim_{P\to -2} (P+2)S(P) \Rightarrow B = \lim_{P\to -2} \frac{1}{P} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$S(P) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P} - \frac{1}{P+2}\right]$ d'où $\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\left[1-e^{-2t}\right)}$

b) Le temps de réponse à 5% du systè...

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \quad \text{avec } s(t) = e'(t) - 0{,}05\, e'(t)$$

où $e'(t) = \frac{1}{2}$. on a donc

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}05)$$

$$1 - e^{-2t} = 1 - 0{,}05$$

$$e^{-2t} = 0{,}05$$

$$t_r = \frac{-1}{2}\ln(0{,}05)$$

$$\boxed{t_r = 1{,}5\, s}$$

4 a) Le temps de réponse du système Bouclé

$$H(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{p(p+2)} \times \frac{p(p+2)}{1 + 2p + p^2}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2p + p^2}$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(p+1)^2} \Leftrightarrow S(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2}$$

$$B = \lim_{p \to -1} (p+1)^2 S(p) \Rightarrow B = 1$$

$$\lim_{p \to +\infty} (p+1) S(p) = 0 = A + 0 \Rightarrow A = 0$$

$$S(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow \boxed{s(t) = t e^{-2t}}$$

Déterminons m

$$\frac{2m}{\omega_0} = 2 \Leftrightarrow \frac{m}{\omega_0} = 1 \Rightarrow m = \omega_0$$

Or $\frac{1}{\omega_0^2} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1\, rd/s \Rightarrow \boxed{m = 1}$

$$t_r \cdot \omega_0 \neq 1 = 5 \Rightarrow \boxed{t_r = 4\, s} \text{ (Abaque)}$$

Dans ce cas le système Bouclé est Lent.

b) Le type de correcteur à utiliser

Pour améliorer la vitesse du système bouclé on utilisera le correcteur dérivateur.

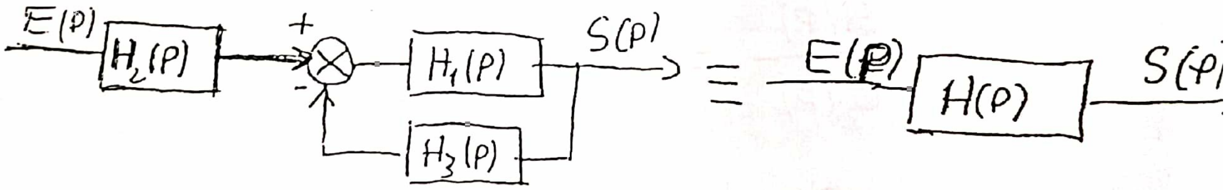
c) Précaution à prendre

Il est souhaitable de limiter l'action dérivée afin de pas amplifier les bruits de haute fréquence et de limiter l'amplitude des impulsions dues aux discontinuités.

Exercice N°14

La réponse finale ou valeur finale de $s(t)$

$$s(\infty) = \lim_{p \to 0} pS(p)$$



$$H(p) = H_2(p) \cdot \frac{H_1(p)}{1 + H_3(p)H_1(p)} \Leftrightarrow H(p) = \frac{75(1+0{,}1p)}{[p(1+p)(1+0{,}1p)+15][(1+10p)(1+5p)]}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{75(1+0{,}1p)}{[p(1+p)(1+0{,}1p)+15][(1+10p)(1+5p)]}}$$

Comme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ alors $S(p) = H(p) \cdot E(p)$

$$S(p) = \frac{75(1+0{,}1p)}{p[p(1+p)(1+0{,}1p)+15][(1+10p)(1+5p)]} \quad \text{avec } E(p) = \frac{1}{p}$$

$$s(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{75(1+0{,}1p)}{[p(1+p)(1+0{,}1p)+15][(1+10p)(1+5p)]} = \frac{75}{15}$$

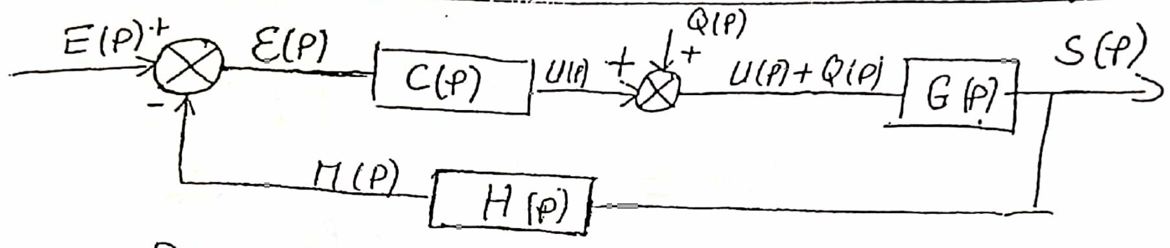
$$\boxed{s(\infty) = 5}$$

Exercice N°15

a°) Valeur finale finale $s(\infty)$

$$s(\infty) = \lim_{P \to 0} PS(P)$$

Determinons $S(P)$ par la methode systématique



Dans la chaîne directe L'on a:

$$C(P) = \frac{U(P)}{\varepsilon(P)} \Rightarrow U(P) = C(P)\,\varepsilon(P)$$

$$G(P) = \frac{S(P)}{U(P)+Q(P)} \Rightarrow S(P) = \big(Q(P) + C(P)\,\varepsilon(P)\big)\,G(P)$$

or $\varepsilon(P) = E(P) - M(P)$ avec $M(P) = S(P)\cdot H(P)$

Ainsi on a.

$$S(P) = \big[Q(P) + C(P)[E(P) - S(P)H(P)]\big]\,G(P)$$

$$S(P) = \big(Q(P) + C(P)E(P) - C(P)S(P)H(P)\big)\,G(P)$$

$$S(P) + G(P)S(P)\,C(P)\,H(P) = G(P)C(P)\,E(P) + Q(P)\,G(P)$$

$$S(P)\,[1 + G(P)C(P)H(P)] = C(P)G(P)E(P) + Q(P)G(P)$$

$$\boxed{S(P) = \frac{G(P)C(P)}{1+G(P)C(P)H(P)}E(P) + \frac{G(P)}{1+G(P)C(P)H(P)}Q(P)}$$

$$\boxed{S(P) = \frac{6(1+P)}{P[(2+P)(1+2P)(1+P)+0{,}25]} + \frac{12(2+P)(1+P)}{P[(2+P)(1+2P)(1+P)+0{,}25]}}$$

$$s(\infty) = \lim_{P \to 0}\left[\frac{6(1+P)}{(2+P)(1+2P)(1+P)+0{,}25} + \frac{12(2+P)(1+P)}{(2+P)(1+2P)(1+P)+0{,}25}\right]$$

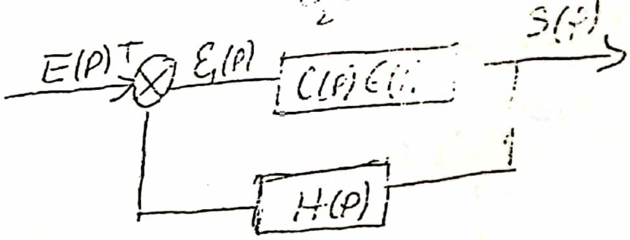
$$s(\infty) = \frac{6}{2{,}25} + \frac{24}{2{,}25} \Leftrightarrow s(\infty) = \frac{30}{2{,}25}$$

$$\boxed{s(\infty) = 13{,}3\ V}$$

b.) L'erreur ε eff...

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ avec ... ε_2 ... à $Q(P)$

Si $Q(P) = 0$



$$\varepsilon_1(p) = \frac{E(p)}{1 + C(p)G(p)H(p)}$$

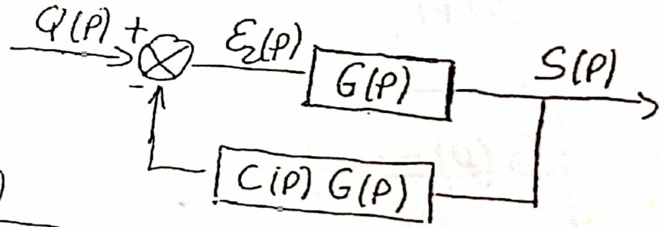
avec
$$\begin{cases} E(p) = \dfrac{24}{p} \\ 1 + C(p)G(p)H(p) = \dfrac{(2+p)(1+2p)(1+p) + 0{,}25}{(2+p)(1+2p)(1+p)} \end{cases}$$

$$\boxed{\varepsilon_1(p) = \frac{24(2+p)(1+2p)(1+p)}{p\left[(2+p)(1+2p)(1+p) + 0{,}25\right]}}$$

$$\varepsilon_1 = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) \iff \varepsilon_1 = \lim_{p \to 0} \frac{24(2+p)(1+2p)(1+p)}{(2+p)(1+2p)(1+p) + 0{,}25}$$

$$\iff \boxed{\varepsilon_1 = 21{,}33\,V}$$

si $E(P) = 0$



$$\varepsilon_2(p) = \frac{Q(p)}{1 + C(p)G(p)H(p)} \iff \varepsilon_2(p) = \frac{12(2+p)(1+2p)(1+p)}{p\left[(2+p)(1+2p)(1+p) + 0{,}25\right]}$$

$$\varepsilon_2 = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon_2(p) = \lim_{p \to 0} \frac{12(2+p)(1+2p)(1+p)}{(2+p)(1+2p)(1+p) + 0{,}25}$$

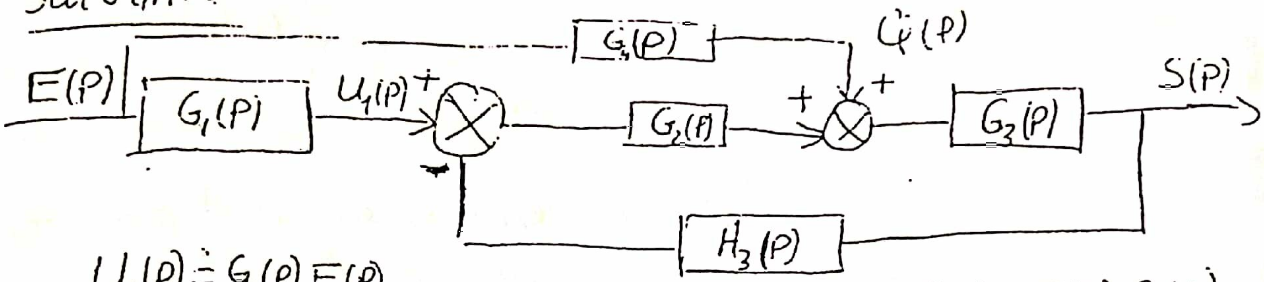
$$\boxed{\varepsilon_2 = 10{,}67\,V}$$

$$\varepsilon = 21{,}33 + 10{,}67 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 32\,V}$$

5)

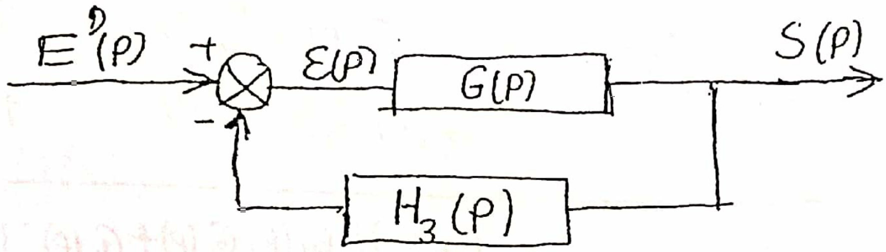
Exercice N°1 :

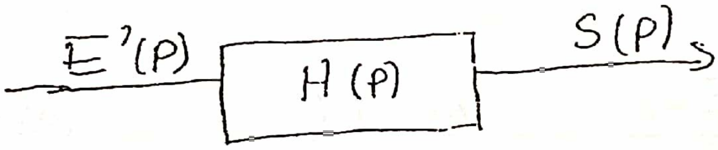
Reduisons le schéma en établissant l'équivalence suivante



$U_1(P) = G_1(P)\,E(P)$

$Q(P) = E(P)\,G_4(P)$





$$S(P) = \frac{G_2(P)\,G_3(P)\,U_1(P)}{1+G_2(P)G_3(P)H_3(P)} + \frac{G_3(P)}{1+G_2(P)G_3(P)H_3(P)}\,Q(P)$$

Comme $U_1(P) = E(P)\,G_1(P)$ et $Q(P) = E(P)\,G_4(P)$.

$$\boxed{S(P) = \frac{G_1(P)\,G_2(P)G_3(P)\;E(P)}{1+G_2(P)G_3(P)H_3(P)} + \frac{G_3(P)\;G_4(P)}{1+G_2(P)G_3(P)H_3(P)}\,E(P)}$$

Deduisons $H(P)$

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{G_1(P)\,G_2(P)G_3(P) + G_3(P)\,G_4(P)}{1+G_2(P)G_3(P)H_3(P)}$$

$$\boxed{H(P) = \frac{G_3(P)\left[G_1(P)\,G_2(P) + G_4(P)\right]}{1+G_2(P)G_3(P)H_3(P)}}$$

Deduisons $G(p)$ par application de BLACK.

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H_3(p)} \Leftrightarrow \boxed{G(p) = \frac{H(p)}{1-H_3(p)H(p)}}$$

Il suffit de remplacer $H(p)$ par son expression pour avoir celle de G

$$G(p) = \frac{G_3(p)\left[G_1(p)G_2(p)+G_4(p)\right]}{1+G_2(p)G_3(p)H_3(p)} \times \frac{1+G_2(p)G_3(p)H_3(p)}{1+G_2(p)G_3(p)H_3(p)-H_3G_3(p)\left[G_1(p)G_2(p)+G_4(p)\right]}$$

$$\boxed{G(p) = \frac{G_3(p)\left[G_1(p)G_2(p)+G_4(p)\right]}{1+G_2(p)G_3(p)H_3(p)-H_3G_3(p)\left[G_1(p)G_2(p)+G_4(p)\right]}}$$

Exercice N° 17

1°) Determinons La fonction de Transfert

$$1{,}3\frac{d^2s(t)}{dt^2}+12{,}74\frac{ds(t)}{dt}+63{,}7s(t) = 63{,}7\,e(t)$$

$$1{,}3\,p^2S(p)+12{,}74\,pS(p)+63{,}7\,S(p) = 63{,}7\,E(p)$$

$$S(p)\left[1{,}3p^2+12{,}74p+63{,}7\right] = 63{,}7\,E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{63{,}7}{63{,}7+12{,}74p+1{,}3p^2}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{1+0{,}2p+0{,}02p^2}}$$

7/

Deduisons m et ω_n

D'une manière générale $H(P) = \dfrac{K}{1+\frac{2m}{\omega_n}P+\frac{1}{\omega_n^2}P^2}$

par identification L'on a :

$\frac{1}{\omega_n^2} = 0,02 \Rightarrow \omega_n^2 = 3,2 \Rightarrow \omega_n = 1,8\ rd/s$

$\frac{2m}{\omega_n} = 0,2 \Rightarrow m = 0,1\,\omega_n$

$\boxed{m = 0,18} \Rightarrow \boxed{m \simeq 0,2}$

2°) Determinons La fonction $G(P)$ en Boucle ouverte

$G(P) = \dfrac{H(P)}{1-H(P)}$ avec $H(P) = \dfrac{1}{1+0,2P+0,02P^2}$ et

$1-H(P) = \dfrac{0,2P+0,02P^2}{1+0,2P+0,02P^2}$

$G(P) = \dfrac{1}{P(0,2+0,02P^2)} \Leftrightarrow G(P) = \dfrac{5}{P(1+0,1P)}$

$$\boxed{G(P) = \dfrac{5}{P(1+0,1P)}}$$

3°/ Le temps de réponse du ~~du~~ système

Comme $m \simeq 0,2$; alors L'on a : $t_r\,\omega_n = 15$ (Reference aux ABAques des temps de Reponse reduits)

$t_r = \dfrac{15}{3,2} \Rightarrow \boxed{t_r = 4,7\ s}$

4/

4-1 Determinons K ...

$M_p = 1{,}4$

Par definition le pic de résonance est :

$$M_p = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

$$(M_p)^2 = \frac{1}{4m^2(1-m^2)} \Leftrightarrow (M_p)^2\left[4m^2(1-m^2)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m^4 - \frac{1}{M_p^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4m^4 - 4m^2 + \frac{1}{M_p^2} = 0}$$

Trouvons l'expression de m

$$H(P) = \frac{KG(P)}{1+KG(P)} \quad \text{où} \quad KG(P) = \frac{5K}{P(1+0{,}1P)}$$

$$1+KG(P) = \frac{P(1+0{,}1P)+5K}{P(1+0{,}1P)}$$

$$H(P) = \frac{5K}{P(1+0{,}1P)} \times \frac{P(1+0{,}1P)}{P(1+0{,}1P)+5K}$$

$$H(P) = \frac{5K}{5K+P+0{,}1P^2} \Leftrightarrow \boxed{H(P) = \frac{1}{1+\frac{1}{5K}P+\frac{0{,}1}{5K}P^2}}$$

On a : $\frac{2m}{\omega_n} = \frac{1}{5K}$ et $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{0{,}1}{5K} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{50K}$

On en déduit m

$$\boxed{m = \frac{\sqrt{50K}}{10K}} \quad \text{ou} \quad \boxed{m = \frac{1}{\sqrt{2K}}}$$

En remplaçant m par sa valeur dans l'équation Bicarré, L on a

$$\frac{4}{4K^2} - \frac{4}{2K} + \frac{1}{(1,4)^2} = 0 \quad \text{avec } m_p = 1,4$$

$$\frac{1}{K^2} - \frac{2}{K} + \frac{1}{1,96} = 0$$

En multipliant cette équation par $1,96K^2$, on a.

$$1,96 - 3,92K + K^2 = 0$$

Calcul le discriminant Δ

$$\Delta = (3,92)^2 - 4(1,96)$$

$\Delta = (2,75)^2 \Rightarrow \Delta > 0$; donc deux solutions

$$\begin{cases} K = \frac{3,92+2,75}{2} = \frac{6,67}{2} \\ \text{ou} \\ K = \frac{3,92-2,75}{2} = 0,585 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = 3,335 \\ \text{ou} \\ K = 0,585 \end{cases}$$

Comment choisir K pour qu'on ait un pic de résonnance ?

Pour cela, il faut calculer $m = \frac{1}{\sqrt{2K}}$

Si $K = 3,335 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{6,670}} \Rightarrow \boxed{m = 0,38}$

Si $K = 0,585 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2 \times 0,585}} \Rightarrow \boxed{m = 1,07}$

Pour avoir un pic de résonnance, il faut que le système soit oscillatoire ; c'est-à-dire $m < 1$ d'où on choisit $\boxed{K \simeq 3,335}$

4-2 Calculons m et ω_n

D'après ce qui précède $\boxed{m = 0,38}$ ou $\boxed{m \simeq 0,4}$

$$\omega_n = \sqrt{50K} \Rightarrow \boxed{\omega_n \simeq 12,91\ rd/s}$$

Déterminons le temps de réponse à 5%

Comme $m \simeq 0,4$ alor $t_r \omega_n = 8 \Rightarrow t_r = \frac{8}{12,91}$

$$\boxed{t_r \simeq 0,62\ s}$$

Conclusion

Le système est devenu très rapide par L'apport de L'amplificateur de gain K agissant Comme un correcteur proportionnel, dont le rôle est de rendre un système rapide

Exercice N°18

1.) La fonction de transfert en Boucle Fermée

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)} \quad \text{avec} \quad KG(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

$$1 + KG(p) = \frac{p(1+Tp) + K}{p(1+Tp)}$$

$$H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} \times \frac{p(1+Tp)}{p(1+Tp)+K} \Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{K}{K + p + Tp^2}}$$

Forme canonique de H(p)

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{1+\frac{1}{K}p+\frac{T}{K}p^2}}$$

car divise en facteur par K.

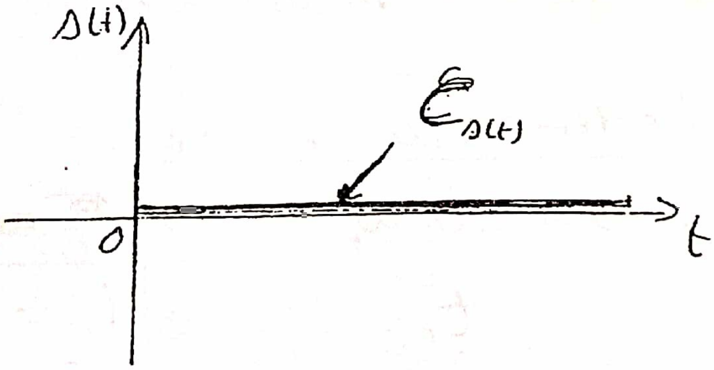
2·) Le coefficient m pour $K \to 0$ et L'allure

$$\frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{K} \Rightarrow m = \frac{\omega_0}{2K} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T}}$$

$$m = \sqrt{\frac{K}{T} \times \frac{1}{4K^2}} \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{1}{2\sqrt{TK}}}$$

Lorsque $K \to 0$ $\boxed{m \to +\infty}$ · alors $H(p) \to 0$

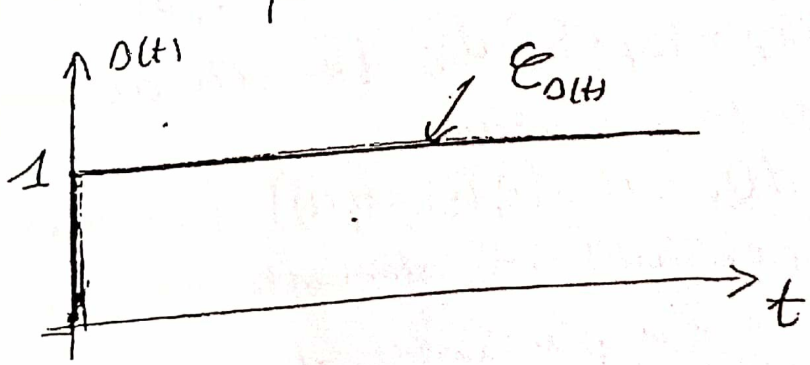
d'où $s(t) \to 0$



3·) Coefficient m pour $K \to +\infty$ et L'allure

Si $K \to +\infty \Rightarrow m \to 0$ alors $H(p) \to 1$

d'où $S(p) \to \frac{1}{p} \Rightarrow s(t) = 1$.



52

4-1 Calculons H(P)

$$H(P) = \frac{40}{16 + P + \frac{1}{2}P^2}$$ ou ...

4-2 Le premier dépassement

Par définition $D\% = 100\, e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$

Déterminons m et ω_0

$$H(P) = \frac{20}{P^2 + 2P + 20} = \frac{\omega_0^2}{P^2 + 2m\omega_0 P + \omega_0^2}$$

on en déduit que $\omega_0 = \sqrt{20} \simeq 4,47\ rd/s$

$m = 0,223$

$$D\% = 100\, e^{-0,223 \cdot \frac{3,14}{\sqrt{1-(0,223)^2}}} \Rightarrow \boxed{D\% = 48,75}$$

4-3) Le temps de réponse

$m \simeq 0,2$ alors $t_r\,\omega_0 = 15 \Rightarrow$

$$t_r = \frac{15}{4,47} \Rightarrow \boxed{t_r = 3,35s}$$

Exercice N°19

1) Montrons que $\theta_i(P) = \frac{1}{1+\tau P}(\alpha P_c + \theta_e(P))$ Condition d'Heav

$dQ' = (\delta_f + \delta_c)\, d\theta_i$ (quantité de chaleur nécessaire à l'él... de température.

$dQ_e = KS(\theta_i(t) - \theta_e(t))$ (chaleur perdu par l'encein... pendant un intervalle de temp dt

La puissance de charleur est $P_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

$P_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = KS[\theta_i(t) - \theta_e(t)] + (S_p + S_c)\frac{d\theta_i}{dt}$ avec

$S_p + S_c = S$ d'où l'on a

$P_c(t) = KS[\theta_i(t) - \theta_e(t)] + S\frac{d\theta_i}{dt}$

La transformée est dans les condition d'Heaviside

$P_c(P) = KS\,\theta_i(P) - KS\theta_e(P) + S\,P\,\theta_i(P)$

$\theta_i(P) = \frac{1}{1 + \frac{S}{KS}P}\left[\frac{1}{KS}P_c(P) + \theta_e(P)\right]$

posons $\tau = \frac{S}{KS}$ et $\alpha = \frac{1}{KS}$ d'où

$$\boxed{\theta_i(P) = \frac{1}{1 + \tau P}[\alpha P_c(P) + \theta_e(P)]}$$

2.) Calculons α et τ si $S = 140\ KJ/°C$ et $KS = 7W/°C$

$\alpha = \frac{1}{KS} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{7}\ °C/W}$ et $\tau = \frac{S}{KS} \Rightarrow$

$$\boxed{\tau = 2 \cdot 10^4 s}$$

3.) L'évolution de la température de l'intérieur du four.

Le Bilan energétique

$q\,c_a[\theta_i(t) - \theta_e(t)] + KS[\theta_i(t) - \theta_e(t)] + S\frac{d\theta_i}{dt} = 0$

avec $\theta_i(0) = \theta_0 \Rightarrow \frac{d\theta_i}{dt} \supset P\theta_i(P) - \theta_0$

$\theta_e(t) = \theta_E \Rightarrow \theta_e(t) \supset \frac{\theta_E}{P}$

L'expression $\theta_i(P)$ ...

$$\theta_i(P) = \frac{\theta_0}{\frac{1}{\tau'} + P} + \frac{\theta_E}{P[1+\tau' P]}$$ ou $\tau' = \ldots$ 4 carrés

$$\boxed{\theta_i(t) = \theta_E + (\theta_0 - \theta_E)\, e^{-\frac{t}{\tau'}}}$$

Le graphe