EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET ETUDE DE FONCTION

EXERCICE 1

n se propose d'obtenir l'intensité i du courant dans un circuit (R, C).
n remplaçant le signal d'entrée e par son développement en série de Fourier à l'odre 2, i vérifie lors l'équation

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos 2t \quad \text{pour} \quad t \in [0, +\infty[\qquad (1)$$

n suppose dans la suite de l'exercice que $R = 5000\Omega$ et $C = 10^{-4}F$.

1. Montrer que (1) peut se transformer et s'écrire :

$$i'(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos t + \frac{4}{15\pi}10^{-3}\sin 2t \quad \text{pour} \quad t \in [0, +\infty[\qquad (2)$$

2. Vérifier que $i_1(t) = 4.10^{-5}\cos t + 2.10^{-5}\sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$i'(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos t \quad \text{pour} \quad t \in [0, +\infty[\qquad (3)$$

Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle :

$$i'(t) + 2i(t) = \frac{4}{15\pi}10^{-3}\sin 2t \quad \text{pour} \quad t \in [0, +\infty[\qquad (4)$$

3. Résoudre alors l'équation différentielle (2).
Déterminer la solution particulière vérifiant la condition initiale $i(0) = 0$.

EXERCICE 2

n se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en donner les solutions rticulières.

$$(S) : \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2\sin t & (E_1) \\ 2x(t) - y'(t) = -2\cos t & (E_2) \end{cases}$$

s fonctions x et y sont deux fonctions de variable réelle t deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie l'équation différentielle :

$$x''(t) + 4x(t) = -6\cos t \quad (E).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions du système (S).

3. Déterminer la solution particulière de (S) vérifiant les conditions initia $y(0) = 0$.

EXERCICE 3

En physique, l'étude d'un mouvement amorti conduit à l'équation différentielle :

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0 \quad (E).$$

dans laquelle x est une fonction inconnue de la variable réelle t deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver la solution particulière de cette équation prenant la valeur 0 pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur 1 pour $t = 0$.
3. Soit f la fonction numérique, telle que pour tout élément t de l'intervalle $[0, \pi]$:

$$x(t) = f(t) = e^{-t} \sin t.$$

Etudier les variations de f. En déduire sa représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal où l'unité graphique vaut $2cm$ sur l'axe des abscisses et $10cm$ sur l'axe des ordonnées.

4. On se propose de calculer, en cm^2 l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses. A cet fin, deux méthodes sont proposées.
   a. Déterminer l'intégrale $\int_0^\pi f(t)dt$ au moyen de deux intégrations par parties successives.
   b. En utilisant l'équation différentielle (E) écrite sous la forme :

$$x = -\frac{1}{2}(x' + 2x)'.$$

   Déterminer une primitive F de f sur $[0, \pi]$. En déduire l'expression de $\int_0^\pi f(t)dt$ à l'aide de F.

   c. Déterminer une valeur approchée de l'aire par défaut.

EXERCICE 4

Un circuit (R, C) est soumis à une tension $e(t)$ définie par :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e(t) = E & \text{si} \quad 0 \leq t < \theta \\ e(t) = 0 & \text{si} \quad \theta \leq t \end{cases}$$

L'équation différentielle qui régit le circuit est :

$$(E): \quad RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0^+) = 0$$

Déterminer la solution causale $t \mapsto s(t)$ de cette équation différentielle.

EXERCICE 5

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \int_0^1 t\sin(tx)dt$.

1- Montrer que

$$h(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x u\sin(u)du.$$

2- On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad xy' + 2y = \sin x$$

a. Montrer que la fonction h est solution de (E).

b. Donner la solution générale de (E).

EXERCICE 6

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y''(x) + 4y(x) = 3\sin x.$$

On pose $y_0 = u + \alpha \sin x$, où u désigne une fonction inconnue et α un nombre réel.

1. On suppose que y_0 est une solution de l'équation différentielle (E).
   Pour quelle valeur de α la fonction u est-elle solution de l'équation différentielle : (H) : $z'' + 4z = 0$?
2. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle (H) ?
   En déduire la solution de (E).
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\pi) = 0$

EXERCICE 7

On considère, pour tout entier naturel non nul n, la fonction numérique f_n de la variable réelle x, définie par :

$$f_n(x) = x(1-x)^n e^x.$$

Partie I

On prend $n = 1$ et on note $f = f_1$.

1- Etudier les variations et dresser le tableau de variation de f.

2- a) Donner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

b) On admet que : $\forall \quad x \in \mathbb{R}, (1-x)e^x - 1 \leq 0$, déduire de $2-a)$, la position de (T) par rapport à la courbe $(\mathcal{C}f)$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1,5 cm.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}f)$ et la droite (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3- On considère l'équation différentielle

$$(E_n): y' + n\frac{y}{1-x} = (1+x)(1-x)^n e^x$$

a) Montrer que f_n est solution de (E_n).

b) Résoudre alors l'équation différentielle

$$(E): y' + 3\frac{y}{1-x} = (1-x^2)(1-x)^2 e^x.$$

Partie II

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{\alpha,n} = \int_0^{\pi} x^{\alpha}(1-x)^n dx.$$

1- Montrer au moyen d'une intégration par parties que

$$I_{\alpha+1,n} = \frac{\alpha+1}{n+1} I_{\alpha,n+1}.$$

2- a) Montrer que $I_{\alpha,n} - I_{\alpha,n+1} = I_{\alpha+1,n}$

b) En déduire que $I_{\alpha,n+1} = \frac{n+1}{n+\alpha+1} I_{\alpha,n}$.

EXERCICE 8

On considère la fonction «porte» P définie par :

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

1- Donner la représentation graphique de la restriction de P à l'intervalle $[-3,3]$(on prendra 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axes des ordonnées.)

2- On considère la fonction $\mathfrak{F}_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathfrak{F}_p(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt.$$

a) Justifier que $\mathfrak{F}_p(s) = 2\int_0^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt$.

b) Montrer que $\mathfrak{F}_p(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$ pour tout s différent de 0.

c) Montrer que la fonction f définie par

$$f(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$$

est prolongeable par continuité en 0.

3- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(s) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} & \text{si} \quad s \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad s = 0 \end{cases}$$

a) Calculer la limite de g en $+\infty$.

b) Etudier les variations de g sur l'intervalle $[0,1]$.

c) Donner la représentation graphique de la restriction de g sur l'intervalle $[0,10]$ (Unité graphique : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2 *TRANSFORMATION DE LAPLACE*

EXERCICE 1 X

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})$$

1- On définit la fonction g par :
$g(t) = f(t)U(t) - f(t-\pi)U(t-\pi)$ où U est la fonction échelon unité.

a) Expliciter $g(t)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, puis sur l'intervalle $[\pi,+\infty[$.

b) Calculer la transformée de Laplace G de la fonction g.

2- On considère un système «entrée-sortie» (S) dont e et s sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, nuls pour t négatif et admettant des transformées de Laplace notées E et S.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p)E(p)$.
Dans cet exercice la fonction de transfert H du système est donnée par :

$$H(p) = \frac{p}{2p^2 + 2p + 1}$$

et la fonction e est un «créneau» défini par $e(t) = U(t) - U(t - \pi)$.

a) Déterminer la transformée de Laplace E de e.

b) Calculer la transformée de Laplace S de s, en déduire l'expression de $s(t)$.

c) Définir la fonction s par intervalles.

d) Etudier la fonction s sur $[0, \pi[$.

e) Tracer la représentation graphique de s dans un repère orthogonal (o,i,j) sur l'intervalle $[0, \pi[$.

f) Calculer la valeur moyenne de s sur $[0, \pi]$.

EXERCICE 2

X

On se propose de résoudre, à l'aide de la transformée de Laplace, le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x' + x - y & = & v \\ \\ x' - 2y' + 5x & = & 10y \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions numériques de la variable réelle t sur $\mathbb{R}$ et telles que : $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$ si $t \leq 0$.
v est la fonction d'une variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} v(t) & = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{ou} \quad t \geq \frac{\pi}{2} \\ \\ v(t) & = 8 \sin 2t \quad \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Partie I

Soit les fonctions h et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$g(t) = 8\sin(2t)U(t)$ et $h(t) = g(t - \frac{\pi}{2})$, où U est la fonction échelon unité.

1. Déterminer les transformées de Laplace des fonctions h et g.
2. Tracer les courbes représentatives des fonctions g, h et v sur $[-\pi; 2\pi]$.
(Les courbes de g et de h seront tracées dans un même repère en utilisant des couleurs différentes ; la courbe de v sera tracée dans un autre repère, on prendra toutefois les mêmes unités graphiques pour les deux repères.)
3. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la transformée de Laplace $V(p)$ de v.

Partie II

On admet que les fonctions x et y et leurs dérivées ont des transformées de Laplce et l'on note : X et Y les transformées de Laplace respectives de x et y.

1. A partir de (S), écrire le système vérifié par $X(p)$ et $Y(p)$, puis déterminer $X(p)$ et $Y(p)$.
2. Décomposer $X(p)$ et $Y(p)$ en éléments simples. En déduire les fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

EXERCICE 3

A l'instant $t = 0$, on établit aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance interne $R = 1\Omega$ une tension $e(t)$ définie par

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) = t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ e(t) = -t+2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ e(t) = 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

Le courant $i(t)$ s'établisant dans le dipôle est solution de l'équation différentielle : $Li'(t)+i(t) = e(t)$ avec la condition initiale $i(0) = 0$.
La fonction i est dérivable et admet une transformée de Laplace ainsi que sa dérivée.
On notera I la transformée de Laplace de i et E celle de e.

1. Prouver que

$$I(p) = H(p)E(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = \frac{1}{Lp+1}$$

2. a) Représenter $e(t)$.
   b) Exprimer $e(t)$ en utilisant l'échelon unité.
   c) Caluler $E(p)$.
   d) En déduire que

$$I(p) = \frac{1}{L}[F(p) - 2e^{-p}F(p) + e^{-2p}F(p)], \text{ avec } \quad F(p) = \frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})}$$

3. a) Décomposer $F(p)$ en éléments simples.
   b) En déduire l'original f de F.
   c) Caluler $i(t)$.
   d) Définir $i(t)$ par intervalles.
4. a) Etudier i sur l'intervalle $[0, 1]$(On prendra $L = 1$).
   b) Dans un repère orthonormal, dessiner la courbe représentative de i.

EXERCICE 4

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E): \quad i'(t) + i(t) = e(t) \quad \text{où} \quad i(0) = 0$$

et où $e(t)$ est définie par :

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e(t) = \cos(2t) & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ e(t) = 0 & \text{si } \pi \leq t \end{cases}$$

1- Représenter graphiquement $e(t)$.

2- Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, e(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$e(t) = \cos(2t)[U(t) - U(t-\pi)]$$

où U est la fonction échelon unité.

3- Montrer que la transformée de Laplace E de e est définie par

$$E(p) = \frac{p}{p^2+4}[1 - e^{-p\pi}]$$

4- a) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (E), déterminer la transformée de Laplace I de i.

b) Décomposer en éléments simples

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+4)}.$$

En déduire l'inverse de

$$\frac{p}{(p+1)(p^2+4)}.$$

c) Déduire des questions précédentes une expression de $i(t)$.

5- Définir i par intervalles.

EXERCICE 5

Un système physique est régi par l'équation différentielle

$$(E): \quad v(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t v(u)du = f(t)$$

où la fonction f est définie par $f(t) = V_0[U(t) - U(t-\tau)]$ avec R, C et τ des constantes strictement positives et U la fonction échelon unité.

1. a) Donner dans un repère orthogonal l'allure de la représentation graphique de f pour $V_0 = 2$ et $\tau = 1$.

b) Déterminer la transfomée de Laplace de f.

2- On suppose que la fonction v est causale et qu'elle admet une transformée de Laplace V.

a) Résoudre, en utilisant la transformée de Laplace, l'équation (E).

b) Donner une définition de v par intervalles.

3- Dans cette question on s'intéresse à la représentation graphique de la fonction v.

a) Calculer $v(\tau^-)$, la limite à gauche de v en τ et montrer que $v(\tau^-) < V_0$.

b) Montrer que le «saut» $\sigma = v(\tau^-) - v(\tau)$ de la fonction v en τ est égale à V_0.

c) Etudier les variations de v pour $t \geq \tau$.

d) Donner l'allure de la représentation de la fonction v dans un repère orthogonal. On prendra, pour réaliser le graphique
$RC = 1, V_0 = 2$ et $\tau = 1$.

EXERCICE 6

1- a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que

$$\frac{2}{(p^2-4p+13)(p^2-4p+5)} = \frac{ap+b}{p^2-4p+13} + \frac{cp+d}{p^2-4p+5}$$

b) En déduire

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(p^2-4p+13)(p^2-4p+5)}\right]$$

où $\mathcal{L}^{-1}$ est la transformée de Laplace inverse.

2- Déterminer l'original de la fonction G définie par

$$G(p) = \frac{p-2}{(p^2-4p+13)^2}.$$

3- Déduire de ce qui précède la résolution de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2t}(2\sin t + \sin 3t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

EXERCICE 7

Soit

$$J(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)d\theta \quad \text{avec} \quad t > 0.$$

On admet que

$$J'(t) = \frac{d}{dt}(J(t)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d}{dt}[\cos(t\sin\theta)]d\theta.$$

1. a) Montrer que

$$J'(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta \quad \text{et}$$

$$J''(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\cos(t\sin\theta)d\theta$$

b) On admet que

$$\frac{t}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\cos(t\sin\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta$$

. Montrer que J est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$$

2. a) En appliquant la transformée de Laplace à chaque membre de l'équation différentielle (E), montrer que la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction J vérifie l'équation différentielle

$$(E'): \quad (1+p^2)F'(p) + pF(p) = 0.$$

b) Intégrer l'équation différentielle (E').

c) En utilisant le théorème de la valeur initiale montrer que

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

3. On désigne par $J \star J$ le produit de convolution de la fonction J par elle-même.
   Déduire de la question 2.c) la transformée de Laplace de $J \star J$.

b) En déduire $J \star J$.

EXERCICE 8

X

Soit g et h deux fonctions causales, c'est-à-dire deux fonction nulles sur $]-\infty, 0[$. On appelle convolution de ces deux fonctions causales, l'expression

$$(g \star h)(t) = \int_0^t g(u)h(t-u)du = \int_0^t h(u)g(t-u)du.$$

On se propose de résoudre par la transformation de Laplace l'équation suivante :

$$(E) : tf'(t) + 2\int_0^t f(u)\sin(t-u)du = sint \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

1- a) Montrer que l'équation (E) s'écrit $tf'(t)+2(f \star \sin \mathcal{U})(t) = \sin t\mathcal{U}(t)$ où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité.

b) On désigne par $F(p) = \mathcal{L}[f](p)$ la transformée de Laplace de f.
En appliquant la transformation de Laplace à chaque membre de l'équation (E), montrer que F vérifie l'équation différentielle

$$(E') : p(p^2+1)F'(p) + (p^2-1)F(p) = -1.$$

2- a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$R(p) = \frac{1-p^2}{p(p^2+1)}.$$

b) Intégrer l'équation différentielle $p(p^2+1)F'(p) + (p^2-1)F(p) = 0$.

c) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E') en utilisant la méthode de la variation de la constante.

d) En déduire que

$$F(p) = \frac{Kp}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

a) En utilisant le théorème de la valeur initiale, vérifier que $K = 1$.

b) En utilisant la transformation de Laplace inverse, déterminer f.

3 ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $B_0 = (\ i,\ \ j,\ \ k\ )$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

1- a) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer l'expression de sa bijection réciproque f^{-1}. En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2- a) Montrer que 4 est une valeur propre de f et calculer $f(v_2)$ avec $v_2 = (\ 1,\ \ 1,\ \ 1\ )$.

b) Déterminer les valeurs propres de f.
On les notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

c) L'endomorphisme f est-elle diagonalisable ? Justifier.

3- a) Déterminer les sous-espaces propres associés aux différentes valeurs propres de f.

b) Donner une base B de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f telle que la matrice de f relativement à B soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

c) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base B.

4- Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= -4x(t) - 2y(t) + 8z(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) &= -5x(t) - 2y(t) + 9z(t) \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 3$.

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (\ e_1,\ \ e_2,\ \ e_3\ )$ et f l'endomorphisme de f défini par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + z;\quad 2x - 3y + 2z;\quad -x + 2y)$$

1- Déterminer la matrice A de f relativement à la base B.

2- a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Déterminer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre.

c) Justifier que A est diagonalisable.

3- On pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice inverse P^{-1} de P et montrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4- Montrer par récurrence sur n que $A^n = P^{-1}D^nP$ pour tout entier naturel non nu
A^n.

5- Résoudre le système récurrent suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_0 = 1,\ V_0 = 2 \ \text{ et } \ w_0 = -1$$

EXERCICE 3

$B = (i, j, k)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(i) &= 2i + 2j + k \\ f(j) &= i + 3j + k \\ f(k) &= i + 2j + 2k \end{cases}$$

1- a) Donner la matrice M de f dans la base B.

b) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ puis donner la matrice de f^{-1} dans la base $B = (i, j, k)$.

c) Déterminer le noyau et l'image de f.

2- a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $det(M - \alpha I) = 0$, où I est la matrice unité d'ordre 3(on pourra remarquer que 1 est une racine).

b) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = u$.

3- On donne les vecteurs $u = (1, 0, -1)$; $v = (0, 1, -2)$ et $w = (1, 1, 1)$.

a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.

c) En déduire la matrice D de f dans la base B'.

EXERCICE 4

Partie 1

1. On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad X'(t) - X(t) = (2t + 1)e^t.$$

où X est une fonction dérivable de la variable réelle t.

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction définie par $f(t) = (at^2 + bt)e^t$ soit une solution de l'équation différentielle (E_1).

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle

$$Y'(t) - Y(t) = 2e^t.$$

où Y est une fonction dérivable de la variable réelle t.

3. On considère le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} X'(t) &= X(t) + Y(t) & (1) \\ Y'(t) &= Y(t) + Z(t) + e^t & (2) \\ Z'(t) &= Z(t) & (3) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X(0) = 1 \\ Y(0) = 1 \\ Z(0) = 1 \end{cases}$$

où X, Y, Z sont des fonctions dérivables de la variable réelle t

a) Résoudre l'équation (3), de (S) en tenant compte de la condition $Z(0) = 1$.

b) En déduire les solutions du système (S) vérifiant les conditions initia

Partie II

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. a) Soit le vecteur $v_1 = e_1 - e_3$.
   Calculer $f(v_1)$. En déduire que v_1 est un vecteur propre, préciser la valeur propre associée.

   b) On donne les vecteurs $v_2 = -e_2$ et $v_3 = e_2 - e_3$. Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Justifier que la matrice de f dans la base B' est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Vérifier que la matrice de passage de la base B à la base B' est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   b) Déterminer P^{-1}, matrice inverse de la matrice P (on précisera les calculs sur la copie).

   c) Vérifier que $T = P^{-1}AP$

Partie III

On considère le système différentiel

$$(S_1) : \begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = -2 \end{cases}$$

où x, y, z sont des fonctions dérivables de la variable réelle t.

1. On pose $U = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que le système (S_1) s'écrit $V = AU + B$ où A est la matrice introduite dans la Partie II(2)

2. X, Y et Z désignent des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.
   On pose

$$W = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix}.$$

   Les matrices P, U, W, V et Q sont liées par les relations $U = PW$ et $V = PQ$.

   a) Montrer que la relation $V = AU + B$ équivaut à $Q = TW + P^{-1}B$ où T est la matrice introduite dans la Partie II.

b) En déduire que les fonctions X, Y et Z vérifient le système (S) de la Pa

c) En déduire les fonctions x, y et z, solutions du système (S_1) et vérifiant les conditions initiales données.

EXERCICE 5

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les vecteurs $u_1 = 3e_1 - 2e_2 + e_3, u_2 = -e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + e_3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(u_1) &= 2u_1 \\ f(u_2) &= u_1 + u_2 + 2u_3 \\ f(u_3) &= -u_2 + 4u_3 \end{cases}$$

1. Montrer que la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base B.
3. Déterminer le noyau $N(f)$ et l'image $I(f)$ de f dans la base B.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que l'inverse de P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. et que
   $A = PJP^{-1}$.

   b) Montrer que, par récurrence sur n que $A^n = PJ^nP^{-1}$.

   c) Calculer E^2 et vérifier que $J = D + E$.

   d) On admet que

   $$J^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} E^k, \forall n \geq 1 \text{ X}$$

   .(où C_n^k est le coefficient du Binôme de Newton).
   Montrer que $J^n = D^n + nD^{n-1}E$.
   En déduire l'expression explicite de J^n en fonction de n.

5. On cherche à résoudre le systtème d'équations linéaires de récurrence.

$$(S) : \begin{cases} x_n &= -4x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n &= -2y_{n-1} + 2z_{n-1} \\ z_n &= -4y_{n-1} - 8z_{n-1} \end{cases} \quad \text{et on pose} \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

   a) Montrer que (S) est équivalente à $MX_{n-1} = X_n$ où $M = -2A$ est la matrice associée au système (S).

   b) Exprimer X_n en fonction de A, n et X_0.

   c) En déduire la solution du système (S) en fonction de n pour
   $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 6

On considère l'ensemble E des matrices carrées $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ a,b,c

les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I

1. Monntrer que E est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\beta = (I, J, K)$ est une base de E.

II

On considère l'application f définie sur E par $f(A) = 2A - A^t, \forall A \in E$.

1. a) Montrer que f est une application linéaire
   b) f est-elle un endomorphisme de E ? Justifier.
   c) Déterminer le noyau et l'image de f.
2. a) Calculer $f(I), f(J)$ et $f(K)$ dans la base β.
   b) En déduire la matrice Q de f relativement à la base β.
   c) Déterminer les valeurs propres de Q.
   d) Déterminer les sous-espaces propres.
   e) f est-elle diagonalisable ? Justifier.
3. Montrer que $f(J+K) = J+K$ et $f(J-K) = 3(J-K)$
4. On pose $f^n = f \circ f \cdots \circ f$ (composée de f par lui même n fois)
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} f^n(J) &= \frac{1+3^n}{2}J + \frac{1-3^n}{2}K \quad \text{et} \\ f^n(K) &= \frac{1-3^n}{2}J + \frac{1+3^n}{2}K. \end{aligned}$$

   a) En déduire la matrice de Q^n de f^n dans B.

EXERCICE 7

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans β est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$
   b) Déterminer le vecteur u(dans la base B) tel que $f(u) = -2e_1+e_3$ c'est à dire l'antécédent u du vecteur $-2e_1 + e_3$ par f.
   c) Le vecteur $w = -e_1 + e_2$ est-il élément du noyau de f ?
2. On considère le sous-ensemble F des vecteurs u tels que $f(u) = -u$.

a) Montrer que F est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$

b) Quelle est la dimension de F ?

3. a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

   b) Justifier que la matrice A est diagonalisable et déterminer la matrice diagonale D qui lui est semblable(préciser la matrice de passage P de la base B à la nouvelle base B' constituée de vecteurs propres).

4. a) Calculer A^{12}.

   b) Justifier que l'inverse A^{12} existe et donner son déterminant.

EXERCICE 8

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, le système $(S) = \{(a,b,c), (-1,0,-1), (1,1,2)\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ de $\mathbb{R}^3$, défini par

$$\begin{cases} f_{a,b,c}(-2,3,0) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \\ f_{a,b,c}(1,0,1) &= -e_1 - e_3 \\ f_{a,b,c}(2,-2,0)) &= e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

où $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On rappelle que le rang d'un endomorphisme est le rang de sa matrice associée.

1. a) Justifier que le rang de (S) est égal à 2 ou 3.

   b) Prouver que $rang(S) = 2$ si et seulement si $c = a + b$.

2. On pose $a = 2, b = -1$ et $c = 1$ et on pose $f = f_{2,-1,1}$.

   a) Calculer $f(1,3,1)$.

   b) Déduire de tout ce qui précède :
      - l'image $Im(f)$ de f
      - le noyau $ker(f)$ de f.

3. On pose ici, $a = 3, b = 2$ et $c = 1$ et on note A la mlatrice associée à $f_{3,2,1}$ relativement aux bases $B = \{(-2,3,0), (1,0,1), (2,-2,0)\}$ et $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

   a) Déterminer A et vérifier que $Q = P^{-1}$.

   b) Montrer que $A = PJP^{-1}$.

   c) Déduire de ce qui précède une résolution judicieuse du système d'équations

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

4 SERIES DE FOURIER ET SERIES NUMERIQUES

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et telle que :

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{si} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, I, J), où l'unité graphiq senter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. On pose

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \quad \text{et pour} \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt. \end{aligned}$$

   a) Calculer a_0.
   b) On pose $I_n = \int_{-\pi}^{\pi}(e^t + e^{-t})e^{int}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer I_n, puis en déduire a_n et b_n.
   c) Vérifier que f est deux fois dérivable sur $[-\pi, \pi]$.
3. On suppose que pour tout réel t, on a

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt).$$

   a) Vérifier que pour tout réel t,

$$f(t) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos(nt)\right].$$

   b) En posant $t = \pi$, dans la relation précédente, calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

4. On pose

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

(formule de Parseval)
   a) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt$
   b) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2+1)^2}$.

EXERCICE 2

Soit f une fonction périodique, de période 2π, définie par

$$f(x) = e^{x^t} \quad \text{sur} \quad]-\pi, \pi[\quad \text{et} \quad f(\pi) = \alpha.$$

1. On désigne par a_n et b_n les coefficients de Fourier réels de la fonction f.
   a) Déterminer a_0 en fonction de $\sinh(\pi)$(on rappelle que pour tout réel

$$x, \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}).$$

b) Dans la suite, on prend $n \geq 1$.
On pose $\lambda_n = a_n + ib_n$ (où i est le nombre complexe défini par $i^2 = -1$)
Montrer que

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}dx.$$

c) En déduire que

$$\lambda_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+in)}.$$

d) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du complexe λ_n.

e) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{-2n(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1+n^2)}$$

2. a) Donner la série de Fourier de f.

b) Comment faut-il choisir α pour qu'il ait convergence ponctuelle pour tout t ?

c) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}[\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1].$$

EXERCICE 3

Soit e le signal pair, périodique de période 1, défini par :

$$\begin{cases} e(t) &= 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ e(t) &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Représenter le signal e sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Calculer la valeur moyenne et l'énergie du signal e sur une période.
3. Calculer les coefficients de Fourier de e.
4. Ecrire la série de Fourier de e.
5. Calculer les valeurs numériques des coefficients a_n pour n allant de 0 à 6.
6. On note E_n l'énergie de l'harmonique de rang n. Calculer E_n pour n allant de 1 à 6.
7. Combien d'harmonies sont-elles nécessaires pour transmettre au moins, respectivement : 60%, 90%, 95% de l'énergie du signal ?

EXERCICE 4

1. Soit n un entier naturel non nul. Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives l'intégrale :

$$J = \int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(2nt)dt.$$

2. On considère la fonction u paire, π-périodique définie par

$$u(t) = t(\pi - t) \quad \text{si} \quad t \in [0, \pi[.$$

a) Tracer la représentation graphique de u sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Vérifier que u satisfait aux conditions de Dirichlet.

c) Calculer ses coefficients de Fourier et en déduire que pour tout réel t,

$$u(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nt)}{n^2}.$$

3. n est un entier naturel non nul, justifier la convergence des séries numériques de terme général :

$$\frac{1}{n^2}, \frac{(-1)^n}{n^2}, \frac{1}{n^4}.$$

4. En utilisant le développement en série de Fourier pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, déterminer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

5. La valeur efficace u_e de la fonction u est telle que $u_e^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)dt$. Calculer u_e^2. La valeur efficace de la fonction u peut aussi s'exprimer à l'aide de la formule de Parseval : $u_e^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{2}$.
Soit $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$.
6. En utilisant la formule de Parseval, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

EXERCICE 5

On considère les fonctions définies respectivement sur l'intervalle

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{par} \quad f(x) = e^{-x}\sin x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}\cos x.$$

1. a) Etudier les variations de f et de g sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   b) Résoudre l'inéquation

$$(E) : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) \leq g(x)$$

   c) Tracer les courbes représentatives (S) et (C) respectives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
2.) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(nx)dx$ et $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin(nx)dx$.
   a) Montrer que $A_n + nB_n = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(n\frac{\pi}{2})$ et $B_n - nA_n = -e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(n\frac{\pi}{2})$
   b) En déduire A_n et B_n en fonction de n.
3. On considère l'équation différentielle $(F) : y' + y = g(t)$.
   a) Montrer que f est une solution particulière de (F).
   b) Donner la solution générale de l'équation (F)
5. On considère la fonction h 2π-périodique définie par :

$$\begin{cases} h(x) &= 0 \quad \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ h(x) &= e^{-x} \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ h(x) &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction h.

EXERCICE 6

Soit ϕ la fonction numérique définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$\phi(u) = \sin u - \frac{2}{\pi} u$$

1. a) Calculer $\phi'(u)$ et $\phi''(u)$.
   Dresser le tableau de variation de ϕ' puis celui de ϕ.

   b) En déduire que

$$\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin u \geq \frac{2}{\pi} u$$

2. On considère la série numérique de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{[1 + (-1)^n x^2 \sin x]^{\frac{3}{2}}}$$

et on pose

$$I = \int_0^{\pi} \frac{du}{[1 + \pi^2 n^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}.$$

   a) Par le changement de variable $u = x - n\pi$, montrer que

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{du}{[1 + (u + n\pi)^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$$

   et que $u_n \leq I$

   b) Par le changement de variable $u = \pi - x$, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(u)du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)dx \quad \text{où} \quad h(u) = \frac{1}{[1 + \pi^2 n^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$$

   c) Montrer que

$$I \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1 + 2n^2 \pi u]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{\pi n^2}$$

   en s'appuyant de 1.a)

   d) En déduire de c) la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

EXERCICE 7

On considère la fonction f paire, 2π-périodique définie par :

$$f(t) = (\pi - t)^2 \quad \text{si} \quad t \in [0, \pi].$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. a) Montrer que f satisfait les conditions de Dirichlet.

   b) En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$$

3. a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\pi^3 - (\pi - x)^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

b) Montrer que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

EXERCICE 8

X On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, telle que : $f(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi]$.

Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier de f.

1. Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Justifier que pour tout entier naturel

$$n \geq 1, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3. Ecrire les cinq premiers termes de la séries.

EXERCICE 9 X

T

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |cost|$.

1. Représenter f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Prouver que f est paire et π-périodique.
3. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.
4. Prouver que pour $n > 0$, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t]dt.$$

En déduire que

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)}$$

et donner la série de Fourier associée à f.

EXERCICE 10

Partie A

Soit n un entier naturel non nul. On considère la série numérique $\sum u_n$ de terme générale

$$u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

1- Démontrer que cette série est convergente.

2- Déterminer les réels a et b tels que

$$u_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

3- On pose

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n.$$

a) Exprimer S_p en fonction de p.

b) En déduire la somme S de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Partie B

soit f la fonction numérique, paire, 2π-périodique définie par

$$f(t) = 1 - \sin t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

1- Tracer la courbe représentative de f sur $[-\frac{9\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}]$

2- a) Justifier que, $\forall \quad n \in \mathbb{N}, b_n = 0$

b) Calculer a_0 et a_1.

c) Calculer a_{2p+1} et a_{2p}, $\forall \quad p \in \mathbb{N}^*$.(on rappelle que

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)])$$

3- a) Montrer que la fonction f vérifie les conditions de Dirichlet.

b) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction f

c) Utiliser ce développement en série de Fourier de la fonction f pour calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

EXERCICE 11

On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad .$$

1- a) Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\quad 1 \leq x \leq e$

b) En déduire l'inégalité

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

2- a) Etablir pour tout entier $n \geq 1$, la relation

$$I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}.$$

b) Calculons I_0 et I_1

3- On pose pour tout $n \geq 1$,

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET ETUDE DE FONCTION

EXERCICE 1

1. En dérivant les membres de (1) par rapport à t et en remplaçant R et C par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned} Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) &= \frac{1}{2}\cos t + \frac{4}{3\pi}\sin 2t \\ \Leftrightarrow 5000i'(t) + \frac{1}{10^{-4}}i(t) &= \frac{1}{2}\cos t + \frac{4}{3\pi}\sin 2t \\ \Leftrightarrow 10000i'(t) + \frac{2}{10^{-4}}i(t) &= \cos t + \frac{8}{3\pi}\sin 2t \\ \Leftrightarrow i'(t) + 2i(t) &= 10^{-4}\cos t + \frac{4}{15\pi}10^{-3}\sin 2t \end{aligned}$$

Donc

$$(1) \Leftrightarrow i'(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos t + \frac{4}{15\pi}10^{-3}\sin 2t$$

2. **Vérifions que $i_1(t) = 4.10^{-5}\cos t + 2.10^{-5}\sin t$ est une solution particulière de l'équation : $i'(t) + 2i(t) = 10^{-4}\cos t, t \in [0, +\infty[$.**
$i_1'(t) = -4.10^{-5}\sin t + 2.10^{-5}\cos t$.
$i_1'(t) + 2i_1(t) = -4.10^{-5}\sin t + 2.10^{-5}\cos t + 8.10^{-5}\cos t + 4.10^{-5}\sin t$.
Donc $i_1'(t) + 2i_1(t) = 10^{-4}\cos t$. D'où le résultat.

3. Déterminons une solution particulière de l'équation :
$i'(t) + 2i(t) = \frac{4}{15\pi}10^{-3}\sin 2t$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $i_2(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$.
$i_2'(t) = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t$ donc on a

$$\begin{aligned} i_2'(t) + 2i_2(t) &= -2a\sin 2t + 2b\cos 2t + 2a\cos 2t + 2b\sin 2t \\ &= 2(a+b)\cos 2t + 2(-a+b)\sin 2t = \frac{4}{15\pi}10^{-3}\sin 2t \end{aligned}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2(a+b) = 0 \\ 2(-a+b) = \frac{4}{15\pi}10^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b = -\frac{1}{15\pi}10^{-3} \\ b = \frac{1}{15\pi}10^{-3} \end{cases}$$

Donc $i_2(t) = -\frac{10^{-3}}{15\pi}\cos 2t + \frac{10^{-3}}{15\pi}\sin 2t$

4. Résolvons (2).
La solution homogène de (2) est $i_h(t) = Ke^{-2t}, K \in \mathbb{R}$.
La solution partuculière de (2) est : $i_p(t) = i_1(t) + i_2(t)$.
La solution générale de (2) est : $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$. Donc

$$i(t) = Ke^{-2t} + 4.10^{-5}\cos t + 2.10^{-5}\sin t - \frac{10^{-3}}{15\pi}\cos 2t + \frac{10^{-3}}{15\pi}\sin 2t$$

Déterminons la solution vérifiant $i(0) = 0 \Leftrightarrow K + 4.10^{-5} - \frac{10^{-3}}{15\pi} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{10^{-3}}{15\pi} - 4.10^{-5}$.
Donc on a

$$i(t) = (\frac{10^{-3}}{15\pi} - 4.10^{-5})e^{-2t} + 4.10^{-5}\cos t + 2.10^{-5}\sin t - \frac{10^{-3}}{15\pi}\cos 2t + \frac{10^{-3}}{15\pi}\sin 2t$$

EXERCICE 2

$$(S) : \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2\sin t & (E_1) \\ 2x(t) - y'(t) = -2\cos t & (E_2) \end{cases}$$

1. **Montrons en utilisant (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie l'équation $(E) : x'' + 4x(t) = -6\cos t$.**

   En dérivant les membres de (E_1) par rapport à t on obtient :

   $$x''(t) + 2y'(t) = -2\cos t \quad (E_1').$$

   Ensuite $(E_2) \Rightarrow y'(t) = 2x(t) + 2\cos t$.
   En remplaçant $y'(t)$ par son expression dans (E_1') on obtient

   $$x''(t) + 2(2\cos t + 2x(t)) = -2\cos t \Leftrightarrow x''(t) + 4x(t) = -6\cos t \quad (E).$$

   D'où le résultat.

2. **Résolvons (E) dans $\mathbb{R}$.**
   $x''(t) + 4x(t) = -6\cos t \quad (E)$.
   $(E_c) : r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$. La solution homogène de (E) est donc $x_h(t) = A\cos 2t + B\sin 2t, A, B \in \mathbb{R}$.
   La solution particulière de (E) est de la forme $x_p(t) = \alpha\cos t + \beta\sin t$.
   $x_p'(t) = -\alpha\sin t + \beta\cos t$ et $x_p''(t) = -\alpha\cos t - \beta\sin t$.
   $x_p''(t) + x_p(t) = -6\cos t \Leftrightarrow -\alpha\cos t - \beta\sin t + 4\alpha\cos t + 4\beta\sin t = -6\cos t$
   $\Leftrightarrow 3\alpha\cos t + 3\beta\sin t = -6\cos t$.
   Par identification on a : $\alpha = -2$ et $\beta = 0$. D'où la solution générale de (E) est :

   $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - 2\cos t$$

   Déterminons maintenant $y(t)$.
   D'après (E_1) on a :

   $$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}x'(t) - \sin t = -\frac{1}{2}(A\cos 2t + B\sin 2t - 2\cos t)' - \sin t \\ &= A\sin 2t - B\cos 2t - 2\sin t \end{aligned}$$

3. **Déterminons la solution particulière de (S) vérifiant $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.**
   $x(0) = -1 \Leftrightarrow A - 2 = -1 \Leftrightarrow A = 1$.
   $y(0) = 0 \Leftrightarrow -B = 0 \Leftrightarrow B = 0$.
   Cette solution de (S) est donc :

   $$\begin{cases} x(t) = \cos 2t - 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t - 2\sin t \end{cases}$$

EXERCICE 3

$$(E) : x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$$

1. Résolvons (E) dans $\mathbb{R}$.
   $(E_c) : r^2 + 2r + 2 = 0$.
   $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$.
   On a donc
   $$r_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$
   . Par conséquent
   $$x(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t), A, B \in \mathbb{R}.$$

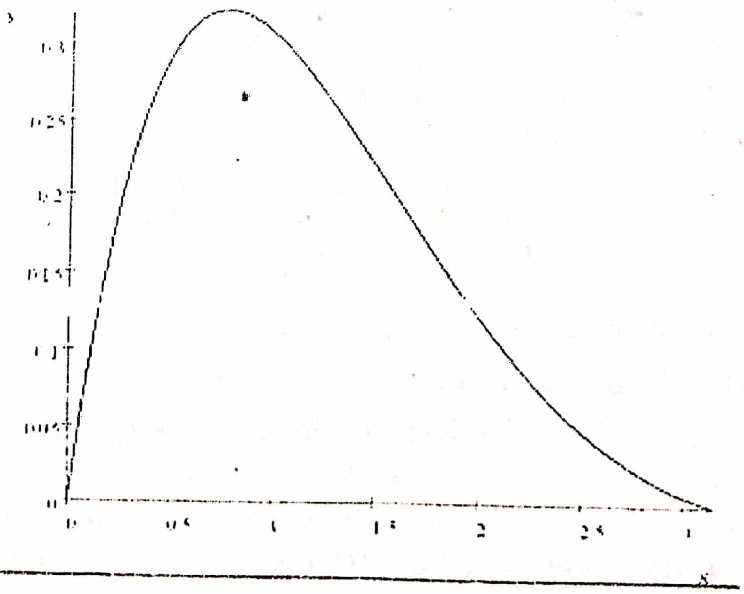
2. Solution particulière de (E) vérifiant $x(0) = 0$ et $x'(t) = 1$.
   $x'(t) = e^{-t}(-A\sin t + B\cos t) - e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$. On a donc
   $$\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ B-A &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ B &= 1 \end{cases}$$
   D'où $x(t) = e^{-t}\sin t$.

3. $f(t) = e^{-t}\sin t, \forall \quad t \in [0,\pi]$.
   Etudions les varitions de f sur $[0,\pi]$.
   Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto \sin t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elles sont dérivables sur $[0,\pi]$.
   Par conséquent f est dérivable sur $[0,\pi]$ et on a
   $$\begin{aligned} f'(t) &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ &= \sqrt{2}e^{-t}\cos(t + \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

   Tableau de variation de f

t	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{-\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

   Représentation graphique de f.



4. Calcul d'aire.

a) Calculons $\int_0^\pi f(t)dt = \int_0^\pi e^{-t}\sin tdt$ au moyen de deux intégrations par parties.
Posons $u(t) = e^{-t} \Rightarrow u'(t) = -e^{-t}$
$v'(t) = \sin t \Rightarrow v(t) = -\cos t$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)dt &= [-e^{-t}\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-t}\cos tdt \\ &= -e^{-\pi}\cos\pi + e^0\cos 0 - \int_0^\pi e^{-t}\cos tdt\end{aligned}$$

Posons $\ell(t) = e^{-t} \Rightarrow \ell'(t) = -e^{-t}$
$k'(t) = \sin t \Rightarrow k(t) = -\cos t$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)dt &= e^{-\pi} + 1 - [-e^{-t}\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-t}\sin tdt \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi f(t)dt.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^\pi e^{-t}\sin tdt = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

b) Calculons $\int_0^\pi f(t)dt = \int_0^\pi e^{-t}\sin tdt$ en utilisant l'équation différentielle (E) écrite sous la forme $x = -\frac{1}{2}(x' + 2x)'$.
f est solution de (E) donc on a $f(t) = -\frac{1}{2}(f'(t) + 2f(t))'$.
D'où on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)dt &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (f'(t) + 2f(t))'dt = -\frac{1}{2}[f'(t) + 2f(t)]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2}[f'(\pi) + 2f(\pi) - f'(0) - 2f(0)] \\ &= -\frac{1}{2}(-e^{-\pi}) + \frac{1}{2}(1) \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2}.\end{aligned}$$

c) Valeur approchée de l'aire

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)dt \times 20cm^2 &= \frac{e^{-\pi}+1}{2} \times 20cm^2 \\ &= 10(e^{-\pi} + 1)cm^2\end{aligned}$$

EXERCICE 4

$$(E) : RCs'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad s(0^+) = 0$$

et

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e(t) = E & \text{si} \quad 0 \le t < \theta \\ e(t) = 0 & \text{si} \quad \theta \le t \end{cases}$$

Déterminos la solution causale de (E).

- Si $t < 0$, $s(t) = 0$ car s est causale.
- Si $0 \le t < \theta$, $e(t) = E$ et (E) devient : $RCs'(t) + s(t) = E$.
  La solution homogène est $s_h(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$, $K \in \mathbb{R}$.
  La solution particulière de (E) est de la forme $s_p(t) = a$ car le second membre de (E) est une constante. $s_p'(t) = 0$ et on a $RCs_p'(t) + s_p(t) = E \Leftrightarrow a = E$. Donc $s_p(t) = E$.
  La solution générale de (E) est $s(t) = s_h(t) + s_p(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + E$, $K \in \mathbb{R}$.
  $s(0^+) = 0 \Leftrightarrow K + E = 0 \Leftrightarrow K = -E$.
  Donc $s(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}} + E = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

- Si $\theta \leq t$, $e(t) = 0$ l'équation (E) devient $RCs'(t) + s(t) = 0$.
  La solution générale de (E) est $s(t) = K_1 e^{-\frac{t}{RC}}, K_1 \in \mathbb{R}$.
  Puisque s est dérivable en θ alors s est continue en θ et on a $\lim_{s \to \theta^+} s(t) = s(\theta)$.

$$\lim_{s \to \theta^+} s(t) = s(\theta) \Leftrightarrow E(1 - e^{-\frac{\theta}{RC}}) = K_1 e^{-\frac{\theta}{RC}}$$

Donc on a

$K_1 = E(e^{\frac{\theta}{RC}} - 1)$ et $s(t)$ $E(e^{\frac{\theta}{RC}} - 1)e^{-\frac{1}{RC}t}$

La solution causale de (E) est donc

$$\begin{cases} s(t) &= 0 & \text{si} & t < 0 \\ s(t) &= E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) & \text{si} & 0 \leq t < \theta \\ s(t) &= E(e^{\frac{\theta}{RC}} - 1)e^{-\frac{t}{RC}} & \text{si} & \theta \leq t \end{cases}$$

EXERCICE 5

$$h(x) = \int_0^1 t \sin tx dt, \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

1. Montrons que

$$h(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x u \sin u du.$$

$h(x) = \int_0^1 t \sin tx dt$.
Posons $u = tx$ on a $t = \frac{u}{x}$ et $dt = \frac{du}{x}$.
Si $t = 0$ on a $u = 0$ et si $t = 1$ on $u = x$.
On obtient donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \frac{u}{x} \sin u \frac{du}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u \sin u du. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. a) Montrons que h est solution de $(E) : xy' + 2y = \sin x$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u \sin u du \quad \text{donc} \\ h'(x) &= (\frac{1}{x^2})' \int_0^x u \sin u du + \frac{1}{x^2} (\int_0^x u \sin u du)' \\ &= \frac{-2}{x^3} \int_0^x u \sin u du + \frac{x \sin x}{x^2} \\ &= \frac{-2}{x} \times \frac{1}{x^2} \int_0^x u \sin u du + \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

or $h(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x u \sin u du$ donc $h'(x) = \frac{-2h(x)}{x} + \frac{\sin x}{x}$
$\Leftrightarrow xh'(x) + 2h(x) = \sin x$ par conséquent h est solution de (E).

b) Résolvons $(E) : xy' + 2y = \sin x$.
Solution homogène

$$\begin{aligned} y_h &= Ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} = Ke^{-\int \frac{2}{x} dx} \\ &= Ke^{\ln(\frac{1}{x^2})} = \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solution générale
$y = y_h + h(x)$.

EXERCICE 6

$(E) : y'' + 4y = 3\sin x$
et $y_0 = u + \alpha \sin x$ où u est une fonction et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. y_0 solution de (E).
   Déterminons α pour que u soit solution de $(H) : z'' + 4z = 0$.
   $y_0 = u + \alpha \sin x \Leftrightarrow u = y_0 - \alpha \sin x$.
   $u' = y_0' - \alpha \cos x$ alors $u'' = y_0'' + \alpha \sin x$.

$$\begin{aligned} u \quad \text{solution de} \quad (H) &\Leftrightarrow u'' + 4u = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0'' + \alpha \sin x + 4(y_0 - \alpha \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0'' + 4y_0 - 3\alpha \sin x = 0 \end{aligned}$$

   Comme y_0 est une solution de (E) donc on a $y_0'' + 4y_0 = 3\sin x$.
   D'où

$$\begin{aligned} y_0'' + 4y_0 - 3\alpha \sin x = 0 &\Leftrightarrow 3\sin x - 3\alpha \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow (3 - 3\alpha)\sin x = 0 \quad, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 3 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1. \end{aligned}$$

   Donc u est solution de (H) si $\alpha = 1$ et on a $y_0 = u + \sin x$.
2. **Déterminons la solution générale de (H).**
   $z'' + 4z = 0$ donc $(E_c) : r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$.
   D'où $z = A\cos 2x + B\sin 2x$, $\quad A, B \in \mathbb{R}$.
   Déduisons les solutions de (E).
   Toutes les solutions de (E) sont de la forme $y_0 = u + \sin x$.
   Comme u est une solution de (H), on peut donc écrire
   $u = A\cos 2x + B\sin 2x$.
   Par conséquent la solution générale de (E) est :
   $y_0 = A\cos 2x + B\sin 2x + \sin x$, $\quad A, B \in \mathbb{R}$.
3. **Déterminons la solution de (E) vérifiant $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\pi) = 0$.**
   $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \sin x$ donc $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \cos x$.

$$\begin{cases} y(\frac{\pi}{2}) &= 0 \\ y'(\pi) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + 1 &= 0 \\ 2B - 1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

   D'où $y = \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x$.

EXERCICE 7

$$f_n(x) = x(1 - x)^n e^x.$$

Partie I

On prend $n = 1$ et on note $f = f_1$.

1- **Etudions les variations et dresser son tableau de variation de f.**

$$f(t) = x(1 - x)e^x = xe^x - x^2 e^x.$$

Calculons les limites de f aux bornes de D_f.

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x(1 - x) = -\infty. \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de f.
Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x(1-x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x(1-x)e^x]' \\ &= x(1-x)e^x + (1-2x)e^x = (x-x^2)e^x + (1-2x)e^x \\ \Rightarrow f'(x) &= (-x^2 - x + 1)e^x \end{aligned}$$

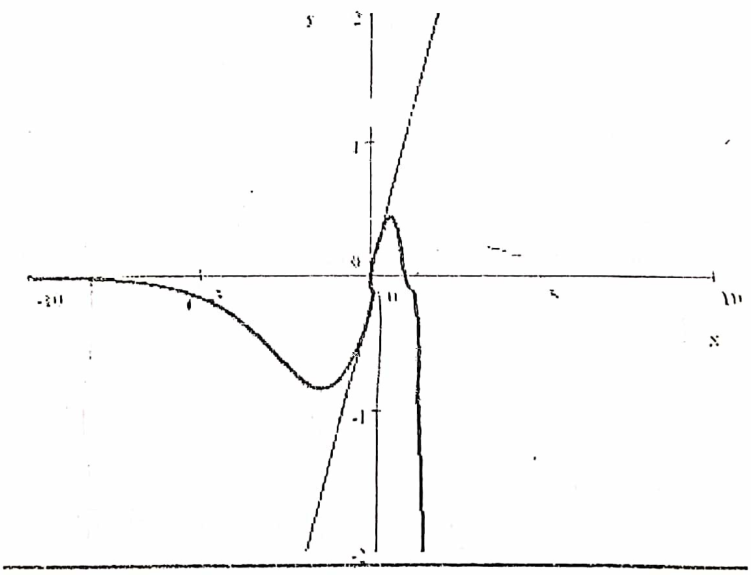
Etudions le signe de f' et le sens de variations de f.
$\forall \quad x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 - x + 1$.
$\Delta = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc $\forall \quad x \in]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$, $\quad f'(x) \leq 0$ alors f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]$ et $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.
$\forall \quad x \in [\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$, $\quad f'(x) \geq 0$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$.
Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0,84$	$\nearrow$	$0,44$	$\searrow$	$-\infty$

2- a) Donnons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow (T) : y = x$ car $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

b) Position de (T) par rapport à $(\mathcal{C}f)$.
Etudions le signe de $f(x) - y = x(1-x)e^x - x$.
$f(x) - y = x[(1-x)e^x - 1]$ or $\quad \forall \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1-x)e^x - 1 \leq 0$ donc le signe de $f(x) - x$ dépend du signe du signe de x.
$\forall \quad x \in]-\infty, 0[, \quad f(x) - x > 0$ alors $(\mathcal{C}f)$ est au dessus de (T) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
$\forall \quad x \in]0, \infty[, \quad f(x) - x < 0$ alors $(\mathcal{C}f)$ est en dessous de (T) sur l'intervalle $]0, \infty[$.
$f(x) - x = 0$ pour $x = 0$ donc $(\mathcal{C}f)$ et (T) se coupent au point d'abscisse 0.

c) Traçons $(\mathcal{C}f)$ et (T).



3-

$$(E_n) : y' + n\frac{y}{1-x} = (1+x)(1-x)^n e^x$$

a) Montrons que f_n est solution de (E_n).

$$f_n(x) = x(1-x)^n e^x$$
$$f_n'(x) = x(1-x)^n e^x + (1-x)^n e^x - nx(1-x)^{n-1}e^x.$$

$$\begin{aligned}
&= nx(1-x)^{n-1}e^x + n\frac{x(1-x)^n e^x}{1-x}\\
&= x(1-x)^n e^x + (1-x)^n e^x\\
&- nx(1-x)^{n-1}e^x + nx(1-x)^{n-1}e^x\\
&= x(1-x)^n e^x + (1-x)^n e^x\\
&= (1+x)(1-x)^n e^x\\
\Rightarrow f_n'(x) + n\frac{f_n(x)}{1-x} &= (1+x)(1-x)^n e^x.
\end{aligned}$$

Donc f_n est une solution de (E_n).

b) **Résolvons l'équation différentielle (E).**

$$\begin{aligned}
(E) : y' + 3\frac{y}{1-x} &= (1-x^2)(1-x)^2 e^x\\
(E) \Leftrightarrow y' + 3\frac{y}{1-x} &= (1+x)(1-x)(1-x)^2 e^x\\
\Leftrightarrow (E_3) : y' + 3\frac{y}{1-x} &= (1+x)(1-x)^3 e^x.
\end{aligned}$$

Donc, d'après $3-a)$ $f_3(x) = x(1-x)^3 e^x$ est une solution particulière de (E). Cherchons la solution homogène de (E). Pour cela résolvons l'équation homogène $y' + 3\frac{y}{1-x} = 0$.

$$\begin{aligned}
y_h &= Ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\\
&= Ke^{-\int \frac{3}{1-x}dx}\\
&= Ke^{-(-3\ln|1-x|)} = Ke^{\ln|(1-x)^3|}\\
&= K(1-x)^3, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(E) a donc pour solution générale

$$\begin{aligned}
y &= y_h + f_3(x)\\
&= K(1-x)^3 + x(1-x)^3 e^x\\
&= (x+K)(1-x)^3 e^x
\end{aligned}$$

Partie II

$$\forall \quad n \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall \quad \alpha \in \mathbb{N}^\star, I_{\alpha,n} = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^n dx.$$

1- Montrons que

$$I_{\alpha+1,n} = \frac{\alpha+1}{n+1} I_{\alpha,n+1}.$$

$$I_{\alpha+1,n} = \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^n dx.$$

Posons $u = x^{\alpha+1}$ et $v' = (1-x)^n$ alors $u' = (\alpha+1)x^\alpha$ et $v = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$.
On a donc

$$\begin{aligned}
I_{\alpha+1,n} &= [-\frac{x^{\alpha+1}(1-x)^n}{n+1}]_0^1 + \frac{\alpha+1}{n+1}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{n+1}dx\\
&= \frac{\alpha+1}{n+1}\int_0^1 x^\alpha (1-x)^{n+1}dx.
\end{aligned}$$

Or $I_{\alpha,n+1} = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^{n+1}dx$ donc $I_{\alpha+1,n} = \frac{\alpha+1}{n+1}I_{\alpha,n+1}$.

2- a) Montrons que

$$I_{\alpha,n} - I_{\alpha,n+1} = I_{\alpha+1,n}.$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha,n} - I_{\alpha,n+1} &= \int_0^1 x^\alpha(1-x)^n dx - \int_0^1 x^\alpha(1-x)^{n+1}dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha(1-x)^n[1-(1-x)]dx \\ &= \int_0^1 x^\alpha x(1-x)^n dx \\ &= \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^n dx. \end{aligned}$$

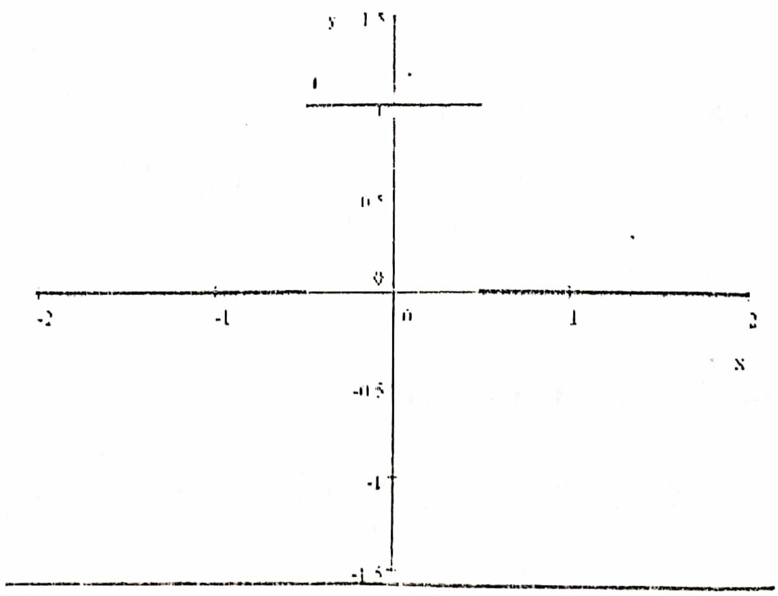
Or $I_{\alpha+1,n} = \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^n dx$ donc $I_{\alpha,n} - I_{\alpha,n+1} = I_{\alpha+1,n}$.

b) En déduisons que $I_{\alpha,n+1} = \frac{n+1}{n+\alpha+2}I_{\alpha,n}$.
D'après $2-a)$ on a $I_{\alpha,n} - I_{\alpha,n+1} = I_{\alpha+1,n}$ et d'après 1− on a $I_{\alpha+1,n} = \frac{\alpha+1}{n+1}I_{\alpha,n+1}$ alors on a

$$\begin{aligned} I_{\alpha,n+1} &= I_{\alpha,n} - I_{\alpha+1,n} \\ &= I_{\alpha,n} - \frac{\alpha+1}{n+1}I_{\alpha,n+1} \\ \Leftrightarrow I_{\alpha,n+1} + \frac{\alpha+1}{n+1}I_{\alpha,n+1} &= I_{\alpha,n} \\ \Leftrightarrow (1+\frac{\alpha+1}{n+1})I_{\alpha,n+1} &= I_{\alpha,n} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha+n+2}{n+1}I_{\alpha,n+1} &= I_{\alpha,n} \\ \Leftrightarrow I_{\alpha,n+1} &= \frac{n+1}{n+\alpha+2}I_{\alpha,n}. \end{aligned}$$

EXERCICE 8

1- Courbe de P sur l'intervalle $[-3,3]$.



2- On considère la fonction $\mathfrak{F}_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathfrak{F}_p(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt.$$

a) **Justifions que**

$$\mathfrak{F}_p(s) = 2\int_{0}^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt.$$

Les fonctions $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto \cos(2\pi st)$ sont paires donc la fonction $t \mapsto P(t)\cos(2\pi st)$ est paire car le produit de deux fonctions paires est une fonction paire. Par conséquent on a
$\mathfrak{F}_p(s) = 2\int_0^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt$ car si f est une fonction paire et $a > 0$, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

b) **Montrons que**

$$\mathfrak{F}_p(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s}, \quad \forall \quad s \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_p(s) &= 2\int_0^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt, \quad \forall \quad s \neq 0 \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} P(t)\cos(2\pi st)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} P(t)\cos(2\pi st)dt\right) \\
&= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1.\cos(2\pi st)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 0.\cos(2\pi st)dt\right) \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi st)dt \\
&= 2[\frac{1}{2\pi s}\sin(2\pi st)]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi s}[\sin(\pi s) - \sin(0)] \\
\Rightarrow \mathfrak{F}_p(s) &= \frac{\sin \pi s}{\pi s}, \quad \forall \quad s \neq 0
\end{aligned}$$

c) **Montrons que f est prolongeable par continuité en 0.**

$$f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s}.$$

$D_f = \mathbb{R}^*$ donc $0 \notin D_f$ et en plus on a

$$\lim_{s\to 0} f(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\sin \pi s}{\pi s} = \lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0

3- $g(s) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} & \text{si} \quad s \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad s = 0 \end{cases}$

a) **Calculons la limite de g en $+\infty$.**

Comme $\forall \quad x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -1 \leq \sin(\pi s) \leq 1$ et $\frac{-1}{\pi s} \leq \frac{\sin \pi s}{\pi s} \leq \frac{1}{\pi s}$.

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\pi s} = \lim_{s\to+\infty}\frac{-1}{\pi s} = 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{s\to+\infty} g(s) = 0.$$

b) Etudions les variations de g sur l'intervalle $[0,4]$.
g est dérivable sur $]0,4]$.

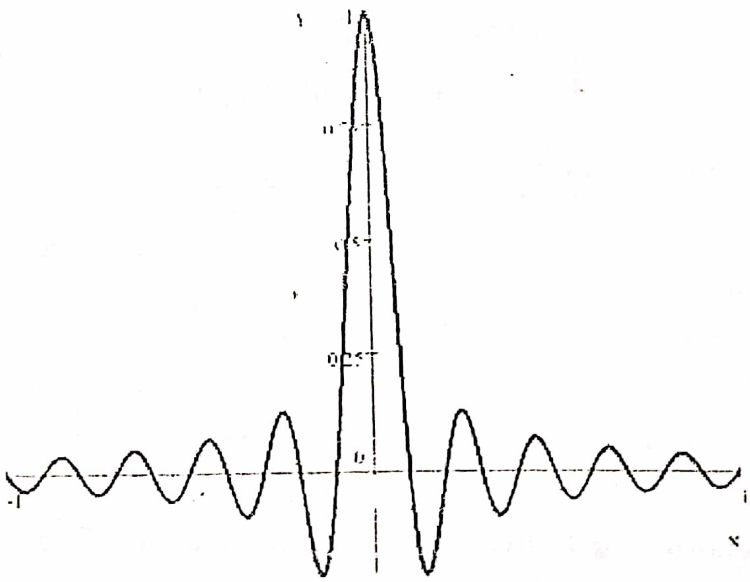
$$\forall \quad s \in]0,4], \quad g'(s) = \frac{\pi^2 s\cos(\pi s) - \pi\sin(\pi s)}{(\pi s)^2} = \frac{\pi s\cos(\pi s) - \sin(\pi s)}{\pi s^2}.$$

$g'(s)$ a le même signe que $h(s) = \pi s\cos(\pi s) - \sin(\pi s)$ car $\pi s^2 > 0$.
Etudions le signe de h à l'aide de son tableau de variation.
$h'(s) = \pi\cos(\pi s) - \pi^2\sin(\pi s) - \pi\cos(\pi s) = -\pi^2\sin(\pi s)$.
$\forall \quad s \in]0,4], \quad \pi^2 > 0$; le signe de $h'(s)$ est celui de $-\sin(\pi s)$.
$h'(s) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi s) = 0 \Leftrightarrow \pi s = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow s = k$.
$h'(s) = 0 \Leftrightarrow s \in \{1,2,3,4\}$.

s	0		1		2		3		4
$\sin\pi s$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$h'(s)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(s)$	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π	$\searrow$	-3π	$\nearrow$	4π

D'après le tableau de variation, il existe trois réels $\alpha_1 \in [1,2]$, $\alpha_2 \in [2,3]$ et $\alpha_3 \in [3,4]$ tels que $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) = h(\alpha_3) = 0$.
D'où $\forall \quad s \in [0,\alpha_1] \cup [\alpha_2,\alpha_3], \quad h(s) \leq 0$ donc $g'(s) \leq 0$. g est donc strictement croissante sur les intervalles $[0,\alpha_1]$ et $[\alpha_2,\alpha_3]$.
$\forall \quad s \in [\alpha_1,\alpha_2] \cup [\alpha_3,4], \quad h(s) \geq 0$ donc $g'(s) \geq 0$.
g est donc strictement décroissante sur les intervalles $[\alpha_1,\alpha_2]$ et $[\alpha_3,4]$.
Tableau de variation de g.

s	0		α_1		α_2		α_3		4
$g'(s)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(s)$	1	$\searrow$	$g(\alpha_1)$	$\nearrow$	$g(\alpha_2)$	$\searrow$	$g(\alpha_3)$	$\nearrow$	0



EXERCICE 1

$f(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2})$

1. $g(t) = f(t)U(t) - f(t-\pi)U(t-\pi)$.

   a) **Explicitons** g **sur** $[0,\pi]$ **puis sur** $[\pi,+\infty[$.
   Sur $[0,\pi]$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\pi) = 0$ donc $g(t) = f(t)$ si $t \in [0,\pi]$.
   Sur $[\pi,+\infty[$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\pi) = 1$ donc

$$\begin{aligned}
g(t) &= f(t) - f(t-\pi) \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2}) - e^{-\frac{t-\pi}{2}} \sin(\frac{t-\pi}{2}) \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2}) - e^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}) \\
&= e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2}) + e^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{t}{2}) \quad \text{car} \quad \sin(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{t}{2}) \\
&= e^{-\frac{t}{2}} [\sin(\frac{t}{2}) + e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{t}{2})] \quad \text{si} \quad t \in [\pi,+\infty[
\end{aligned}$$

   Finallement on a

$$\begin{cases} g(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{t}{2}) & \text{si} \quad t \in [0,\pi] \\ g(t) = e^{-\frac{t}{2}} [\sin(\frac{t}{2}) + e^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{t}{2})] & \text{si} \quad t \in [\pi,+\infty[\end{cases}$$

   b) Déterminons la transformée de Laplace G de g.

   $g(t) = f(t)U(t) - f(t-\pi)U(t-\pi)$ donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g(t)](p) &= \mathcal{L}[f(t)U(t)](p) - \mathcal{L}[f(t-\pi)U(t-\pi)](p) \\
&= F(p) - e^{-p\pi} F(p) = (1 - e^{-p\pi}) F(p) \\
F(p) &= \mathcal{L}[f(t)U(t)](p) \\
&= \mathcal{L}[\sin(\frac{t}{2}) U(t)](p) \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

   On a donc

$$G(p) = \frac{1 - e^{-p\pi}}{2[(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]}$$

2. $S(p) = H(p)E(p)$ avec $H(p) = \frac{p}{2p^2+2p+1}$ et le signal d'entrée $e(t) = U(t) - U(t-\pi)$.

   a) Déterminons la transformée de Laplace E de e.

$$\begin{aligned}
E(p) &= \mathcal{L}[U(t)](p) - \mathcal{L}[U(t-\pi)](p) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\pi}}{p} \\
&= \frac{1 - e^{-p\pi}}{p}
\end{aligned}$$

a) Déterminons la transformée de Laplace S de s.

$$\begin{aligned} S(p) &= H(p)E(p) = \frac{p}{2p^2+2p+1} \times \frac{1-e^{-p\pi}}{p} \\ S(p) &= \frac{1-e^{-p\pi}}{2p^2+2p+1} = \frac{1-e^{-p\pi}}{2[(p+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]} = G(p). \end{aligned}$$

Déduisons s.
$S(p) = G(p)$ donc

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(p)](t) = g(t) \\ &= f(t)U(t) - f(t-\pi)U(t-\pi) \end{aligned}$$

c) **Définissons $s(t)$ par intervalles.**
En utilisant la question 1.a) et le fait que $U(t) = 0$ et $U(t-\pi) = 0$ si $t < 0$ on a

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ s(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2}) & \text{si} \quad t \in [0, \pi[\\ s(t) = e^{-\frac{t}{2}}[\sin(\frac{t}{2}) + e^{\frac{\pi}{2}}\cos(\frac{t}{2})] & \text{si} \quad t \in [\pi, +\infty[\end{cases}$$

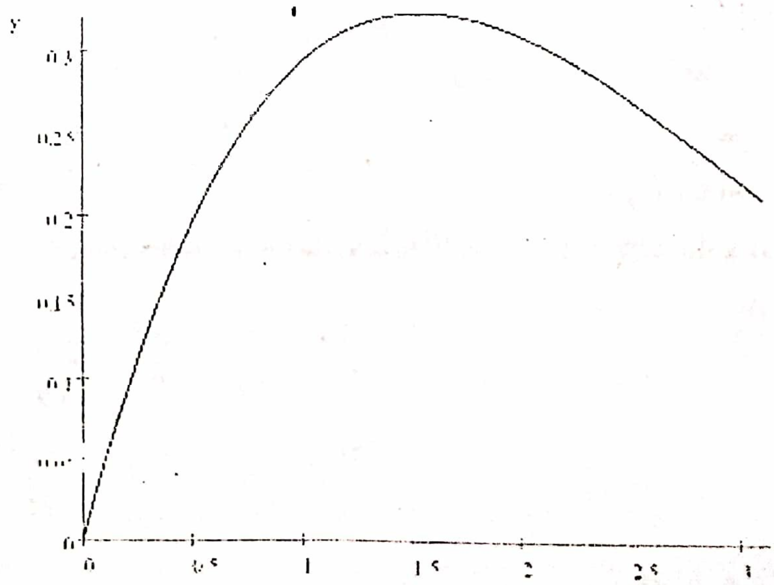
d) **Etudions s sur $[0, \pi]$**
$s(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})$, s est dérivable sur $[0, \pi]$ et

$$\begin{aligned} s'(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{t}{2}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}[\cos(\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

$t \in [0, \pi]$, $\quad s'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{-\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$e^{\frac{-\pi}{2}}$

e) **Courbe $(\mathcal{C}_s)$ de s sur $[0, \pi]$.**



f) Calculons la valeur moyenne S_M de s

$$S_M = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi s(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt.$$

Posons $u = e^{-\frac{t}{2}}$ alors $u' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$
$v' = \sin(\frac{t}{2})$ alors $v = -2\cos(\frac{t}{2})$.
Alors on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt &= [-2e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{t}{2})]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{t}{2})dt \\ &= 2 - \int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{t}{2})dt\end{aligned}$$

Posons $u = e^{-\frac{t}{2}}$ alors $u' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$
$v' = \cos(\frac{t}{2})$ alors $v = 2\sin(\frac{t}{2})$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt &= 2 - \int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\cos(\frac{t}{2})dt \\ &= 2 - \left([2e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt\right) \\ &= 2 - 2e^{-\frac{\pi}{2}} - \int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt.\end{aligned}$$

Donc on a

$$2\int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt = 2 - 2e^{-\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Comme

$$S_M = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{t}{2})dt$$

donc on a

$$S_M = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}{\pi}.$$

EXERCICE 2

$$(S) : \begin{cases} 2x' + x - y = v \\ x' - 2y' + 5x = 10y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(t) = 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t \geq \frac{\pi}{2} \\ v(t) = 8\sin 2t & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

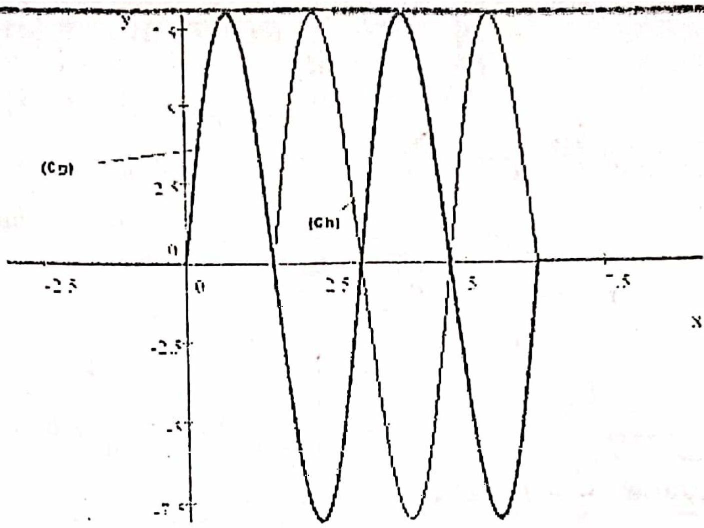
Partie I

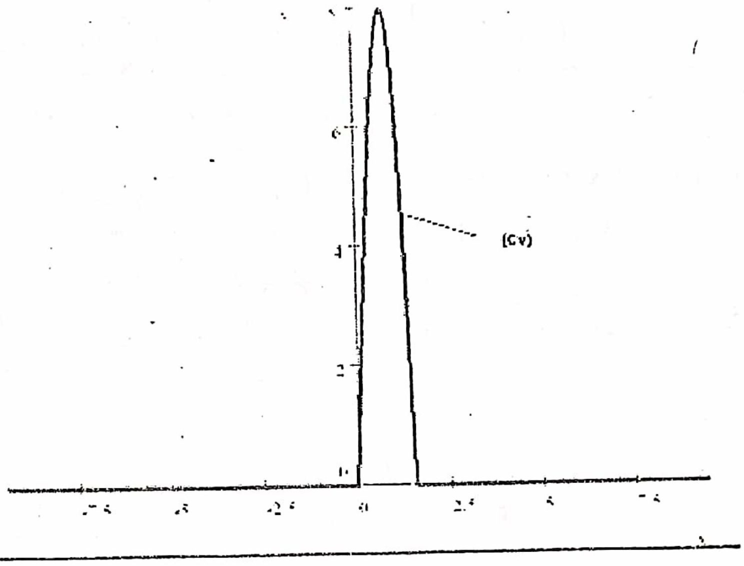
$g(t) = 8\sin(2t)U(t)$ et $h(t) = g(t - \frac{\pi}{2})$.

1. Déterminons la transformée de Laplace G de g puis celle de h.

$$\begin{aligned}G(p) &= \mathcal{L}[8\sin(2t)U(t)](p) = 8 \times \frac{2}{p^2 + 2^2} = \frac{16}{p^2+4} \\ H(p) &= \mathcal{L}[g(t - \frac{\pi}{2})](p) = e^{-p\frac{\pi}{2}}G(p) = \frac{16e^{-p\frac{\pi}{2}}}{p^2+4}\end{aligned}$$

2. Courbes de g, h et v





3. D'après la question 2. on a $v(t) = g(t) + g(t - \frac{\pi}{2})$.
   D'où on a
$$V(p) = G(p) + e^{-p\frac{\pi}{2}} G(p) = \frac{16}{p^2+4}[1 + e^{-p\frac{\pi}{2}}]$$

Partie II

1.
$$(S) : \begin{cases} 2x' + x - y & = & v \\ x' - 2y' + 5x & = & 10y \end{cases}$$

En appliquant la transformation de Laplace à (S) on obtient :
$$(S') : \begin{cases} 2pX(p) + X(p) - Y(p) & = & V(p) \quad (1) \\ pX(p) - 2pY(p) + 5X(p) & = & 10Y(p) \quad (2) \end{cases}$$

car $x(0) = y(0) = 0$.
$(2) \Leftrightarrow (p+5)X(p) - 2(p+5)Y(p) = 0 \Leftrightarrow X(p) = 2Y(p)$.
On a donc
$$(1) \Leftrightarrow 2(2p+1)Y(p) - Y(p) = V(p) \Leftrightarrow (4p+1)Y(p) = V(p).$$

Ce qui donne
$$Y(p) = \frac{V(p)}{4p+1} \quad \text{et} \quad X(p) = \frac{2V(p)}{4p+1}.$$

$$\begin{cases} X(p) & = \frac{32}{(4p+1)(p^2+4)}[1+e^{-p\frac{\pi}{2}}] \\ Y(p) & = \frac{16}{(4p+1)(p^2+4)}[1+e^{-p\frac{\pi}{2}}] \end{cases}$$

2. Décomposons en éléments simples $F(p) = \frac{1}{(4p+1)(p^2+4)}$ et déterminons l'original de F.

$$F(p) = \frac{1}{(4p+1)(p^2+4)} = \frac{a}{4p+1} + \frac{bp+c}{p^2+4}.$$

$$a = \frac{1}{p^2+4}|_{p=-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(-\frac{1}{4})^2+4} = \frac{16}{65}$$

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} F(p) = \frac{a}{4} + b$$

donc on a $\frac{a}{4} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{a}{4} = \frac{-4}{65}.$

$$F(0) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad F(0) = a + \frac{c}{4} \text{ donc on a } \quad c = 1 - 4a = \frac{1}{65}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{4}{65}\frac{1}{p+\frac{1}{4}} - \frac{4}{65}\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{65}\frac{1}{p^2+4} \\ &= \frac{4}{65}[\frac{1}{p+\frac{1}{4}} - \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{8}\frac{2}{p^2+4}] \quad \text{et on a} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(p)](t) = \frac{4}{65}[e^{-\frac{t}{4}} - \cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t]U(t) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} X(p) &= 32[F(p) + e^{-p\frac{\pi}{2}}F(p)] \quad \text{et} \\ Y(p) &= 16[F(p) + e^{-p\frac{\pi}{2}}F(p)] \quad \text{alors on a} \\ x(t) &= 32[f(t) + f(t - \frac{\pi}{2})] \quad \text{et} \\ y(t) &= 16[f(t) + f(t - \frac{\pi}{2})]. \end{aligned}$$

EXERCICE 3

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e(t) = t & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ e(t) = -t+2 & \text{si} \quad 1 \le t < 2 \\ e(t) = 0 & \text{si} \quad 2 \le t \end{cases} \quad \text{et} \quad (E_1) : Li'(t) + i(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad i(0) = 0.$$

1. Prouvons que $I(p) = H(p)E(p)$ avec

$$H(p) = \frac{1}{Lp+1}$$

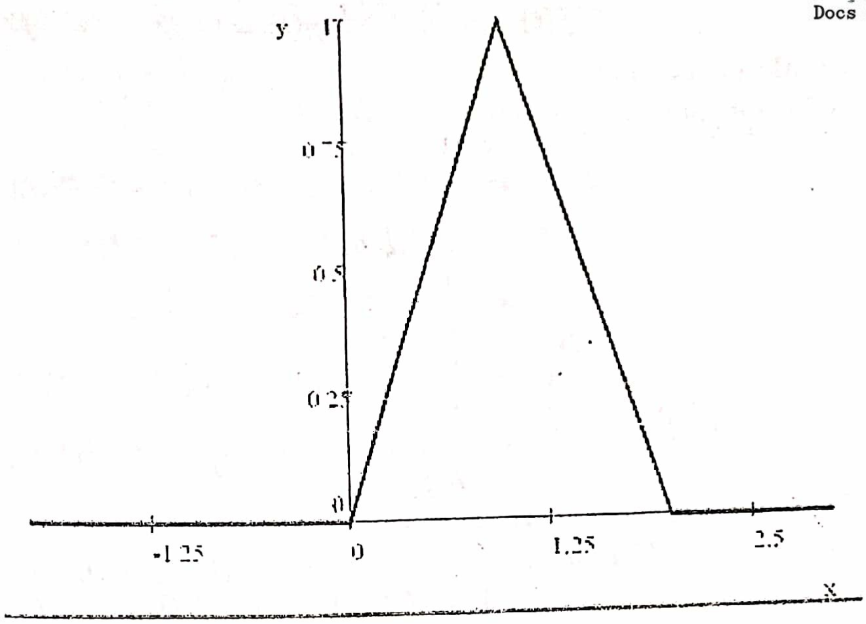
.En appliquant la transformée de Laplace aux membres de (E_1) on obtient :

$$\begin{aligned} & L(pI(p) - i(0^+)) + I(p) = E(p) \Leftrightarrow (Lp+1)I(p) = E(p) \\ & \Leftrightarrow I(p) = \frac{1}{Lp+1}E(p). \end{aligned}$$

D'où on a $I(p) = H(p)E(p)$ avec

$$H(p) = \frac{1}{Lp+1}.$$

2. a) Représentons $e(t)$.



b) Exprimons $e(t)$ en utilisant l'echelon unité

$$
\begin{aligned}
e(t) &= tU(t) + (-t + 2 - t)U(t-1) + (0 + t - 2)U(t-2) \\
&= tU(t) + (-2t + 2)U(t-1) + (t-2)U(t-2) \\
&= tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)
\end{aligned}
$$

c) Calculons $E(p)$.

$$E(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2} = \frac{1}{p^2}[1 - 2e^{-p} + e^{-2p}].$$

d) Déduisons que $I(p) = \frac{1}{L}[F(p) - 2e^{-p}F(p) + e^{-2p}F(p)]$ avec $F(p) = \frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})}$.

On sait que $I(p) = H(p)E(p)$ avec $H(p) = \frac{1}{Lp+1}$ et
$E(p) = \frac{1}{p^2}[1 - 2e^{-p} + e^{-2p}]$.
D'où on a

$$
\begin{aligned}
I(p) &= \frac{1}{Lp+1} \times \frac{1}{p^2}[1 - 2e^{-p} + e^{-2p}] \\
&= \frac{1}{L} \times \frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})}[1 - 2e^{-p} + e^{-2p}] \\
&= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})} - 2e^{-p}\frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})} + e^{-2p}\frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})}\right] \\
&= \frac{1}{L}[F(p) - 2e^{-p}F(p) + e^{-2p}F(p)] \quad \text{avec} \quad F(p) = \frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})}.
\end{aligned}
$$

3. a) Décomposons en éléments simples $F(p)$.

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+\frac{1}{L})} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p+\frac{1}{L}}$$

$b = \frac{1}{p+\frac{1}{L}}|_{p=0} = L$, $\quad c = \frac{1}{p^2}|_{p=\frac{-1}{L}} = L^2$, $\quad \lim_{p\to+\infty} pF(p) = 0 = a + c \Leftrightarrow a = -c = -L^2$
Donc

$$F(p) = \frac{-L^2}{p} + \frac{L}{p^2} + \frac{L^2}{p+\frac{1}{L}}.$$

b) Déterminons l'original f de F.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)](t) = (-L^2 + Lt + L^2 e^{-\frac{t}{L}})U(t).$$

c) Calculons $i(t)$.
On sait que

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{1}{L}[F(p) - 2e^{-p}F(p) + e^{-2p}F(p)] \quad \text{donc} \\ i(t) &= \mathcal{L}^{-1}[I(p)](t) = [f(t) - 2f(t-1) + f(t-2)] \\ &= \frac{1}{L}(-L^2 + Lt + L^2 e^{-\frac{t}{L}})U(t) \\ &- \frac{2}{L}(-L^2 + L(t-1) + L^2 e^{-\frac{t-1}{L}})U(t-1) \\ &+ \frac{1}{L}(-L^2 + L(t-2) + L^2 e^{-\frac{t-2}{L}})U(t-2). \end{aligned}$$

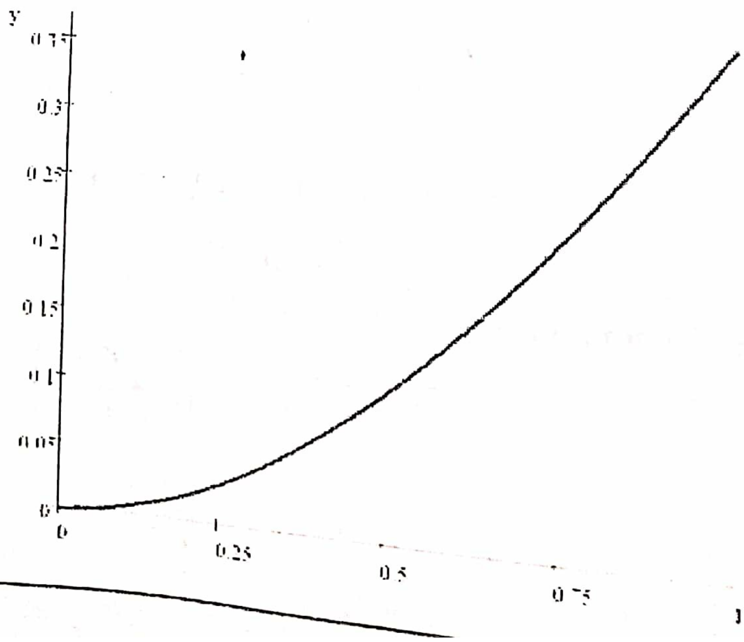
d) Définissons i par intervalles
Si $t < 0$ on a $U(t) = 0$, $U(t-1) = 0$ et $U(t-2) = 0$, donc $i(t) = 0$.
Si $0 \leq t < 1$ on a $U(t) = 1$, $U(t-1) = 0$ et $U(t-2) = 0$, donc $i(t) = -L + t + Le^{-\frac{t}{L}}$.
Si $1 \leq t < 2$ on a $U(t) = 1$, $U(t-1) = 1$ et $U(t-2) = 0$, donc $i(t) = -L + t + Le^{-\frac{t}{L}} - 2(-L + t - 1 + Le^{-\frac{t-1}{L}}) =$
$-t + L + 2 + L(1 - 2e^{\frac{1}{L}})e^{-\frac{t}{L}}$.
Si $t \leq 2$ on a $U(t) = 1$, $U(t-1) = 1$ et $U(t-2) = 1$, donc $i(t) = -t + L + 2 + L(1 - 2e^{\frac{1}{L}})e^{-\frac{t}{L}} - L + t - 2 + Le^{-\frac{t-2}{L}} =$
$L(1 - e^{\frac{1}{L}})^2 e^{-\frac{t}{L}}$.
En résumé on a

$$\begin{cases} i(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ i(t) = -L + t + Le^{-\frac{t}{L}} & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ i(t) = -t + L + 2 + L(1 - 2e^{\frac{1}{L}})e^{-\frac{t}{L}} & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ i(t) = L(1 - e^{\frac{1}{L}})^2 e^{-\frac{t}{L}} & \text{si} \quad 2 \leq t \end{cases}$$

4. a) Etudions i sur $[0, 1]$ avec $L = 1$. $i(t) = -1 + t + e^{-t}$ et $i'(t) = 1 - e^{-t}$. $\forall 0 \leq t \leq 1, i'(t) \geq 0$.

t	0		1
$i'(t)$		+	
$i(t)$	0	$\nearrow$	e^{-1}

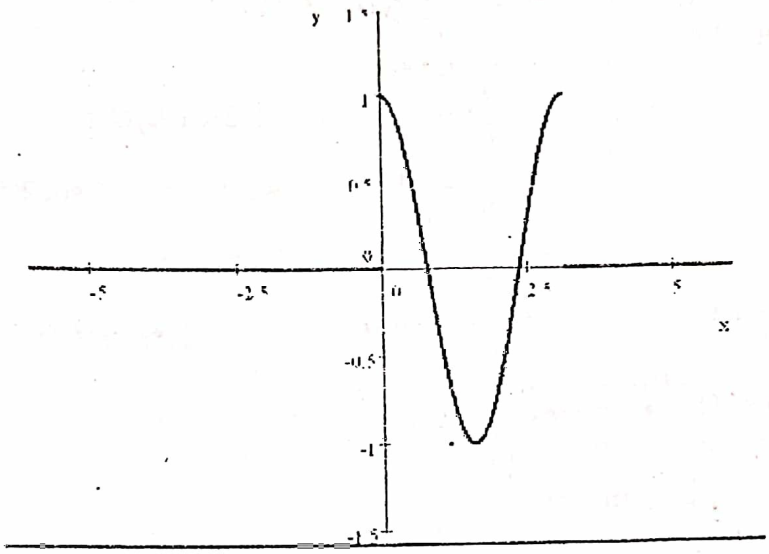
b) Courbe de i sur $[0, 1]$.



EXERCICE 4

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e(t) = \cos(2t) & \text{si} \quad 0 \le t < \pi \\ e(t) = 0 & \text{si} \quad \pi \le t \end{cases} \quad \text{et} \quad (E) : i'(t) + i(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad i(0) = 0$$

1. Représentons e.



2. Montrons que $e(t) = \cos 2t[U(t) - U(t-\pi)]$.
   $e(t) = (\cos 2t - 0)U(t) + (0 - \cos 2t)U(t-\pi) = \cos 2t[U(t) - U(t-\pi)]$.
3. Montrons que $E(p) = \frac{p}{p^2+4}[1 - e^{-p\pi}]$.
   $e(t) = \cos 2t[U(t) - U(t-\pi)] = \cos 2tU(t) - \cos 2(t-\pi)U(t-\pi)$ car $\cos 2(t-\pi) = \cos(2t-2\pi) = \cos 2t$.
   On a donc

$$\begin{aligned} E(p) &= \mathcal{L}[e(t)](p) \\ &= \frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+4}e^{-p\pi} = \frac{p}{p^2+4}[1 - e^{-p\pi}]. \end{aligned}$$

4. a) En appliquant la transformée de Laplace aux membres de (E), déterminons la transformée de Laplace I de i.
   En appliquant la transforméee de Laplace aux membres de (E) on obtient $PI(p) - i(0^+) + I(p) = E(p) \Leftrightarrow (p+1)I(p) = E(p)$
   $\Leftrightarrow I(p) = \frac{E(p)}{p+1}$ car $i(0^+) = i(0) = 0$.
   Comme $E(p) = \frac{p}{p^2+4}[1 - e^{-p\pi}]$ on a donc

$$I(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4)}[1 - e^{-p\pi}].$$

   b) Décompsons $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4)}$ en éléments simples.
   $F(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+4}$.
   $a = \frac{p}{p^2+4}|_{p=-1} = -\frac{1}{5}$, $\lim_{p\to+\infty} pF(p) = 0 = a + b \Leftrightarrow b = -a = \frac{1}{5}$ et $F(0) = 0 = a + \frac{c}{4} \Leftrightarrow c = -4a = \frac{4}{5}$.
   On a donc

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{-1}{5(p+1)} + \frac{\frac{1}{5}p + \frac{4}{5}}{p^2+4} \\ &= \frac{-1}{5} \times \frac{1}{p+1} + \frac{1}{5} \times \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{p^2+4}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} F(t) &= (\frac{-1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\sin 2t)U(t) \\ &= \frac{1}{5}(-e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t)U(t). \end{aligned}$$

c) **Déduisons $i(t)$.**
$I(p) = F(p) - e^{-p\pi}F(p)$ donc $i(t) = f(t) - f(t-\pi)$.
D'où on a

$$\begin{aligned} i(t) = &= \frac{1}{5}(-e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t)U(t) \\ &- \frac{1}{5}(-e^{-(t-\pi)} + \cos 2(t-\pi) + 2\sin 2(t-\pi))U(t-\pi) \\ &= \frac{1}{5}(-e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t)U(t) \\ &- \frac{1}{5}(-e^{-(t-\pi)} + \cos 2t + 2\sin 2t)U(t-\pi) \end{aligned}$$

car $\cos 2(t-\pi) = \cos(2t-2\pi) = \cos 2t$ et
$\sin 2(t-\pi) = \sin(2t-2\pi) = \sin 2t$.

4. **Définissons i par intervalles.**
Si $t < 0$ on a $U(t) = 0$ et $U(t-\pi) = 0$ donc $i(t) = 0$.
Si $0 \le t < \pi$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\pi) = 0$ donc
$i(t) = \frac{1}{5}(-e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t$.
Si $\pi \le t$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\pi) = 1$ donc
$i(t) = \frac{1}{5}(-e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t) - \frac{1}{5}(-e^{-(t-\pi)} + \cos 2t + 2\sin 2t) = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)e^{-t}$.
En résumé on a

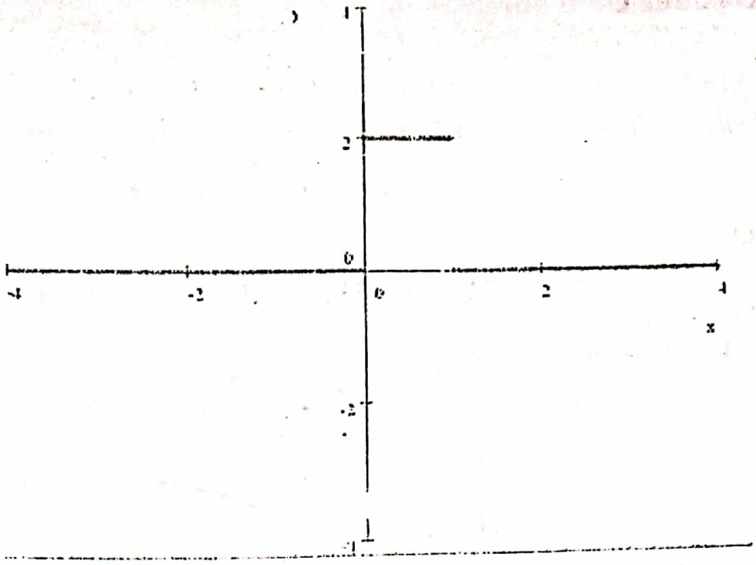
$$\begin{cases} i(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ i(t) = \frac{1}{5}(-e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t & \text{si} \quad 0 \le t < \pi \\ i(t) = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)e^{-t} & \text{si} \quad \pi \le t \end{cases}$$

EXERCICE 5

On a $(E) : v(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t v(u)du = f(t)$ où la fonction f est définie par
$f(t) = V_0[U(t) - U(t-\tau)]$.

1. a) **Donnons la courbe de f pour $V_0 = 2$ et $\tau = 1$.**

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ f(t) = 2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad 1 \le t \end{cases}$$



b) Déterminons la transformée de Laplace F de f.
$f(t) = V_0[U(t) - U(t-\tau)]$ donc $F(p) = V_0[\frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p}] = \frac{V_0}{p}[1 - e^{-p\tau}]$.

2. a) **Résolvons (E) en utilisant la transformation de Laplace.**
En appliquant à (E) la transformée de Laplace, on obtient
$V(p) + \frac{1}{RC}\frac{V(p)}{p} = F(p)$ car $\mathcal{L}[\int_0^t v(u)du](p) = \frac{V(p)}{p}$.
On a donc

$$\begin{aligned}
V(p) + \frac{1}{RC}\frac{V(p)}{p} = F(p) \quad &\Leftrightarrow \quad V(p)(1 + \frac{1}{RCp}) = F(p) \\
&\Leftrightarrow \quad V(p) = \frac{RCp}{RCp+1}F(p) \\
&= \frac{p}{p + \frac{1}{RC}} \times \frac{V_0}{p}[1 - e^{-p\tau}] \\
&= \frac{V_0}{p + \frac{1}{RC}}[1 - e^{-p\tau}] \\
&= V_0[\frac{1}{p + \frac{1}{RC}} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}e^{-p\tau}].
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}](t) = e^{-\frac{t}{RC}}U(t)$ et $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}e^{-p\tau}](t) = e^{-\frac{t-\tau}{RC}}U(t-\tau)$ donc $v(t) = V_0[e^{-\frac{t}{RC}}U(t) - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}U(t-\tau)]$.

$v(t)$

b) **Définissons v par intervalles.**
Si $t < 0$ on a $U(t) = 0$ et $U(t-\tau) = 0$ donc $v(t) = 0$.
Si $0 \leq t < \tau$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\tau) = 0$ donc $v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.
Si $\tau \leq t$ on a $U(t) = 1$ et $U(t-\tau) = 1$ donc
$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} - V_0 e^{-\frac{t-\tau}{RC}} = V_0(1 - e^{\frac{\tau}{RC}})e^{-\frac{t}{RC}}$.
En résumé on a

$$\begin{cases} v(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ v(t) = V_0(1 - e^{\frac{\tau}{RC}})e^{-\frac{t}{RC}} & \text{si } \tau \leq t \end{cases}$$

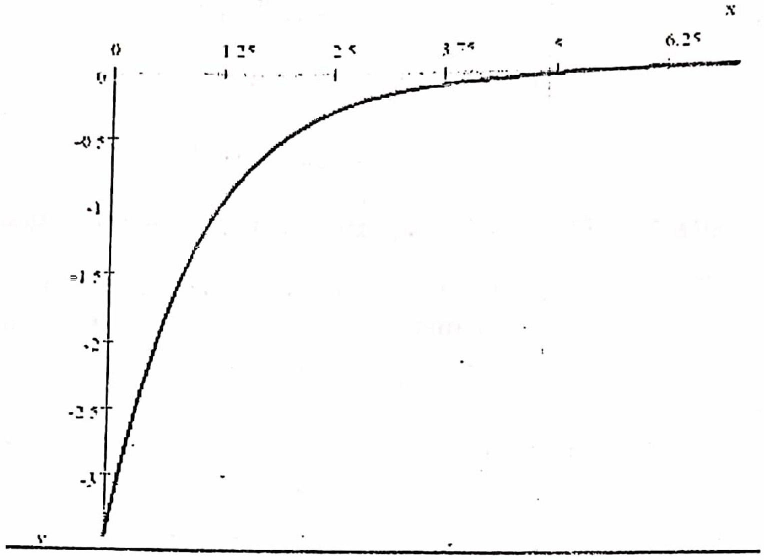
3. a) **Calculons $v(\tau^-)$ et montrons que $v(\tau^-) < V_0$.**
$\lim_{t\to\tau^-} v(t) = \lim_{t\to\tau} V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} = v(\tau^-)$.
$-\frac{\tau}{RC} < 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\tau}{RC}} < 1$ et comme $V_0 > 0$ on a alors $V_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} < V_0$ d'où $v(\tau^-) < V_0$.

b) **Montrons que $\sigma = v(\tau^-) - v(\tau) = V_0$.**
$v(\tau) = V_0(1 - e^{\frac{\tau}{RC}})e^{-\frac{\tau}{RC}}$ car $\tau \in [\tau, +\infty[$ on a donc
$v(\tau) = V_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} - V_0$ par conséquent on a $\sigma = v(\tau^-) - v(\tau) = V_0$

c) Variations de v sur $[\tau, +\infty[$.
$v(t) = V_0(1 - e^{\frac{\tau}{RC}})e^{-\frac{t}{RC}}$ et $v'(t) = -\frac{V_0}{RC}(1 - e^{\frac{\tau}{RC}})e^{-\frac{t}{RC}}$
$= \frac{V_0}{RC}(e^{\frac{\tau}{RC}} - 1)e^{-\frac{t}{RC}}$.
$\frac{V_0}{RC}(e^{\frac{\tau}{RC}} - 1) > 0$ et $e^{-\frac{t}{RC}} > 0, \forall t \geq \tau$ donc $v'(t) > 0, \forall t \geq \tau$.

t	τ		$+\infty$
$v'(t)$	$+$	$+$	$+$
$v(t)$	$v(\tau)$	$\nearrow$	0

d) Courbe de v avec $\tau = 1, RC = 1$ et $V_0 = 2$.



EXERCICE 6

1. a) Déterminons a, b, c et d tels que

$$F(p) = \frac{2}{(p^2 - 4p + 13)(p^2 - 4p + 5)} = \frac{ap + b}{p^2 - 4p + 13} + \frac{cp + d}{p^2 - 4p + 5}$$

Les racines de $p^2 - 4p + 5$ sont $2 + i$ et $2 - i$.
$c(2 + i) + d = \frac{2}{p^2 - 4p + 13}|_{p=2+i} = \frac{2}{(2+i)^2 - 4(2+i) + 13} = \frac{1}{4}$.
Par indentification on a $c = 0$ et $d = \frac{1}{4}$.
$\lim_{p \to +\infty} pF(p) = 0 = a + c \Leftrightarrow a = 0$ car $c = 0$. $F(0) = \frac{2}{65} = \frac{b}{13} + \frac{d}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{65} = \frac{5b + 13d}{65} \Leftrightarrow$
$2 = 5b + 13d$.
Comme $d = \frac{1}{4}$ on a donc $b = -\frac{1}{4}$.
On a donc

$$F(p) = \frac{2}{(p^2 - 4p + 13)(p^2 - 4p + 5)} = \frac{1}{4}[\frac{1}{p^2 - 4p + 5} - \frac{1}{p^2 - 4p + 13}]$$

b) Soit l'original f de $F(p)$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{4}[\frac{1}{p^2 - 4p + 5} - \frac{1}{p^2 - 4p + 13}] \\ &= \frac{1}{4}[\frac{1}{(p-2)^2 + 1} - \frac{1}{3}\frac{3}{(p-2)^2 + 9}] \quad \text{donc} \\ f(t) &= \frac{1}{4}[e^{2t}\sin t - \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t]U(t). \end{aligned}$$

2. Déterminons l'original g de G.

$$G(p) = \frac{p-2}{(p^2-4p+13)^2}.$$

Posons $H(p) = \frac{1}{p^2-4p+13}$ alors $H'(p) = -\frac{2(p-2)}{(p^2-4p+13)^2}$.
On a donc $G(p) = -\frac{1}{2}H'(p) \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}th(t)$ car $\mathcal{L}^{-1}[-H'(p)](t) = th(t)$ avec $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)](t)$.
$H(p) = \frac{1}{p^2-4p+13} = \frac{1}{(p-2)^2+9} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3tU(t)$.
Donc

$$g(t) = \frac{1}{6}te^{2t}\sin 3tU(t).$$

3. Résolvons l'équation différentielle suivante.

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2t}(2\sin t + 3\cos 3t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation on obtient

$$p^2Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) - 4(pY(p) - y(0^+)) + 13Y(p) = \frac{2}{(p-2)^2+1} + 3\frac{p-2}{(p-2)^2+9}.$$

Comme $y(0) = y'(0) = 0$ on a

$$\begin{aligned} (p^2-4p+13)Y(p) &= \frac{2}{(p-2)^2+1} + 3\frac{p-2}{(p-2)^2+9} \\ \Leftrightarrow Y(p) &= \frac{2}{(p^2-4p+5)(p^2-4p+13)} \\ &+ 3\frac{p-2}{(p^2-4p+13)^2} \\ &= F(p) + 3G(p). \end{aligned}$$

D'où $y(t) = f(t) + 3g(t)$ et d'après 1.b) et 2. on a

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}[e^{2t}\sin t - \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t]U(t) + \frac{1}{2}te^{2t}\sin 3tU(t) \\ &= e^{2t}[\frac{1}{4}\sin t + (\frac{t}{2} - \frac{1}{12})\sin 3t]U(t). \end{aligned}$$

EXERCICE 7

$J(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta$ avec $t > 0$. On admet que $J'(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d}{dt}[\cos(t\sin\theta)]d\theta$.

1. a) Montrer que $J'(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta$ et $J''(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(\theta)\cos(t\sin\theta)d\theta$.
Nous allons utiliser le fait que $\cos'(at+b) = -a\sin(at+b)$ et $\sin'(at+b) = a\cos(at+b)$.
$J'(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(t\sin\theta)]'d\theta = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta$.
$J''(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta[\sin(t\sin\theta)]'d\theta = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(t\sin\theta)d\theta$.

b) On admet que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(\theta)\cos(t\sin\theta)d\theta = \frac{1}{t\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta$.
Montrons que J est solution de l'équation différentielle (E) : $ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0$.
D'après 1. on a
$tJ''(t) + J'(t) + tJ(t) = -\frac{t}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(t\sin\theta)d\theta$

$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta$.

Comme $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ donc on a

$$\begin{aligned}
& tJ''(t) + J'(t) + tJ(t) = \\
- & \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\theta\cos(t\sin\theta)d\theta - \\
& \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta \\
= & \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\theta\cos(t\sin\theta)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(\theta)\cos(t\sin\theta)d\theta = \frac{1}{t\pi}\int_0^\pi \sin\theta\sin(t\sin\theta)d\theta$.

Donc J est une solution de (E).

b) **Montrons que $F(p) = \mathcal{L}[J(t)](p)$ est solution de $(E') : (p^2+1)F'(p) + pF(p) = 0$.**

En appliquant la transformation de Laplace à chaque membre de (E) on obtient $-[p^2F(p) - pJ(0^+) - J'(0^+]' + (pF(p) - J(0^+)) - F'(p) = 0$ car $\mathcal{L}[tf(t)](p) = -F'(p)$.

On a donc $-p^2F'(p) - 2pF(p) + J(0^+) + pF(p) - J(0^+) - F'(p) = 0 \Leftrightarrow -(p^2+1)F'(p) - pF(p) = 0 \Leftrightarrow (p^2+1)F'(p) + pF(p) = 0$.

D'où le résultat.

b) **Résolvons (E')**

$(E') : (p^2+1)F'(p) + pF(p) = 0$

$$\begin{aligned}
F(p) &= K\exp[-\int \frac{p}{p^2+1}dp] = K\exp[-\frac{1}{2}\int \frac{(p^2+1)'}{p^2+1}dp] \\
&= K\exp[-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)] = K\exp[-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)] \\
&= K\exp[\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}] = \frac{K}{\sqrt{p^2+1}}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

c) **En utilisant le théorème de la valeur initiale montrons que $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.**

$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{pK}{\sqrt{p^2+1}} = K$ et $J(0) = 1$.

Or d'après le le théorème de la valeur initiale on a $\lim_{p\to+\infty} pF(p) = J(0)$.

D'où $K = 1$ et par conséquent on a $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

3. a) **Deduisons de 2.c) la transformée de Laplace de $J \star J$.**

$\mathcal{L}[(J\star J)(t)](p) = [\mathcal{L}[J(t)](p)]^2$.

Or d'aprés 2.c), $\mathcal{L}[J(t)](p) = F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ donc

$\mathcal{L}[(J\star J)(t)](p) = \frac{1}{p^2+1}$.

b) **Déduisons $J \star J$.**

$\mathcal{L}[(J\star J)(t)](p) = \frac{1}{p^2+1}$ donc $(J\star J)(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^2+1}](t) = \sin tU(t)$.

EXERCICE 8

$$(E) : tf'(t) + 2\int_0^t f(u)\sin(t-u)du = \sin t \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1- a) Montrons que (E) s'écrit $tf'(t) + 2(f \star \mathcal{U}\sin)(t) = \sin t\mathcal{U}(t)$.
$t > 0$ donc $\mathcal{U}(t) = 1$ et $\sin t\mathcal{U}(t) = \sin t$.
Les fonctions f et $\sin \mathcal{U}$ sont causales donc
$(f \star \mathcal{U}\sin)(t) = \int_0^t f(u)\mathcal{U}(t-u)\sin(t-u)du$.
Comme $u < t$ donc $\mathcal{U}(t-u) = 1$ et on a donc $(f \star \mathcal{U}\sin)(t) = \int_0^t f(u)\sin(t-u)du$.
(E) peut donc s'écrire $tf'(t) + 2(f \star \mathcal{U}\sin)(t) = \sin t\mathcal{U}(t)$.

b) On sait d'aprés le formulaire que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[tf(t)] &= -F(p), \mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+), \\
\mathcal{L}[(f \star g](p) &= F(p)G(p) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[\sin \omega t\mathcal{U}(t)](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

Donc en appliquan la transformation de Laplace aux membres de (E) on a

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}[tf'(t)](p) + 2\mathcal{L}[(f \star \mathcal{U}\sin)(t)](p) = \mathcal{L}[\sin t\mathcal{U}(t)](p) \\
\Leftrightarrow \quad & -[pF(p) - f(0^+)]' + 2F(p) \times \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & -F(p) - pF'(p) + 2F(p) \times \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & -p(p^2+1)F'(p) - (p^2+1)F(p) + 2F(p) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & -p(p^2+1)F'(p) - (p^2-1)F(p) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (E') : p(p^2+1)F'(p) + (p^2-1)F(p) = -1
\end{aligned}$$

2- a) Décomposons en éléments simples la fraction

$$R(p) = \frac{1-p^2}{p(p^2+1)}$$

$$\begin{aligned}
R(p) &= \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+1} \Rightarrow a = \frac{1-p^2}{p^2+1}|_{p=0} = 1 \\
bi + c &= \frac{1-p^2}{p^2+1}|_{p=i} = \frac{2}{i} = -2i \Rightarrow b = -2 \quad \text{et } c = 0. \\
R(p) &= \frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2+1}
\end{aligned}$$

b) Intégrons l'équation $p(p^2+1)F'(p) + (p^2-1)F(p) = 0$.

$$\begin{aligned}
F(p) &= Ke^{-\int \frac{b(p)}{a(p)}dp} \\
&= Ke^{\int \frac{p^2-1}{p^2+1}dp} \\
&= Ke^{\int \frac{1-p^2}{p^2+1}dp} \quad \text{or} \quad \frac{1-p^2}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc} \quad & \int \frac{1-p^2}{p^2+1}dp = \int \frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2+1}dp \\
& = \ln p - \ln(p^2+1) = \ln \frac{p}{p^2+1} \\
\text{et} \quad & F(p) = \frac{Kp}{p^2+1}, \quad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

c) **Solution particulière de (E').**
Soit $F_0(p) = K(p)\frac{p}{p^2+1}$ une solution particulière de (E').
$F_0'(p) = K'(p)\frac{p}{p^2+1} + K(p)\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}$.
F_0 solution de

$$(E') \Leftrightarrow \quad p(p^2+1)F_0'(p) + (p^2-1)F_0(p) = -1.$$

$$\Leftrightarrow p(p^2+1)[K'(p)\frac{p}{p^2+1} + K(p)\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}] + (p^2-1)K(p)\frac{p}{p^2+1} = -1$$

$$\Leftrightarrow p^2K'(p) = -1 \Leftrightarrow K'(p) = \frac{-1}{p^2}.$$

$$\text{Donc} \quad K(p) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad F_0(p) = K(p)\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}.$$

c) **Solution générale de (E').**

$$F(p) = F_h(p) + F_0(p) = \frac{Kp}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

3- a) **Déterminons K.**
$\lim_{p\to+\infty} F(p) = f(0^+) = 1$ (formule de la valeur initiale) et $\lim_{p\to+\infty} F(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{Kp}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} = 1$ donc $K = 1$.

b) **Déterminons f.**
$F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}$ donc $f(t) = (cost + sint)\mathcal{U}(t)$.

ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE 1

1. f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base canonique.}$$

a) Montrons que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$$det(A) = -4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$det(A) \neq 0$ donc f est bijectif et comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ alors f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminons l'expression de f^{-1}
$f(x,y,z) = (x',y',z') \Leftrightarrow f^{-1}(x',y',z') = (x,y,z)$.

$$f(x,y,z) = (x',y',z') \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y + 8z &= x' \quad (1) \\ x + 2y - z &= y' \quad (2) \\ -5x - 2y + 9z &= z' \quad (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow -3x + 7z = x' + y'$ (4) et $(3) + (2) \Rightarrow -4x + 8z = y' + z'$ (5).
(5) $\Leftrightarrow x = 2z - \frac{1}{4}y' - \frac{1}{4}z'$ et donc (4) $\Leftrightarrow -6z + \frac{3}{4}y' + \frac{3}{4}z' + 7z = x' + y' \Leftrightarrow z = x' + \frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}z' = \frac{1}{4}(4x' + y' - 3z')$.

Comme $x = 2z - \frac{1}{4}y' - \frac{1}{4}z'$ donc $x = 2x' + \frac{2}{4}y' - \frac{6}{4}z' - \frac{1}{4}y' - \frac{1}{4}z' = 2x' + \frac{1}{4}y' - \frac{7}{4}z'$.
D'après (2) on a $2y = -x + z + y' \Leftrightarrow 2y = -2x' - \frac{1}{4}y' + \frac{7}{4}z' + x' + \frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}z' + y' = -x' + y' + z' \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(-x' + y' + z')$.
On a donc

$$f^{-1}(x', y', z') = (x, y, z) = (2x' + \frac{1}{4}y' - \frac{7}{4}z', \frac{1}{2}(-x' + y' + z'), x' + \frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}z').$$

A^{-1} est la matrice associée à f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. a) **Montrons que 4 est une valeur propre de f.**
Calculons $det(A - 4I)$.

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Comme la première colonne de de la matrice $A - 4I$ est l'opposée de sa troisiéme colonne donc $det(A - 4I) = 0$ et par conséquent 4 est une valeur propre de f.
Calculons $f(V_2)$ avec $V_2 = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} f(V_2) &= AV_2 \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2V_2. \end{aligned}$$

Par définition 2 est une valeur propre de f associée au vecteur propre V_2.

b) **Déterminons les valeurs propres de f $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.**
On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = trace(A) \Leftrightarrow 2 + 4 + \lambda_3 = 7 \Leftrightarrow \lambda_3 = 1$. Donc les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$.

c) f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a trois valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable.

3. a) **Déterminons les sous-espaces propres.**
$E_2 = \{aV_2 / a \in \mathbb{R}^3\}$. car V_2 est un vecteur propre associé à 2.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_4 &\Leftrightarrow (A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 2y + 8z = 0 & (1) \\ x - 2y - z = 0 & (2) \\ -5x - 2y + 5z = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

$8 \times (2) + (1) \Leftrightarrow -18y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Donc $(1) \Rightarrow z = x$.

$(x,y,z) \in E_4 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,0,x) = x(1,0,1)$ et on a donc $E_4 = \{x(1,0,1)/x \in \mathbb{R}\}$.

$$(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -5x-2y+8z & = & 0 & (1) \\ x+y-z & = & 0 & (2) \\ -5x-2y+8z & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

(3) = (1) donc le système devient

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -5x-2y+8z & = & 0 & (1) \\ x+y-z & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

$5 \times (2) + (1) \Rightarrow 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow y = -z$ et donc $(2) \Rightarrow -z + x - z = 0 \Leftrightarrow x = 2z$. $(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (2z,-z,z) = z(2,-1,1)$ et on a donc $E_1 = \{z(2,-1,1)/z \in \mathbb{R}\}$.

b) Base B de vecteurs propres telle que la matrice de f dans cette base soit $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$B = (V_1, V_2, V_3)$ où $V_1 = (1,0,1)$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 4, $V_2 = (1,1,1)$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 2 et $V_3 = (2,-1,1)$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 1

c) Matrice de passage P de B_0 à B.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a mis les coordonnées de V_1 en première colonne, les coordonnées de V_2 en deuxième colonne et les coordonnées de V_3 en troisième colonne de P.

4. Résolvons le système différentiel

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -4x(t) - 2y(t) + 8z(t) \\ y'(t) & = & x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) & = & -5x(t) - 2y(t) + 9z(t) \end{array} \right. \quad \text{avec} x(0) = 1, y(0) = 2 \text{ et} z(0) = 3$$

$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de base on a $A = PDP^{-1}$ donc $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. En multipliant à gauche les membres de l'égalité précèdente par P^{-1} on obtient $(S) \Leftrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = DP^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Posons $P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ alors $P^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & 4\alpha(t) \\ \beta'(t) & = & 2\beta \\ \gamma'(t) & = & \gamma(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & Be^{4t} \\ \beta(t) & = & Ce^{2t} \\ \gamma(t) & = & De^{t} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad C, B, D \in \mathbb{R}.$$

Comme $P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Be^{4t} \\ Ce^{2t} \\ De^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & Be^{4t} + Ce^{2t} + 2De^{t} \\ y(t) & = & Ce^{2t} - De^{t} \\ z(t) & = & Be^{4t} + Ce^{2t} + De^{t} \end{array} \right.$$

Puisque $\left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \\ z(0) & = & 3 \end{array} \right.$ alors on a $\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & B + C + 2D \\ 2 & = & C - D \\ 3 & = & B + C + D \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & 5 \\ C & = & 0 \\ D & = & -2 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 5e^{4t} - 4e^{t} \\ y(t) & = & 2e^{2t} \\ z(t) & = & 5e^{4t} - 2e^{t} \end{array} \right.$$

EXERCICE 2

$B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + z, 2x - 3y + 2z, -x + 2y)$$

un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminons la matrice A de f dans la base B.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(e_1) & = f(1,0,0) = & (2, 2, -1) \\ f(e_2) & = f(0,1,0) = & (-2, -3, 2) \\ f(e_3) & = f(0,0,1) = & (1, 2, 0) \end{array} \right. \quad \text{donc } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Déterminons les valeurs propres de A.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$det(A - \lambda I) = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 - \lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 3)$.

$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -3$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et -3.

b) Sous-espaces propres.

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x - 2y + z & = & 0 & (1) \\ 2x - 4y + 2z & = & 0 & (2) \\ -x + 2y - z & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

On a $(2) = 2\times(1) = -2\times(3)$ donc le système se réduit à l'équation $x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow$ $x = 2y - z$.
$(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (2y-z,y,z) = (2y,y,0)+(-z,0,z) = y(2,1,0)+z(-1,0,1)$
et on a donc
$E_1 = \{y(2,1,0) + z(-1,0,1)/y,z \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad (A+3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y + z &= 0 \quad (1) \\ 2x + 2z &= 0 \quad (2) \\ -x + 2y + 3z &= 0 \quad (3) \end{cases}
\end{aligned}$$

On a $(2) \Rightarrow x = -z$ et lorsqu'on remplace dans (3) x par sa valeur on obtient $2y+4z = 0 \Leftrightarrow y = -2z$.
$(x,y,z) \in E_{-3} \Leftrightarrow (x,y,z) = (-z,-2z,z) = z(-1,-2,1)$ et on a donc
$E_{-3} = \{z(-1,-2,1)/z \in \mathbb{R}\}$.

c) **Justifions que A est diagonalisable.**
$dim(E_{-3}) + dim(E_1) = 3 = ord(A)$ donc A est diagonalisable.

3. **On pose** $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$..
déterminons P^{-1}.
Calculons $det(P)$.

$$det(P) = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Déterminons la comatrice de P.

$$Com(p) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Com(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Com^t(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $P^{-1} = \frac{Com^t(P)}{det(P)}$ donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrons que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

4. Montrons par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculons A^n.
D'après la question 3. on a $A = PDP^{-1}$.
Donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.
Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
$A^{n+1} = A^n \times A$ or d'après l'hypothèse de récurrence on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$ donc $A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
D'où $A^n = PD^nP^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Calculons A^n.

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & (-3)^n \\ 1 & 0 & 2(-3)^n \\ 0 & -1 & -(-3)^n \end{pmatrix}.$$

$$PD^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & (-3)^n \\ 1 & 0 & (-3)^n \\ 0 & -1 & -(-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}.$$

5. Résolvons le système récurrent suivant

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + 2v_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad u_0 = 1, v_0 = 2 \text{et} \quad w_0 = -1$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Par récurrence on a : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8-4(-3)^n \\ 8(-3)^n \\ -4(-3)^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n & = & 8-4(-3)^n \\ v_n & = & 8(-3)^n \\ w_{n+1} & = & -4(-3)^n. \end{cases}$$

EXERCICE 3

$B=(i,j,k)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} f(i) &= 2i+2j+k \\ f(j) &= i+3j+k \\ f(k) &= i+2j+2k \end{cases}$$

1. a) Donnons la matrice M de f dans la base B.

Les coordonnées de $f(i), f(j)$ et $f(k)$ dans la base B sont :

$$\begin{cases} f(i) &= (2,2,1) \\ f(j) &= (1,3,1) \\ f(k) &= (1,2,2) \end{cases} \text{ donc on a } M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Montrons que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$$det(M)=2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5.$$

$det(M)=5\neq 0$ donc f est bijectif et comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons la matrice de f^{-1} dans la base B.

La matrice de f^{-1} dans la base B est matrice inverse M^{-1} de M.

$$Com(M)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Com(M)=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } Com^t(M)=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme $M^{-1}=\frac{Com^t(M)}{det(M)}$ donc $M^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

c) Déterminons le noyau $N(f)$ et l'image $I(f)$ de f.

Comme f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc on a :

$N(f)=\{(0,0,0)\}$ et $I(f)=\mathbb{R}^3$.

2. a) Déterminons les valeurs de α telles que $det(M-\alpha I)=0$.

$$M-\alpha I=\begin{pmatrix} 2-\alpha & 1 & 1 \\ 2 & 3-\alpha & 2 \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$det(M-\alpha I)=(2-\alpha)\begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 1 & 2-\alpha \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\alpha \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3-\alpha & 2 \end{vmatrix}$$

$=-(\alpha-1)^2(\alpha-5)$.

$det(M-\alpha I)=0\Leftrightarrow \alpha=1$ ou $\lambda=5$.

Les valeurs propres de M sont donc 1 et 5.

b) Déterminons l'ensemble E des vecteurs u tels que $f(u)=u$.

Soit $u=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
& f(u) = u \\
\Leftrightarrow\ & Mu = u \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x + y + z & = x \\ 2x + 3y + 2z & = y \\ x + y + 2z & = z. \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + y + z & = 0 \quad (1) \\ 2x + 2y + 2z & = 0 \quad (2) \\ x + y + z & = 0. \quad (3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$(1) = \frac{1}{2} \times (2) = (3)$ donc le système se réduit à l'équation
$x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$.

Donc $(x, y, z) \in E \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -x - y) = (x, 0, -x) + (0, y, -y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$.
D'où $E = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)/x, y \in \mathbb{R}\}$.

3. $u = (1, 0, -1), v = (0, 1, -2)$ et $w(1, 1, 1)$ dans la base B.

   a) Montrons que $B' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Soit M_1 la matrice associée à la famille B' dans la base B.
   On a $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   $det(M_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$
   $det(M_1) = 4 \neq 0$ donc $B' = (u, v, w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $B' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Exprimons $f(u), f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.
   $u = (1, 0, -1)$.
   $$f(u) = Mu = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = u.$$
   $v = (0, 1, -2)$.
   $$f(v) = Mv = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
   Déterminons α, β et γ tels que $f(v) = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$$
\begin{aligned}
& f(v)=\alpha u+\beta v+\gamma w \\
\Leftrightarrow\ & \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix}\alpha+\gamma\\ \beta+\gamma\\ -\alpha-2\beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}\alpha+\gamma &= -1 \quad (1)\\ \beta+\gamma &= -1 \quad (2)\\ -\alpha-2\beta+\gamma &= -3. \quad (3)\end{cases}
\end{aligned}
$$

(1) et (2) entraine que $\alpha=-1-\gamma$ et $\beta=-1-\gamma$ donc (3) donne $-(-1-\gamma)-2(-1-\gamma)+\gamma=-3 \Leftrightarrow 4\gamma=-6$ d'où $\gamma=-\frac{3}{2}$ et donc $\alpha=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ et $\beta=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.
On a donc $f(v)=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v-\frac{3}{2}w$.
$w=(1,1,1)$.

$$f(w)=Mw=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix}.$$

Déterminons α,β et γ tels que $f(w)=\alpha u+\beta v+\gamma w$.

$$
\begin{aligned}
& f(w)=\alpha u+\beta v+\gamma w \\
\Leftrightarrow\ & \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix}\alpha+\gamma\\ \beta+\gamma\\ -\alpha-2\beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}\alpha+\gamma &= 4 \quad (1)\\ \beta+\gamma &= 7 \quad (2)\\ -\alpha-2\beta+\gamma &= 4. \quad (3)\end{cases}
\end{aligned}
$$

(1) et (2) entraine que $\alpha=4-\gamma$ et $\beta=7-\gamma$ donc (3) donne $-(4-\gamma)-2(7-\gamma)+\gamma=4 \Leftrightarrow 4\gamma=22$ d'où $\gamma=\frac{11}{2}$ et donc $\alpha=4-\frac{11}{2}=-\frac{3}{2}$ et $\beta=7-\frac{11}{2}=\frac{3}{2}$.
On a donc $f(w)=-\frac{3}{2}u+\frac{3}{2}v+\frac{11}{2}w$.

c) Déduisons la matrice D de f dans la base $B'=(u,v,w)$. Les coordonnées de $f(u), f(v)$ et $f(w)$ dans la base $B'=(u,v,w)$ sont :

$$\begin{cases} f(u) &= (1,0,0)\\ f(v) &= (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2})\\ f(w) &= (-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{11}{2})\end{cases} \quad \text{donc on a}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&-\frac{3}{2}&\frac{11}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&1&3\\0&-3&11\end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4

Partie I

1.

$$(E_1) : X'(t) - X(t) = (2t+1)e^t.$$

a) **Déterminons a et b tels que $f(t) = (at^2+bt)e^t$ soit solution de (E_1).**
$f'(t) = (2at+b)e^t + (at^2+bt)e^t = (at^2+(b+2a)t+b)e^t$.
f solution de $(E_1) \Leftrightarrow f'(t) - f(t) = (2t+1)e^t$
$\Leftrightarrow (at^2+(b+2a)t+b)e^t - (at^2+bt)e^t = (2t+1)e^t$
$\Leftrightarrow (2at+b)e^t = (2t+1)e^t$.
Par indentification on a $2a = 2$ et $b = 1$ et d'où $b = 1$ et $b = 1$. On a donc $f(t) = (t^2+t)e^t$.

b) **Résolvons (E_1).**
La solution homogène est :$X_h(t) = Ke^t, \quad K \in \mathbb{R}$.
La solution générale est donc
$X(t) = X_h(t) + f(t) = Ke^t + (t^2+t)e^t = (t^2+t+K)e^t, \quad K \in \mathbb{R}$.

2. **Résolvons l'équation différentielle :**$Y'(t) - Y(t) = 2e^t$.
La solution homogène est : $Y_h(t) = Ke^t, \quad K \in \mathbb{R}$.
Cherchons la solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
Soit $Y_p(t) = K(t)e^t$ une solution particulière.
$Y_p'(t) = K'(t)e^t + K(t)e^t$.
$Y_p'(t) - Y_p(t) = 2e^t \Leftrightarrow K'(t)e^t + K(t)e^t - K(t)e^t = 2e^t$
$\Leftrightarrow K'(t)e^t = 2e^t \Leftrightarrow K'(t) = 2$. Donc $K(t) = 2t$. On a donc $Y_p(t) = 2te^t$.
La solution générale est donc
$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = Ke^t + 2te^t = (2t+K)e^t, \quad K \in \mathbb{R}$.

3. $(S) : \left\{ \begin{array}{lcll} X'(t) & = & X(t)+Y(t) & (1) \\ Y'(t) & = & Y(t)+Z(t)+e^t & (2) \\ Z'(t) & = & Z(t) & (3) \end{array} \right.$ avec $\left\{ \begin{array}{lcl} X(0) & = & 1 \\ Y(0) & & 1 \\ Z(0) & = & 1 \end{array} \right.$

a) **Résolvons (3).**
La solution générale de (3) est $Z_h(t) = Ke^t, \quad K \in \mathbb{R}$.
Or $Z(0) = 1$ donc $K = 1$ et on a $Z_h(t) = e^t$.

b) **Déduisons la solution de (S).**
D'après 3.a) on a (2) : $Y'(t) - Y(t) = 2e^t$.
Or d'après 2. la solution générale de cette équation est $Y(t) = (2t+K)e^t$.
Comme $Y(0) = 1$ alors on a $K = 1$ et $Y(t) = (2t+1)e^t$. L'équation (1) devient donc $X'(t) - X(t) = (2t+1)e^t$.
Or d'après 1. la solution générale de cette équation est $X(t) = (t^2+t+K)e^t$.
Comme $X(0) = 1$ alors $K = 1$ et $X(t) = (t^2+t+1)e^t$.

La solution de (S) est donc $\left\{ \begin{array}{lc} X(t) = & (t^2+t+1)e^t \\ Y(t) = & (2t+1)e^t \\ Z(t) = & e^t \end{array} \right.$

Partie II

$B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $f(v_1)$ avec $v_1 = e_1 - e_3 = (1,0,-1)$.

$$f(v_1) = Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

or $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $f(v_1) = v_1$ d'où par définition v_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

b) Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $v_2 = -e_2$ et $v_3 = e_2 - e_3$.

Les coordonnées de v_1, v_2 et v_3) dans la base B sont $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (0,-1,0)$ et $v_3 = (0,1,-1)$.

La matrice M associée à $B' = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base B est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$det(M) = 1 \neq 0$ donc $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ d'où $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Justifions que la matrice de f dans la base B' est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$f(v_2) = -f(e_2)$. Or $f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$(deuxième colonne de la matrice A de f dans la base B) donc $f(v_2) = e_1 - e_2 - e_3 = v_1 + v_2$ car $v_1 = e_1 - e_3$ et $v_2 = -e_2$.

$f(v_3) = f(e_2) - f(e_3)$. Or $f(e_3) = -e_1 + e_2 + 2e_3$(troisième colonne de la matrice A de f dans la base B) donc $f(v_3) = -e_3 = v_2 + v_3$.

Les coordonnées de $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ sont $f(v_1) = (1,0,0), f(v_2) = (1,1,0)$ et $f(v_3) = (0,1,1)$ donc la matrice T de f dans la base B' est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) Déterminons la matrice de passage P de B à B'.

$$P = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Determinons P^{-1}.

$com(P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $com^t(P) = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -0 & -1 \end{pmatrix}$ et comme $det(P) = 1$ donc

$$P^{-1} = \frac{com^t(P)}{det(P)} = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Vérifions que $T = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned}
P^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}AP = T$.

Partie III

$$(S_1) : \begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = -2 \end{cases}$$

1. On pose $U = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Vérifions que le système (S_1) s'écrit $V = AU + B$ où A est la matrice introduite dans la Partie II.

   L'écriture matricielle de (S_1) est
   $$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Donc $(S_1) \Leftrightarrow V = AU + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. X, Y et Z désignent des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $W = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix}$, $U = PW$ et $V = PQ$.

   a) **Montrons que $V = AU + B \Leftrightarrow Q = TW + P^{-1}B$.**
   $V = AU + B \Leftrightarrow P^{-1}V = P^{-1}AU + P^{-1}B$.
   Or $A = PTP^{-1}, U = PW$ et $Q = P^{-1}V$ donc $V = AU + B \Leftrightarrow$
   $Q = P^{-1}(PTP^{-1})PW + P^{-1}B \Leftrightarrow Q = TW + P^{-1}B$.
   D'où $V = AU + B \Leftrightarrow Q = TW + P^{-1}B$.

   b) **Déduisons que les fonctions X, Y et Z vérifient (S) de la Partie I.**

On a

$$Q = TW + P^{-1}B \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X(t) + Y(t) \\ Y(t) + Z(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X(t) + Y(t) \\ Y(t) + Z(t) + e^t \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X'(t) = X(t) + Y(t) \\ Y'(t) = Y(t) + Z(t) + e^t \\ Z'(t) = Z(t) \end{cases}$$

Donc X, Y et Z vérifient (S) de la **Partie I.**

c) **Déduisons** x, y et z **de** (S_1) **vérifiant** $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(t) = -2 \end{cases}$.

D'après 3. la solution générale de (S) est :

$$\begin{cases} X(t) = (t^2 + t + C_1)e^t \\ Y(t) = (2t + C_2)e^t \\ Z(t) = C_3 e^t \end{cases}$$

Comme $U = PW$ alors on a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t^2 + t + C_1)e^t \\ (2t + C_2)e^t \\ C_3 e^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (t^2 + t + C_1)e^t \\ (-2t - C_2 + C_3)e^t \\ (-t^2 - t - C_1 - C_3)e^t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = (t^2 + t + C_1)e^t \\ y(t) = (-2t - C_2 + C_3)e^t \\ z(t) = (-t^2 - t - C_1 - C_3)e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(t) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_2 + C_3 = 0 \\ -C_1 - C_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} x(t) = (t^2 + t + 1)e^t \\ y(t) = -2te^t \\ Z'(t) = (-t^2 - t - 2)e^t \end{cases}$$

$B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$, $u_1 = 3e_1 - 2e_2 + e_3$, $u_2 = -e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + e_3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(u_1) &= 2u_1 \\ f(u_2) &= u_1 + u_2 + 2u_3 \\ f(u_3) &= -u_2 + 4u_3 \end{cases}$$

1. **Montrons que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.**
   Les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ sont : $u_1 = (3, -2, 1), u_2 = (0, -1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Soit M la matrice associée à $B = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$, on a
   $$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   $det(M) = -4 \neq 0$ donc $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ par conséquent $B = (u_1, u_2, u_3)$ est base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminons la matrice A de f dans la base $B = (u_1, u_2, u_3)$.
   Les coordonnées de $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base $B = (u_1, u_2, u_3)$ sont
   $$\begin{cases} f(u_1) &= (2, 0, 0) \\ f(u_2) &= (1, 1, 2) \\ f(u_3) &= (0, -1, 4) \end{cases}$$
   donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Déterminons le noyau $N(f)$ et l'image $I(f)$ de f dans la base $B = (u_1, u_2, u_3)$.
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   $det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   Par conséquent $N(f) = \{(0, 0, 0)\}$ et $I(f) = \mathbb{R}^3$.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et
   $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Vérifions que l'inverse de P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et que $A = PJP^{-1}$. Montrons que $P^{-1}P = I$(I matrice unité d'ordre 3).
   $$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   $P^{-1}P = I$(matrice unité d'ordre 3) donc par définition
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de la matrice P.

Vérifions que $A = PJP^{-1}$.

$$PJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Or $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ donc $A = PJP^{-1}$

b) **Montrons par réccurence sur n que $A^n = PJ^nP^{-1}$.**

Pour $n = 1$ on a d'après $a)$ $A^1 = PJ^1P^{-1}$.

Supposons que $A^n = PJ^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PJ^{n+1}P^{-1}$.

$A^{n+1} = A^nA$. Or $A^n = PJ^nP^{-1}$ et $A = PJP^{-1}$

donc $A^{n+1} = PJ^nP^{-1}PJP^{-1} = PJ^n \times JP^{-1} = PJ^{n+1}P^{-1}$.

Donc $A^n = PJ^nP^{-1}$ pour tout entier n.

c) **Calculons E^2.**

$$E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $J = D + E$.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $J = D + E$.

d) **On admet que $J^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} E^k, \forall n \geq 1$(où C_n^k est le coefficient du Binôme de Newton).**

Montrer que $J^n = D^n + nD^{n-1}E$.

$$J^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} E^k$$

or d'après $c) E^k = 0$ pour $k \geq 2$ donc

$$\begin{aligned} J^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} E^k \\ &= C_n^0 D^n E^0 + C_n^1 D^{n-1} E^1 + C_n^2 D^{n-2} E^2 + \cdots + C_n^n D^{n-n} E^n \\ &= C_n^0 D^n E^0 + C_n^1 D^{n-1} E^1 \quad \text{car} \quad E^2 = E^3 = \cdots = E^n = 0 \\ &= D^n I + nD^{n-1}E \quad \text{car} \quad E^0 = I, C_n^0 = 1, C_n^1 = n \\ &= D^n + nD^{n-1}E \quad \text{car} \quad D^n I = D^n \end{aligned}$$

En déduisons l'expression explicite de J^n en fonction de n.

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

et $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} nD^{n-1}E &= n\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J^n &= D^n + nD^{n-1}E \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. $(S) : \begin{cases} x_n = -4x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} + 2z_{n-1} \\ z_n = -4y_{n-1} - 8z_{n-1} \end{cases}$ et on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

a) Montrons que (S) équivaut à $MX_{n-1} = X_n$ où $M = -2A$.
L'écriture matricielle de (S) donne

$$\begin{aligned} (S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= -2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= -2A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $MX_{n-1} = X_n$

b) Exprimons X_n en fonction de A, n et X_0.
$X_n = M^n X_0$ or $M = -2A$ donc $X_n = (-2)^n A^n X_0$.

c) Déduisons la solution de (S) avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculons $A^n = PJ^nP^{-1}$.

$$PJ^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 3^n \\ 0 & 2^n & 3^n \\ 0 & -2^n & -2\times 3^n \end{pmatrix}$$
$$PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 3^n \\ 0 & 2^n & 3^n \\ 0 & -2^n & -2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & (n+1)2^n - 3^n & 2^n + n2^{n-1} - 3^n \\ 0 & 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & -2^{n+1} + 2\times 3^n & -2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$X_n = (-2)^n A^n X_0$$
$$= (-2)^n \begin{pmatrix} 2^n & (n+1)2^n - 3^n & 2^n + n2^{n-1} - 3^n \\ 0 & 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & -2^{n+1} + 2\times 3^n & -2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-2)^n \begin{pmatrix} 2\times 2^n + 2^{n-1} - 3^n \\ 2^n - 3^n \\ -2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}$$

D'où la solution de (S) est : $\begin{cases} x_n = (-2)^n[2^{n+1} + 2^{n-1} - 3^n] \\ y_n = (-2)^n[2^n - 3^n] \\ z_n = (-2)^n[-2^n + 2\times 3^n] \end{cases}$

EXERCICE 6

Partie I

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} /a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

1. **Montrons que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.**
   Comme E est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (•) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E(a=0, b=0, c=0)$ donc $E \neq \emptyset$.

   (••) $\forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. M(a_1; b_1, c_1), M(a_2, b_2, c_2) \in E.$
   On a :

$$\alpha M(a_1,b_1,c_1) + \beta M(a_2,b_2,c_2)$$
$$= \alpha \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha a_1 + \beta a_2 \end{pmatrix}$$
$$= M(\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2) \in E.$$

Donc E est stable par combinaison linéaires.
$(\ast)$ et $(\ast\ast) \Rightarrow E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par conséquent E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Montrons que $\beta = (I, J, K)$ est une base de E.

$\forall \quad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in E$, on a

$$\begin{aligned}
M(a,b,c) &= \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= aI + bJ + cK \quad \text{car} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\beta = (I, J, K)$ est une famille génératrice de E.

$\forall \quad a, b, c \in \mathbb{R}, aI + bJ + cK = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Donc $\beta = (I, J, K)$ est une famille libre de E.
Comme $\beta = (I, J, K)$ est une génératrice et libre de E donc
$\beta = (I, J, K)$ est une base de E.

Partie II

$\forall \quad A \in E, f(A) = 2A - A^t$.

1. a) Montrons que f est une application linéaire.
$\forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \quad A, B \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
f(\alpha A + \beta B) &= 2(\alpha A + \beta B) - (\alpha A + \beta B)^t \\
&= 2\alpha A + 2\beta B - \alpha A^t - \beta B^t \\
&= \alpha(2A - A^t) + \beta(2B - B^t) \\
&= \alpha f(A) + \beta f(B) \\
&\text{car} \quad f(A) = 2A - A^t, f(B) = 2B - B^t.
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

b) Montrons que f est un endomorphisme de E.

$$\forall \quad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in E, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} f(M(a,b,c)) &= 2M(a,b,c) - M(a,b,c)^t \\ &= \begin{pmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2b & 2a & 2c \\ 2c & 2b & 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 2c-b & 2b-c \\ 2b-c & a & 2c-b \\ 2c-b & 2b-c & a \end{pmatrix} \\ &= M(a, 2b-c, 2c-b) \in E \end{aligned}$$

Comme f est une application linéaire et $\forall \quad M(a,b,c) \in E, f[M(a,b,c)] \in E$ alors par définition f est un endomorphisme de E.

c) **Déterminons le noyau et l'image de f.**
$M(a,b,c) \in ker(f) \Leftrightarrow f[M(a,b,c)] = M(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2c-b & 2b-c \\ 2b-c & a & 2c-b \\ 2c-b & 2b-c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow a = 0, 2c - b = 0, 2b - c = 0$
$\Leftrightarrow a = 0, b = 0, c = 0.$

Donc $ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$ker(f) = 0_E$ et f est un endomorphisme de E donc f est un automorphisme de E et par conséquent $Im(f) = E$.

2. a) **Exprimons $f(I), f(J)$ et $f(K)$ en fonction de I, J et K.**
D'après la question $1.b)$ on a

$$\begin{aligned} f(M(a,b,c)) &= \begin{pmatrix} a & 2c-b & 2b-c \\ 2b-c & a & 2c-b \\ 2c-b & 2b-c & a \end{pmatrix} = M(a, 2b-c, 2c-b) \\ &= aI + (2b-c)J + (2c-b)K. \end{aligned}$$

$I = M(1,0,0)$ donc $f(I) = I$.
$J = M(0,1,0)$ donc $f(J) = M(0, 2-0, 0-1) = 2J - K$.
$K = M(0,0,1)$ donc $f(K) = M(0, 0-1, 2) = -J + 2K$.

b) **Déduisons la matrice Q de f dans la base $\beta = (I, J, K)$.**
Coomme $f(I) = I, f(J) = 2J - K$ et $f(K) = -J + 2K$ donc les coordonnées de $f(I), f(J)$ et $f(K)$ dans la base $\beta = (I, J, K)$ sont $f(I) = (1,0,0), f(J) = (0,2,-1)$ et $f(K) = (0,-1,2)$. Par conséquent la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) **Déterminons les valeurs propres de Q.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $Q - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$det(Q - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1]$
$= (1-\lambda)^2(3-\lambda)$.
$det(Q - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ où $\lambda = 3$. Les valeurs propres de Q sont donc 1 et 3.

d) **Déterminons les sous-espaces propres de Q.**
$M(a,b,c) \in E_1 \Leftrightarrow f(M(a,b,c)) = M(a,b,c)$
$\Leftrightarrow aI + (2b-c)J + (2c-b)K = aI + bJ + cK$.
Par identification on a $2b - c = b$ et $2c - b = c \Leftrightarrow b = c$. On a donc

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ M(a,b,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} /a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ aI + b(J+K)/a,b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$M(a,b,c) \in E_3 \Leftrightarrow f(M(a,b,c)) = 3M(a,b,c)$
$\Leftrightarrow aI+(2b-c)J+(2c-b)K = 3aI+3bJ+3cK$. Par indetification on a $3a = a, 2b-c = 3b$ et $2c - b = 3c \Leftrightarrow a = 0$ et $c = -b$.
On a donc

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ M(0;b,-b) = \begin{pmatrix} 0 & -b & b \\ b & 0 & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix} /a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b(J-K)/b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

e) **Justifions que f est diagonalisable.**
$\beta_1 = (I, J+K)$ est une base de E_1 donc $dim(E_1) = 2$.
$\beta_2 = (J-K)$ est une base de E_3 donc $dim(E_3) = 1$.
$dim(E_1) + dim(E_3) = 2 + 1 = 3 = dim(E)$ donc f est diagonalisable.

3. **Montrons que $f(J+K) = J+K$ et $f(J-K) = 3(J-K)$.**
Comme f est une application linéaire donc on a

$$\begin{aligned} f(J+K) &= f(J) + f(K) \\ &= 2J - K - J + 2K = J + K \\ &\text{car} \quad f(J) = 2J - K, f(K) = -J + 2K \\ f(J-K) &= f(J) - f(K) \\ &= 2J - K + J - 2K = 3(J-K). \end{aligned}$$

4. a) $f(I) = I$ donc $\forall \quad n \in \mathbb{N}^*, f^n(I) = I$.
$f(J+K) = J+K$ donc $\forall \quad n \in \mathbb{N}^*, f^n(J+K) = J+K$.
$f(J-K) = 3(J-K)$ donc $\forall \quad n \in \mathbb{N}^*, f^n(J-K) = 3^n(J-K)$.
On en déduit que

$$f^n(J) + f^n(K) = J + K \quad \text{et} \quad f^n(J) - f^n(K) = 3^n(J-K).$$

En additionant membre à membre les deux égalités on obtient

$$\begin{aligned} f^n(J) &= \frac{3^n+1}{2}J + \frac{1-3^n}{2}K \quad \text{et} \\ f^n(K) &= \frac{1-3^n}{2}J + \frac{1+3^n}{2}K \end{aligned}$$

b) **Déterminons la matrice Q^n de f^n dans la base $\beta = (I, J, K)$.**
Comme $f^n(I) = I, f^n(J) = \frac{3^n+1}{2}J + \frac{1-3^n}{2}K$ et
$f^n(K) = \frac{1-3^n}{2}J + \frac{1+3^n}{2}K$ donc les coordonnées de $f^n(I), f^n(J)$ et $f^n(K)$ dans la base

$\beta = (I, J, K)$ sont $f^n(I) = (1, 0, 0), f^n(J) = (0, \frac{3^n+1}{2}, \frac{1-3^n}{2})$ et $f^n(K$
par conséquent

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n+1}{2} & \frac{1-3^n}{2} \\ 0 & \frac{1-3^n}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 7

$B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) **Montrons que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $det(A) = 6 \neq 0$ donc f est bijectif et comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ alors f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b) **Déterminons le vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = -2e_1 + e_3$.**

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tel que $f(u) = -2e_1 + e_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= -2 \\ 2y + z &= 0 \\ -x + y + 3z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -2y \\ x - y &= -2 \\ -x - 5y &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z &= -2y \\ y &= \frac{1}{6} \\ -x - 5y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{1}{6} \\ x &= -\frac{11}{6} \end{cases}$$

Donc $u = -\frac{11}{6}e_1 + \frac{1}{6}e_2 - \frac{1}{3}e_3$.

c) $W = -e_1 + e_2$ est-il un élément du noyau de f ?

Comme f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc $ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$. Or $W = (-1, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$ donc W n'est pas un élément du noyau de f.

2. $F = \Big\{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = -u\Big\}$.

a) **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.**

$F \subset \mathbb{R}^3$.

Comme f est endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0) = -(0, 0, 0).$$

D'où $(0, 0, 0) \in F$. Par conséquent $F \neq 0$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v \in F$.

Comme f est une application linéaire donc

$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = -\alpha u - \beta v = -(\alpha u + \beta v)$ car $f(u) = -u$ et $f(v) = -v$
d'où $\alpha u + \beta v \in F$.

Par conséquent F est stable par combinaison linéaire. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminons la dimension de F.

$$u=(x,y,z)\in F \Leftrightarrow f(u)=-u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & -x \\ 2y+z & = & -y \\ -x+y+3z & = & -z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -3y \\ 2x-2y & = & 0 \\ -x-11y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc $F=\{(0,0,0)\}$ et $dim(F)=0$.

3. a) Déterminons les valeurs propres de A.

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

$det(A-\lambda I)=(3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

Les valeurs propres de A sont donc $1, 2$ et 3.

Déterminons les sous-espaces vectoriels propres.

$$u=(x,y,z)\in E_1 \Leftrightarrow (A-I)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ -x+y+2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & & \\ x & = & -y \end{array}\right.$$

$u=(x,y,z)\in E_1 \Leftrightarrow u=(-y,y,-y)=y(-1,1,-1)$

donc $E_1=\{y(-1,1,-1)/y\in\mathbb{R}\}$.

$$u=(x,y,z)\in E_2 \Leftrightarrow (A-2I)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ -x+y+2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & y \end{array}\right.$$

$u=(x,y,z)\in E_2 \Leftrightarrow u=(y,y,0)=y(1,1,0)$

donc $E_2 = \{y(1,1,0)/y \in \mathbb{R}\}$.

$$u = (x,y,z) \in E_3 \Leftrightarrow (A-3I)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ -x+y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= z \\ x &= y \end{cases}$$

$u = (x,y,z) \in E_3 \Leftrightarrow u = (y,y,y) = y(1,1,1)$
donc $E_3 = \{y(1,1,1)/y \in \mathbb{R}\}$.

b) **Justifions que A est diagonalisable.**
La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

La matrice diagonale D semblable à la matrice A est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. C'est la matrice de f dans la base $B' = (V_1, V_2, V_3)$ (où $V_1 = (-1,1,-1), V_2 = (1,1,0)$ et $V_3 = (1,1,1)$) des vecteurs propres.

La matrice de passage de B à B' est $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. a) **Calculons A^{12}.**
D'après la formule de changement de bases on a $A^{12} = PD^{12}P^{-1}$.
Or $D^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{12} \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc on a $PD^{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2^{12} & 3^{12} \\ 1 & 2^{12} & 3^{12} \\ -1 & 0 & 3^{12} \end{pmatrix}$

$$PD^{12}P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2^{12} & 3^{12} \\ 1 & 2^{12} & 3^{12} \\ -1 & 0 & 3^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-2^{13}+3^{12} & 1-3^{12} & 2^{13} \\ 1-2^{13}+3^{12} & -1-3^{12} & 2^{13} \\ -1+3^{12} & 1-3^{12} & 0 \end{pmatrix} = A^{12}$$

b) **Justifions que A^{12} est inversible et donnons le déterminant de son inverse.**
$det(A^{12}) = [det(A)]^{12}$. Or $det(A) = 6$ donc $det(A^{12}) = 6^{12} \neq 0$ donc A^{12} est inversible.
$det[(A^{12})^{-1}] = \frac{1}{det(A^{12})} = \frac{1}{6^{12}}$.

EXERCICE 8

1. a) La matrice associée au système (S) est $M = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$det(M) = \begin{vmatrix} b & 1 \\ c & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 2b - c + a - b = a + b - c$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ donc le rang de (S) est égale à 2 ou 3.

b) Prouvons que $rang(S) = 2$ si et seulement si $c = a + b$.

$det(M) = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b$ et comme le mineur $\begin{vmatrix} 0 & \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$rang(S) = 2$ si et seulement si $c = a + b$.

2. a) Calculons $f(1,3,1)$.

La matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$f(1,3,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b. Déduisons de ce qui précède $Im(f)$ et $ker(f)$.

Pour f on a $a = 2, b = -1$ et $c = 1$. Comme $c = a + b$ donc $rang(f) = 2$ et par conséquent

$$Im(f) = \{a(-1,0,-1) + b(1,1,2)/a,b \in \mathbb{R}\}$$

qui est le plan vectoriel engendré par les vecteur $(-1,0,-1)$ et $(1,1,2)$.

$dim(ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$.

Comme $dim(ker(f)) = 1$ et $f(1,3,1) = (0,0,0)$ donc

$$ker(f) = \{a(1,3,1)/a \in \mathbb{R}\}$$

qui est la droite vectoriel engendré par le vecteur $(1,3,1)$.

3. $a = 3, b = 2$ et $c = 1$.

a) Déterminons la matrice A de f et vérifions que $Q = P^{-1}$.

$$\begin{cases} f(-2,3,0) &= (3,2,1) \\ f(1,0,1) &= (-1,0,-1) \\ f(2,-2,0) &= (1,1,2) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$PQ = I \Rightarrow Q = P^{-1}$.

b) Montrons que $A = PJP^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$PJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ donc } PJP^{-1} = A.$$

c) Résolvons le système différentiel.

$$\begin{cases} x'(t) = &= 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

On a donc $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Or $A = PJP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} X' &= PJP^{-1}X \Leftrightarrow \\ P^{-1}X' &= JP^{-1}X \\ \text{posons } Y &= P^{-1}X = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'(t) = & = \alpha(t) \quad (1) \\ \beta'(t) & = 2\beta(t) + \gamma(t) \quad (2) \\ \gamma'(t) & = 2\gamma(t) \quad (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \alpha(t) = C_1e^t$ et (3) $\Rightarrow \gamma(t) = C_3e^{2t}$.
(2) devient $\beta'(t) = 2\beta(t) + C_3e^{2t}$. La solution homogène est

$$\beta_h(t) = C_2e^{2t}$$

. Cherchons une solution particulière à l'aide de la variation de la constance. Soit $\beta_p(t) = g(t)e^{2t}$ la solution particulière.
$\beta_p'(t) = g'(t)e^{2t} + 2g(t)e^{2t}$.
$\beta_p'(t) - 2\beta_p(t) = C_3e^{2t} \Leftrightarrow g'(t)e^{2t} = C_3e^{2t} \Leftrightarrow g'(t) = C_3 \Leftrightarrow g(t) = C_3t \Rightarrow \beta_p(t) = C_3te^{2t}$.
Donc on a $\beta(t) = C_2e^{2t} + C_3te^{2t} = (C_2 + C_3t)e^{2t}$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} \alpha(t) & = C_1e^t \\ \beta(t) & = (C_2 + C_3t)e^{2t} \\ \gamma(t) & = C_3e^{2t} \end{cases}$$

$$Y = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^t \\ (C_2 + C_3t)e^{2t} \\ C_3e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = & = (C_2 + C_3t)e^{2t} \\ y(t) & = C_1e^t + (C_2 + C_3t)e^{2t} \\ z(t) & = C_1e^t + C_3e^{2t} \end{cases}$$

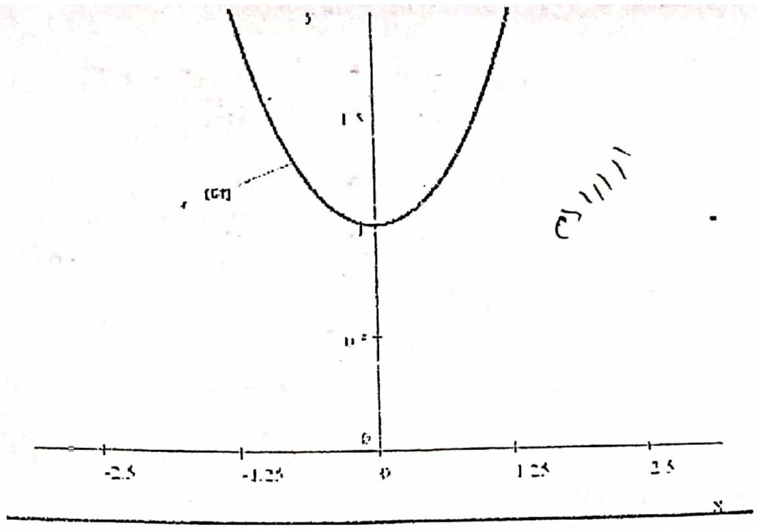
SERIES DE FOURIER ET SERIES NUMERIQUES.

EXERCICE 1

f est 2π-périodique, définie par

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \forall t \in [-\pi; \pi].$$

1. Représentons f sur $[-\pi; \pi]$.



2. a) Calculons a_0.
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt$ car f est paire.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}[e^t - e^{-t}]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}.$$

b) Calculons I_n.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\pi}^{\pi}(e^t + e^{-t})e^{int}dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)t} + e^{-(1-in)t}dt \\
&= [\frac{e^{(1+in)t}}{1+in} - \frac{e^{-(1-in)t}}{1-in}]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{e^{(1+in)\pi}}{1+in} - \frac{e^{-(1-in)\pi}}{1-in} - \frac{e^{-(1+in)\pi}}{1+in} + \frac{e^{(1-in)\pi}}{1-in} \\
&= e^{in\pi}[\frac{e^{\pi}}{1+in} - \frac{e^{-\pi}}{1-in}] + e^{-in\pi}[\frac{e^{\pi}}{1-in} - \frac{e^{-\pi}}{1+in}] \\
&= (-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})[\frac{1}{1+in} + \frac{1}{1-in}] \quad \text{car} \quad e^{-in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n \\
I_n &= \frac{2(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

Déduisons-en a_n et b_n.

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^t - e^{-t}}{2}e^{int}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^t - e^{-t})e^{int}dt = \frac{1}{2\pi}I_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}.$$
$$\text{donc} \quad a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

c) Vérifions que f est 2 fois dérivable sur $[-\pi;\pi]$.
Les fonctions $t \mapsto \frac{e^t}{2}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{2}$ sont 2 fois dérivable sur $[-\pi;\pi]$. Donc f est 2 fois dérivable sur $[-\pi;\pi]$.
f vérifie donc les conditions de Dirichlet.

3. $\forall \quad t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

a)
$$a_0 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}, a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} \cos nt \\ &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos nt] \end{aligned}$$

b) On pose $t = \pi$, on a $f(\pi) = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos n\pi]$.
Or $\cos n\pi = (-1)^n$ donc

$$\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}] \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\right) - \frac{1}{2}.$$

4. On pose $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2+b_n^2}{2}$

a)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt &= 2\int_0^{\pi} f^2(t)dt \quad \text{car} \quad f^2 \quad \text{paire} \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4}dt \\ &= \frac{1}{2}[\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t]_0^{\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4} + \pi \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{8\pi} + \frac{1}{2}.$$

b) D'après la formule de Parseval, on a

$$\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{8\pi} + \frac{1}{2} = \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2}.$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} = \left(\frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\right)^2 [\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} + 1] - \frac{1}{2}.$$

$$\text{On a} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2}$$

$$\text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} = \left(\frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\right)^2 [\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} + 1] + \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 2

f est 2π-périodique, définie par $f(x) = e^x, \forall \quad x \in [-\pi;\pi]$ et $f(\pi) = \alpha$.

1. a) Déterminons a_0 en fonction de $sh(\pi) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$.
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi}[e^x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$. Donc

$$a_0 = \frac{sh(\pi)}{\pi}.$$

b) Pour $n \geq 1$, $\lambda_n = a_n + ib_n$.
Montrons que $\lambda_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}dx$.
Comme $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx$, on a donc

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x(\cos nx + i\sin nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{inx}dx \quad \text{car} \quad \cos nx + i\sin nx = e^{inx} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}dx.
\end{aligned}$$

c) Déduisons-en que

$$\lambda_n = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+in)}.$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}dx = \frac{1}{\pi}[\frac{e^{(1+in)x}}{1+in}]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{1+in}] = \frac{1}{\pi}[\frac{e^\pi \times e^{in\pi} - e^{-\pi} \times e^{-in\pi}}{1+in}] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}[\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{1+in}] \quad \text{car} \quad e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi(1+in)}[\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}] = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+in)}
\end{aligned}$$

d) Déterminons $Re(\lambda_n)$ et $Im(\lambda_n)$.

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+in)} \\
&= \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{1+in}\right) = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi}\left(\frac{1-in}{1+n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\quad Re(\lambda_n) = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \quad$ et $\quad Im(\lambda_n) = \frac{-2n(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$.

e) Déduisons-en a_n et b_n.
Comme $\lambda_n = a_n + ib_n$ donc on $a_n = Re(\lambda_n) = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$ et $b_n = Im(\lambda_n) = \frac{-2n(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$.

2. a) Donnons la série de Fourier de f.

Comme $a_n = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$, $b_n = \frac{-2n(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}$ et $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ donc on a

$$\begin{aligned} S_f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \\ &= \frac{sh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \cos nx - \frac{2n(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \sin nx) \\ &= \frac{sh(\pi)}{\pi} + \frac{2sh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n \sin nx). \end{aligned}$$

b) **choisissons α pour qu'il ait convergence ponctuelle pour tout t.**
f est dérivable sur $]-\pi, \pi[$. f est dérivable à gauche en π et à droite en $-\pi$ car f coincide avec une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons α pour que f soit dérivable à droite en π.
Comme f est 2π-périodique alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} &= \lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x-2\pi) - f(\pi)}{x - \pi} \\ &= \lim_{x\to\pi^+} \frac{e^{x-2\pi} - \alpha}{x - \pi} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{X-\pi} - \alpha}{X} \quad \text{en posant} \quad X = x - \pi. \end{aligned}$$

Posons $g(X) = e^{X-\pi} - \alpha$, si $g(0) = 0$ alors $\alpha = e^{-\pi}$.
On a dans ce cas

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(X) - g(0)}{X} = g'(0) = e^{-\pi}.$$

Pour $\alpha = e^{-\pi}$, f est dérivable à droite en π donc il y a convergence ponctuelle pour tout réel x.

c)

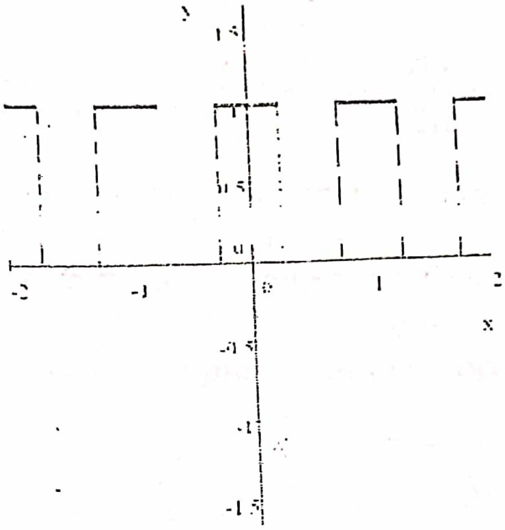
$$\begin{aligned} \forall \quad x \in [-\pi, \pi], f(x) &= \frac{sh(\pi)}{\pi} + \frac{2sh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n \sin nx). \\ f(0) &= 1 = \frac{sh(\pi)}{\pi} + \frac{2sh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{1+n^2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{sh(\pi)} - 1\right)$$

EXERCICE 3

e signal pair, 1-périodique, défini par $\begin{cases} e(t) &= 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ e(t) &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

1. représentons e sur $[-2, 2]$.



2. Calculons la valeur moyenne et l'énergie du signal e sur une période.
   Par définition de e on a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t)dt \\ &= \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e(t)dt \quad \text{car} \quad T = 1 \\ &= \int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{4}} 1dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'énergie E du signal e est :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^2(t)dt = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^2(t)dt \quad \text{car} \quad T = 1 \\ &= \int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{4}} 1dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Calculons les coefficients de Fourier de e.
   Comme le signal e est pair alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad b_n = 0$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e(t)\cos n\omega t dt \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} e(t)\cos 2n\pi t dt \quad \text{car} \quad T = 1, \omega = 2\pi \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{4}} \cos 2n\pi t dt = \frac{4}{2\pi n}[\sin 2n\pi t]_0^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}n.$$

Si n est pair, $n = 2k$ on a $a_n = 0$ par contre si n est impair, $n = 2k+1$ o

$$a_{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} \quad \text{car} \quad \sin\frac{\pi}{2}(2k+1) = (-1)^k.$$

4. **Déterminons la série de Fourier de e.**

$$S_e(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}\cos 2\pi(2k+1)t = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)}\cos 2\pi(2k+1)t$$

$S_e(t) = e(t)$ en tout point où e est continu et $S_e(t) = \frac{1}{2}$ en tout point de discontinuité, c'est à dire $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ etc...

5. Calculons les valeurs numériques des coefficients a_n pour n allant de 0 à 6.
   $a_0 = 0,5; a_1 = \frac{2}{\pi} = 0,636; a_2 = 0; a_3 = \frac{-2}{3\pi} = -0,212; a_4 = 0; a_5 = \frac{2}{5\pi} = 0,127$ et $a_6 = 0$.
6. On note E_n l'énergie de l'harmonique de rang n. Calculons E_n pour n allant de 1 à 6.
   $E_n = \frac{a_n^2+b_n^2}{2} = \frac{a_n^2}{2}$ car $b_n = 0$.
   $E_1 = \frac{a_1^2}{2} = \frac{2}{\pi^2} = 0,202; E_2 = \frac{a_2^2}{2} = 0; E_3 = \frac{a_3^2}{2} = \frac{2}{9\pi^2} = 0,022; E_4 = \frac{a_4^2}{2} = 0; E_5 = \frac{a_5^2}{2} = \frac{2}{25\pi^2} = 0,0072; E_6 = \frac{a_6^2}{2} = 0$.
7. L'énergie du signal e est $E = 0.5$ et $a_0^2 = 0,25$.
   $0.6E = 0,6 \times 0,5 = 0,3$ et $0.25 + E_1 = 0,452$ donc le fondamental suffit.
   $0,9E = 0,9 \times 0,5 = 0,45$, le fondamental est encore suffisant.
   $0,95E = 0,475$ et $0,25 + E_1 + E_3 + E_5 = 0,481$, le fondamental et les harmoniques de rang 3 et 5 suffiront.

EXERCICE 4

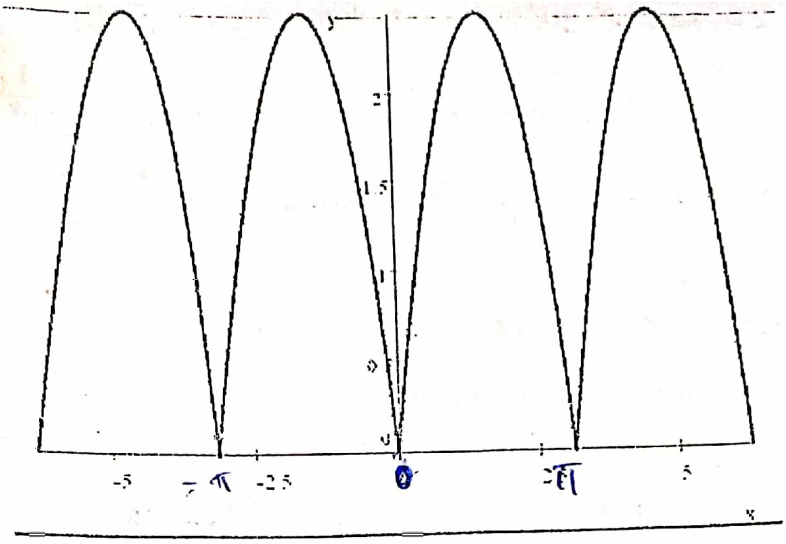
1. $\forall \quad n \geq 1; J = \int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(2nt)dt$. Calculons J à l'aide de deux intégrations par parties .
   Posons $u = t(\pi - t) \Rightarrow u' = \pi - 2t$ et $v' = \cos(2nt) \Rightarrow v = \frac{1}{2n}\sin(2nt)$. On a donc

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2n}[t(\pi - t)\sin(2nt)]_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\sin(2nt)dt \\ &= -\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\sin(2nt)dt \end{aligned}$$

Posons $u = \pi - 2t \Rightarrow u' = -2$ et $v' = \sin(2nt) \Rightarrow v = -\frac{1}{2n}\cos(2nt)$. On a

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{4n^2}[(2t-\pi)\cos(2nt)]_0^{\pi} + \frac{1}{2n^2}\int_0^{\pi}\cos(2nt)dt \\ &= -\frac{\pi}{2n^2} + \frac{1}{4n^2}[\sin(2nt)]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2n^2} \end{aligned}$$

2. u est une fonction paire, π-périodique définie par,
   $u(t) = t(\pi - t) \quad \text{si} \quad t \in [0, \pi[$.
   a) **Courbe de u sur $[-2\pi, 2\pi]$.**



b) Vérifions que u satisfait aux conditions de Dirichlet.
u est π-périodique, u est dérivable et continue sauf en $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où elle admet des limites finies à gauche et à droite $u'(0^+) = \pi, u'(0^-) = -\pi, u'(\pi^+) = \pi$ et $u'(\pi^-) = -\pi$, les conditions de Dirichlet sont vérifiées.

c) Calculons les coefficients de Fourier de u.
Comme u est pair donc $b_n = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi - t)dt = \frac{1}{\pi}[\frac{\pi}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3]_0^\pi = \frac{1}{\pi}[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}] = \frac{\pi^2}{6} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t(\pi - t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t(\pi - t)\cos(2nt)dt \quad \text{car} \quad \omega = 2 \\ &= \frac{2}{\pi}J = -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nt) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(2nt)$$

3. justifier la convergence des séries numériques de terme général :

$$\frac{1}{n^2}, \frac{(-1)^n}{n^2}, \frac{1}{n^4}.$$

Les séries de termes générales

$$\frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^4}$$

sont des séries de Riemann convergentes car $2 > 1$ et $4 > 1$. La série de terme général

$\frac{(-1)^n}{n^2}$ est une série alternée convergente car $\frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\lim \frac{1}{n^2} = 0$.

4. En utilisant le développement en série de Fourier pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, déterminons : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

$u(t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $u(t) = t(\pi - t)$ donc

$$u(0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$u(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(2n\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(n\pi)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{car} \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

5. **Calculons la valeur efficace u_e de e.**

$$\begin{aligned} u_e^2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (t^2\pi^2 - 2\pi t^3 + t^4)dt \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{\pi^2}{3}t^3 - \frac{2\pi}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5]_0^\pi = \frac{\pi^4}{3} - \frac{\pi^4}{2} + \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{30}. \end{aligned}$$

Donc $u_e = \frac{\pi^2}{\sqrt{30}}$.

$$\begin{aligned} P &= a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \\ &= \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2}) = 3,246 \end{aligned}$$

6. **En utilisant la formule de Parseval, calculons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.**

En utilisant la formule de Parseval on a

$$u_e^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \Leftrightarrow \frac{\pi^4}{30} = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15} - \frac{\pi^4}{18} = \frac{\pi^4}{90}.$$

EXERCICE 5

On considère les fonctions définies respectivement sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = e^{-x}\sin x$ et $g(x) = e^{-x}\cos x$.

1. a) **Etudions les variations de f et de g sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.**

f et g sont dérivables sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ car f et g sont des produits de deux fonctions dérivables sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = (-\sin x + \cos x)e^{-x} = \sqrt{2}e^{-x}\cos(x + \frac{\pi}{4}) \\ g'(t) &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x = -(\sin x + \cos x)e^{-x} = -\sqrt{2}e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

f' a le même signe que $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et g' a le même signe que $-\cos(x - \frac{\pi}{4})$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

Tableau de variation de f

t	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	
	$-e^{\frac{-\pi}{2}}$	↗	$\frac{e^{\frac{-\pi}{2}}}{\sqrt{2}}$	↘	$e^{\frac{-\pi}{4}}$

Tableau de variation de g

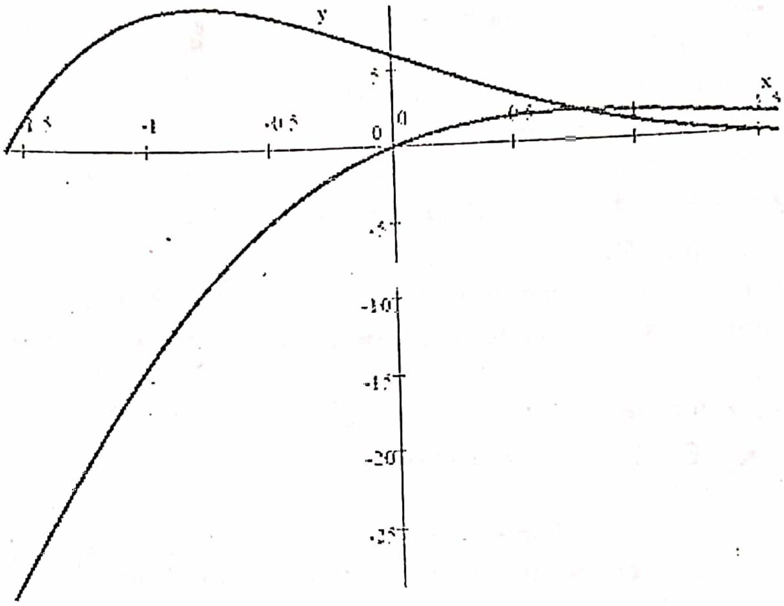
t	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
	0	$\nearrow$	$\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

b) Résolvons l'inéquation $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) \leq g(x)$.

$$f(x) - g(x) = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x = -f'(x).$$

Or $f'(x) \geq 0$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ donc $f(x) \leq g(x)$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$.

c) Courbes de (S) et (C) de f et g.



2. $\forall \quad n \geq 1, A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(nx)dx$ et $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin(nx)dx$

a) Montrons que

$$A_n + nB_n = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(n\frac{\pi}{2}) \qquad \text{et} \qquad -nA_n + B_n = -e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(n\frac{\pi}{2}).$$

Posons $u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$ et $v = \cos(nt) \Rightarrow v' = -n\sin(nt)$. On a donc

$$\begin{aligned} A_n &= [-e^{-x}\cos(nt)]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin(nt)dt \\ &= 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(n\frac{\pi}{2}) - nB_n \quad \text{car} \quad B_n \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin(nt)dt \\ \Leftrightarrow A_n + nB_n &= 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Posons $u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$ et $v = \sin(nt) \Rightarrow v = n\cos(nt)$. On a donc

$$\begin{aligned} A_n &= [-e^{-x}\sin(nt)]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(nt)dt \\ &= -e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(n\frac{\pi}{2}) + nA_n \quad \text{car} \quad A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(nt)dt \\ \Leftrightarrow -nA_n + B_n &= -e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

b) Déduisons A_n et B_n.

De la question précédent on a le système suivant

$$\begin{cases} A_n + nB_n &= 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos(n\frac{\pi}{2}) \\ -nA_n + B_n &= -e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(n\frac{\pi}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_n + nB_n &= 1 - e^{\cdot} \\ n^2A_n - nB_n &= ne^{-\frac{\pi}{2}}\sin(n\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

En effectuant la somme membre à membre des deux équations on obtient

$$A_n = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}[n\sin(n\frac{\pi}{2}) - \cos(n\frac{\pi}{2})]}{n^2+1}.$$

En remplaçant A_n par sa valeur dans l'une des équations, on abtient

$$B_n = \frac{n - e^{-\frac{\pi}{2}}[\sin(n\frac{\pi}{2}) + n\cos(n\frac{\pi}{2})]}{n^2+1}.$$

3. $(F) : y' + y = g(x)$

a) Montrons que f est solution de (F).

$f(x) = e^{-x}\sin x$ et $g(x) = e^{-x}\cos x$.

$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \Leftrightarrow f'(x) = -f(x) + g(x)$

$\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = g(x)$. D'où f est solution de (F).

b) Résolvons (F).

La solution homogène de (F) est $y_h = Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$.

Comme f est une solution particulière de (F) alors la solution générale de (F) est $y = y_h + f(x) = Ke^{-x} + e^{-x}\sin x$

$= (K + \sin x)e^{-x}$.

5. $\begin{cases} h(x) &= 0 \quad \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ h(x) &= e^{-x} \quad \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ h(x) &= 0 \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction h.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx, \quad T = 2\pi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}dx = \frac{1}{2\pi}[-e^{-x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\cos(n\omega x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(n\omega x)dx, \quad T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos(nx)dx = \frac{A_n}{\pi} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}[n\sin(n\frac{\pi}{2}) - \cos(n\frac{\pi}{2})]}{\pi(n^2+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(n\omega x)dx, \quad T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin(nx)dx = \frac{B_n}{\pi} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}[n\cos(n\frac{\pi}{2}) + \sin(n\frac{\pi}{2})]}{\pi(n^2+1)} \end{aligned}$$

EXERCICE 6

$\phi(u) = \sin u - \frac{2}{\pi}u \quad \forall \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. a) **Calculons $\phi'(u)$ et $\phi''(u)$.**

$\phi'(u) = \cos u - \frac{2}{\pi}$ et $\phi''(u) = -\sin u$. Comme $\forall \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin u \geq 0$ donc $\phi''(u) = -\sin u \leq 0$.

Tableau de variation de ϕ'.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$\phi''(t)$		$-$	
$\phi'(t)$	$1-\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{-2}{\pi}$

Comme ϕ' est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\phi'(0) \times \phi'(\frac{\pi}{2}) < 0$ donc il existe un réel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ unique tel que $\phi'(\alpha) = 0$. D'où ona $\phi'(x) \geq 0$ si $x \in [0, \alpha]$ et $\phi'(x) \leq 0$ si $x \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$ Tableau de variation de ϕ

t	$\frac{-\pi}{2}$		α		$\frac{\pi}{2}$
$\phi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\phi(t)$	0	$\nearrow$	$\phi(\alpha)$	$\searrow$	0

b) D'après la tableau de variation de ϕ on a, $\phi(u) \geq 0, \quad \forall \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Donc $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u$.

2.

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{[1+(-1)^n x^2 \sin x]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{et on pose} \quad I = \int_0^{\pi} \frac{du}{[1+\pi^2 n^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}.$$

a) Par le changement de variable $u = x - n\pi$, montrons que

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{du}{[1+(u+n\pi)^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$$

et que $\quad u_n \leq I$.

$u = x - n\pi \Leftrightarrow x = u + n\pi$, $du = dx$.
Si $x = n\pi \Rightarrow u = 0$ et si $x = (n+1)\pi \Rightarrow u = \pi$.
$\sin(u + n\pi) = (-1)^n \sin u$ donc

$$1+(-1)^n x^2 \sin x = 1+(-1)^n(u+n\pi)^2(-1)^n \sin u = 1+(u+n\pi)^2 \sin u.$$

On a donc

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{[1+(-1)^n x^2 \sin x]^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\pi} \frac{du}{[1+(u+n\pi)^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$$

Montrons que $u_n \leq I$.

$$(u+n\pi)^2 \geq n^2\pi^2 \Rightarrow 1+(u+n\pi)^2 \geq 1+n^2\pi^2$$
$$\Rightarrow [1+(u+n\pi)^2 \sin u]^{\frac{3}{2}} \geq [1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{[1+(u+n\pi)^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{du}{[1+(u+n\pi)^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^{\pi} \frac{du}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc $u_n \leq I$.

b) **Montrons que** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(u)du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(u)du$ **où** $h(u) = \frac{}{[1+\pi^2 n^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$

$t = \pi - u \Leftrightarrow u = \pi - t$, $du = -dt$, si $u = 0 \Rightarrow t = \pi$ et si $u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\sin u = \sin(\pi - t) = \sin t$ donc $1 + n^2\pi^2 \sin u =$
$1 + n^2\pi^2 \sin t$.

On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{[1+n^2\pi^2 \sin t]^{\frac{3}{2}}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{[1+n^2\pi^2 \sin t]^{\frac{3}{2}}}$.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(u)du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(u)du$.

c) **Montrons que** $I \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{\pi n^2}$ **en s'appuyant de 1.a).**

D'après 1.a) on a $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u, \quad \forall \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Donc on a $n^2\pi^2 \sin u \geq 2n^2\pi u$

$\Rightarrow [1 + n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}} \geq [1 + 2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}}$.

On a $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{du}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}}$ et donc d'après 2.b), $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+n^2\pi^2 \sin u]^{\frac{3}{2}}} \leq$
$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}}$.

Doù $I \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2 u]^{\frac{3}{2}}}$.

On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2n^2\pi}[\frac{1}{\sqrt{1+2n^2\pi u}}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n^2\pi}[\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi}} - 1]$.

Or $\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi}} - 1 \leq 1$ donc $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{2n^2\pi}$ et finalement on a $I \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[1+2n^2\pi u]^{\frac{3}{2}}} \leq$
$\frac{1}{n^2\pi} \leq \frac{2}{n^2\pi}$.

d) **Déduisons de c) la nature de la série** $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

$\forall \quad n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

D'après 2.b)$u_n \leq I$ et d'après 2.c)$I \leq \frac{2}{n^2\pi}$ donc $\forall \quad n \in \mathbb{N}$,
$u_n \leq \frac{2}{n^2\pi}$. Comme $\frac{2}{n^2\pi}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente car $2 \geq 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente.

EXERCICE 7

f est paire, 2π-périodique et $f(t) = (\pi - t)^2$ pour tout $t \in [0, \pi]$.

1. **Coefficients de Fourier de f.**

   f étant paire, $b_n = 0 \quad \forall \quad n \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \quad \text{car } f \text{ est paire} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - t)^2 dt = \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{3}(\pi - t)^3]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{3\pi}(0 + \pi^3) = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow a_0 = \frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \cos(nt)dt \quad \text{car } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \\
&= \frac{2}{\pi}I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \int_0^{\pi} (\pi - t)^2 \cos(nt)dt
\end{aligned}
$$

Posons $u = (\pi - t)^2$ et $v' = \cos(nt)$ alors $u' = -2(\pi - t)$ et $v = \frac{1}{n}\sin nt$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_n &= [\frac{1}{n}(\pi - t)^2 \sin nt]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi (\pi - t)\sin nt dt \\ &= \frac{2}{n}\int_0^\pi (\pi - t)\sin nt dt. \end{aligned}$$

Posons $u = (\pi - t)$ et $v' = \sin(nt)$ alors $u' = -1$ et $v = -\frac{1}{n}\cos nt$.
On a alors

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2}{n}\left([-\frac{1}{n}(\pi - t)\cos nt]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nt dt\right) \\ &= \frac{2\pi}{n^2} - \frac{2}{n^2}[\frac{1}{n}\sin nt]_0^\pi = \frac{2\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

Comme $I_n = \frac{2\pi}{n^2}$ et $a_n = \frac{2}{\pi}I_n$ alors $a_n = \frac{2}{\pi}I_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{2\pi}{n^2}$
$\Rightarrow a_n = \frac{4}{n^2}$.

2. a) Montrons que f satisfait aux conditions de Dirichlet.
f est continue sur $[-\pi, \pi]$.
f est paire et $f(t) = (\pi - t)^2 \quad \forall \quad t \in [0, \pi]$ donc
$f(t) = (\pi + t)^2 \quad \forall \quad t \in [-\pi, 0]$.
On a donc $f'(t) = -2(\pi - t) \quad \forall \quad t \in [0, \pi]$ et
$f'(t) = 2(\pi + t) \quad \forall \quad t \in [-\pi, 0]$.
f' est continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf en 0.
$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = -2\pi$ et $\lim_{t \to 0^-} f'(t) = 2\pi$.
Donc f satisfait les conditions de Dirichlet.

b) Série de Fourier de f.
D'après le théorème de Dirichlet, $\forall \quad t \in \mathbb{R}$

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}\cos nt$$

3. a) Montrons que $\forall \quad x \in \mathbb{R}, \frac{\pi^3 - (\pi - x)^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &= \int_0^x (\pi - t)^2 dt = [-\frac{1}{3}(\pi - t)^3]_0^x \\ \int_0^x f(t)dt &= \frac{-(\pi - x)^3 + \pi^3}{3} \quad (1). \\ f(t) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum^{+\infty} \frac{4}{n^2}\cos nt \\ \Rightarrow \int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \frac{\pi^2}{3}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\int_0^x \cos nt dt \\ &= \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^3}[\sin nt]_0^x \\ &= \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^3}\sin nx \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow \frac{\pi^3 - (\pi - x)^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^3}\sin nx$$

b) Montrons que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{-(\pi-x)^3+\pi^3}{3}dx &= \left[\frac{(\pi-x)^4}{12} + \frac{\pi^3}{3}x\right]_0^\pi = \frac{\pi^4}{3} - \frac{\pi^4}{12} \\
&= \frac{\pi^4}{4} \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^3}\sin nx dx &= \left[\frac{\pi^2}{6}x^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}\cos nx\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^4}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}(\cos n\pi - 1).
\end{aligned}$$

Or $\cos n\pi - 1 = (-1)^n - 1$ alors $\cos n\pi - 1 = 0$ si n est pair et $\cos n\pi - 1 = -2$ si n est impair c'est à dire $n = 2p - 1$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}(\cos n\pi - 1) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-8}{(2p-1)^4} \quad \text{et}$$

$$\int_0^\pi \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^3}\sin nx dx = \frac{\pi^4}{6} + 8\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4} \quad (4).$$

$$\text{Comme} \quad \int_0^\pi \frac{-(\pi-x)^3+\pi^3}{3}dx = \int_0^\pi \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^3}\sin nx$$

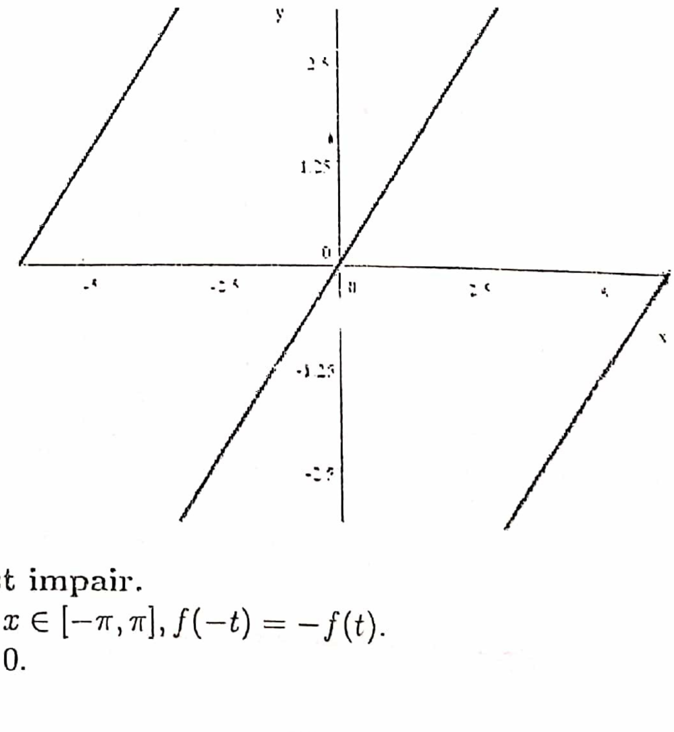
$$\text{donc} \quad (3) \quad \text{et } (4) \quad \Rightarrow \frac{\pi^4}{4} = \frac{\pi^4}{6} + 8\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

EXERCICE 8

f est 2π-périodique et $f(t) = t$ si $[-\pi, \pi]$.

1. Représentons f sur $\in [-\pi, \pi]$.



2. Montrons que f est impair.
   f est impaire car $\forall \quad x \in [-\pi, \pi], f(-t) = -f(t)$.
   Par conséquent $a_n = 0$.

3. Prouvons que pour tout $n > 0, b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t dt \quad \text{car } f \text{ est impaire.} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt dt \quad \text{car} \quad T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \end{aligned}$$

Posons $u = t$ et $v' = \sin(nt)$ alors $u' = 1$ et $v = -\frac{1}{n}\cos nt$.
On a alors

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left([-\frac{1}{n}t\cos nt]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 1\cos nt dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi + \frac{1}{n}[\frac{1}{n}\sin nt]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi + \frac{1}{n}[\frac{1}{n}(\sin n\pi - \sin 0)]\right) \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n \quad \text{car} \quad \cos n\pi = (-1)^n \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

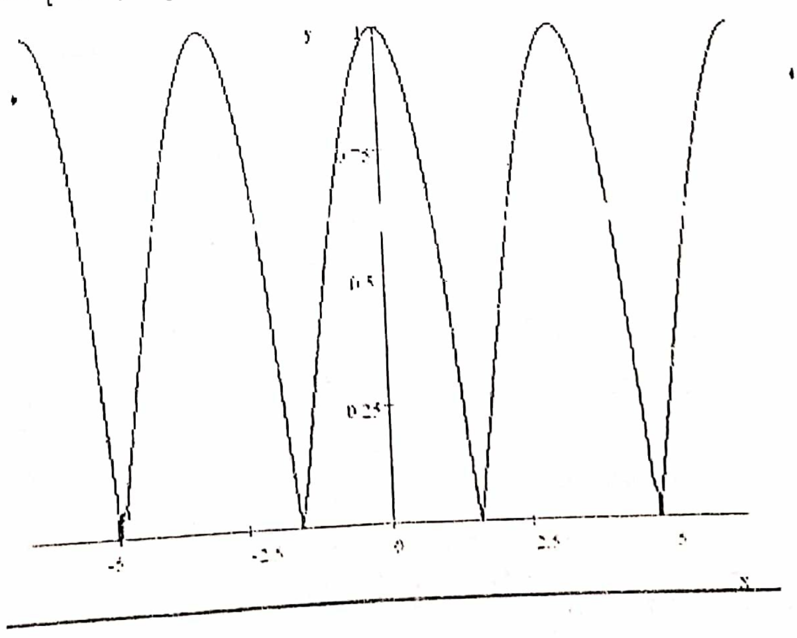
4. Les cinq prmiers termes de la série de Fourier associée à f.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{2}{5}\sin 5t.$$

EXERCICE 9

$f(t) = |\cos t|$

1. Représentons f sur $[-2\pi, 4\pi]$.



2. Prouvons que f est paire et π-périodique.
$\forall \; t \in \mathbb{R}, \quad \forall \; -t \in \mathbb{R}$ et $f(-t) = |\cos(-t)| = |\cos t| = f(t)$ car $\cos(-t)$ est paire.
$\forall \; t \in \mathbb{R}, \quad \forall \; t+\pi \in \mathbb{R}$ et $f(t+\pi) = |\cos(t+\pi)| = |-\cos t| = |\cos t| = f(t)$ car $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ donc f est périodique de période π.

3. Calculons la valeur moyenne de f sur une période.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \quad \text{car } f \text{ est paire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \quad \text{car } \cos t > 0 \text{ pour tout } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \\
&= \frac{2}{\pi}[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0] = \frac{2}{\pi} \Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

4. Prouvons que pour tout $n > 0$,
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t]dt$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt \quad \text{car } f \text{ est paire} \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos 2nt dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)tdt] \\
\text{car} \quad \cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\
\text{Alors} \quad a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t]dt
\end{aligned}$$

Déduisons que

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t]dt \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} - 0] \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{(-1)^n}{2n-1}] \\
\text{car} \quad \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} &= (-1)^n, \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = -(-1)^n. \\
\text{Alors} \quad a_n &= \frac{2(-1)^n}{\pi}[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}] = \frac{2(-1)^n}{\pi}[\frac{-2}{(2n+1)(2n-1)}] \\
a_n &= \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}
\end{aligned}$$

Série de Fourier associée à f.
Comme f est paire donc $b_n = 0$ et on a

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega)t \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nt \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cos 2nt.
\end{aligned}$$

EXERCICE 10

Partie A

1- Démontrons que la série est convergente.
$\forall \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 0 \quad$ et $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$.
Or la série de terme générale $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente.

2- Déterminons les réels a et b tels que

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2n+1}\Big|_{n=\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\
b &= \frac{1}{2n-1}\Big|_{n=-\frac{1}{2}} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}. \\
&\Rightarrow u_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}
\end{aligned}$$

3-

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n.$$

a) Expression de S_p en fonction de p.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{p} u_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{p-1} + u_p \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{10}) + (\frac{1}{10} - \frac{1}{14}) + \cdots + \\
&(\frac{1}{2(2p-3)} - \frac{1}{2(2p-1)}) + (\frac{1}{2(2p-1)} - \frac{1}{2(2p+1)}) \\
\Rightarrow \quad S_p &= \sum_{n=1}^{p} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2p+1)}
\end{aligned}$$

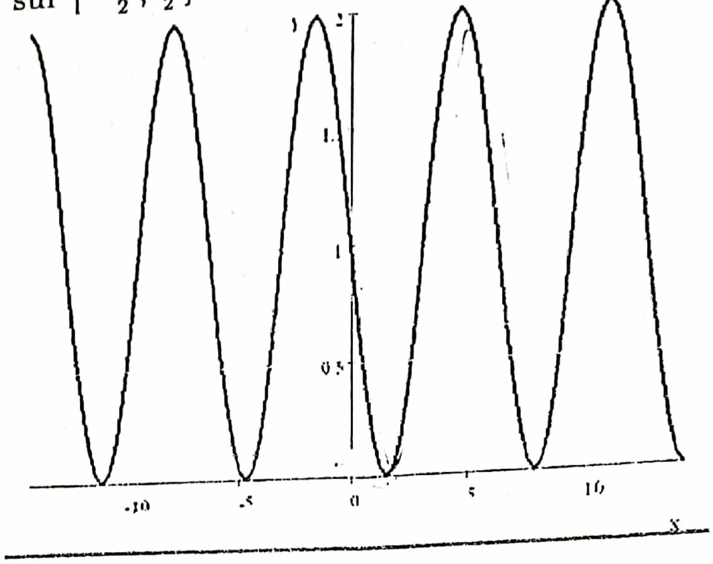
b) Déduisons la somme S de la série.

$$S = \lim_{p \to +\infty} S_p = \lim_{p \to +\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2p+1)}) = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Partie B

f une fonction numérique, paire, 2π-périodique définie par $f(t) = 1 - \sin t$: $0 \leq t \leq \pi$

1- Représentons g sur $[-\frac{9\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$.



2- a) Justifions que, $\forall \quad n \in \mathbb{N}_{*}, \quad b_n = 0$.

Comme f est paire donc $\forall \quad n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 0$.

b) Calculons a_0 et a_1.

Comme f est paire donc

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 - \sin t dt \quad \text{car} \quad T = 2\pi \\ &= \frac{1}{\pi}[t + \cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi + \cos\pi - \cos 0) = 1 - \frac{2}{\pi}. \\ a_1 &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega t dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - \sin t)\cos t dt \quad \text{car} \quad T = 2\pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\ &= \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{2}(1 - \sin t)^2]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{2}(1 - \sin\pi)^2 + \frac{1}{2}(1 - \sin 0)^2] \\ &= \frac{2}{\pi}(-1 + 1) = 0 \Rightarrow a_0 = 1 - \frac{2}{\pi} \quad \text{et} \quad a_1 = 0. \end{aligned}$$

c) Calculons a_{2p} et $a_{2p+1} \quad \forall \quad p \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall \quad n \geq 2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t dt \quad \text{car } f \text{ est paire} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - \sin t)\cos nt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos nt - \sin t\cos nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\sin(n+1)t + \sin(1-n)t dt \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n}\sin nt]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)t - \frac{1}{1-n}\cos(1-n)t]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi + \frac{1}{1-n}\cos(1-n)\pi - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1-n}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{2}{1-n^2}\right] \\
&\qquad \text{car } \cos(1-n)\pi = \cos(1+n)\pi = (-1)^{n+1} \\
\Rightarrow a_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{2}{1-n^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{(-1)^{n+1}}{1-n^2} - \frac{2}{1-n^2}\right] \\
&= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}+1}{1-n^2}\right]
\end{aligned}
$$

Si $n = 2p+1$ on a $(-1)^n = (-1)^{2p+1} = -1$ donc $a_{2p+1} = 0$.
Si $n = 2p$ on a $(-1)^n = (-1)^{2p} = 1$ donc

$$a_{2p} = \frac{4}{\pi(4p^2-1)}$$

3- a) Montrons que f vérifie les condition de Dirichlet.
f est continue, dérivable sur $[0,\pi]$ et $f'(t) = -\cos t$ est continue sur $[0,\pi]$. Comme f paire alors f est continue, dérivable sur $[-\pi,0]$ et f' est continue sur $[-\pi,0]$.
Donc f vérifie les conditions de Dirichlet.

b) Développement en série de Fourier de f.
Comme f vérifie les conditions de Dirichlet et continue sur $\mathbb{R}$ donc on a

$$\forall \quad t \in \mathbb{R},$$

$$
\begin{aligned}
S_f(t) = f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}\cos 2pt
\end{aligned}
$$

car $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{4}{\pi(4p^2-1)}$

c) Déterminons la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4}{4p^2-1}$.

Pour $t = 0$ on a

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}\cos 2p0 \\
\Leftrightarrow 1 &= 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 11

1- a) Démontrons que $\forall \quad x \in [0,1], \quad 1 \leq e^x \leq e$.
D'après les propriétés de la fonction exponentielle népérienne, on a $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1$.
Donc on a $\forall \quad x \in [0,1], \quad 1 \leq e^x \leq e$

b) Déduisons-en l'inégalité $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.
$\forall \quad x \in [0,1], \quad 1-x \geq 0 \Rightarrow (1-x)^n \geq 0$.
D'après $1-a$), on a $\forall \quad x \in [0,1], \quad 1 \leq e^x \leq e$ et comme $\forall \quad x \in [0,1], \quad (1-x) \geq 0$ alors on a

$$
\begin{aligned}
& \forall \quad x \in [0,1], \quad (1-x)^n \leq (1-x)^n e^x \leq (1-x)^n e \\
\Rightarrow \quad & \int_0^1 (1-x)^n dx \leq \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq \int_0^1 (1-x)^n e dx \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n dx \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e dx \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)}\right) \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{e}{(n+1)}\right) \\
& \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!} \quad car (n+1)n! = (n+1)!.
\end{aligned}
$$

c) Montrons que la suite (I_n) est convergente.
Comme $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$$

donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. Par conséquent la suite (I_n) est convergente.

2- a) Montrons que

$$I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}.$$

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx.$$

Posons $u = (1-x)^n$ et $v' = e^x$ alors $u' = -n(1-x)^{n-1}$ et $v = e^x$ donc on a

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\left([(1-x)^n e^x]_0^1 + n\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx\right) \\
&= -\frac{1}{n!} + \frac{n}{n!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx \\
&= -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx \quad \text{car} \quad n! = n \times (n-1)! \\
&= -\frac{1}{n!} + I_{n-1} \quad \text{car} \quad I_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!} \quad \forall \quad n \geq 1.$$

b) Calculons I_0 et I_1.

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

Pour $n = 1, \quad I_0 - I_1 = \frac{1}{1!} \Leftrightarrow e - 1 - I_1 = 1 \Rightarrow I_1 = e - 2$

3- a) Expressions de J_n à l'aide de I_0 et I_n.

$$J_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
$$= 1 + (I_0 - I_1) + (I_1 - I_2) + \cdots + (I_{n-1} - I_n) \quad \text{car} \quad I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}$$
$$= 1 + I_0 - I_n \Rightarrow J_n = 1 + I_0 - I_n.$$

c) Calculons la limite J de J_n.
Comme $J_n = 1 + I_0 - I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} J_n = 1 + I_0 \Rightarrow J = e$.

c) Déduisons la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ vers e.

$$J = \lim_{n\to+\infty} J_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{or} \quad J = e \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

PROBABILITES.

EXERCICE 1

1. A : l'événement la machine A tombe en panne, $p(A) = 0,1$.
   B : l'événement la machine B tombe en panne, $p(B) = 0,03$.
   A et B sont deux événements indépendants.

   a) Calculons la probabilité p_1 pour que les deux machines tombent en panne.
   $A \cap B$: l'événement les deux machines tombent en panne.
   $p_1 = p(A \cap B) = p(A)p(B)$ car A et B sont deux événements indépendants.
   Alors $p_1 = 0,1 \times 0,03 = 0,003$.

   b) Calculons la probabilité p_2 pour que l'une au moins des deux machines tombent en panne.
   $A \cup B$:l'une au moins des deux machines tombent en panne.
   $p_2 = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,1 + 0,03 - 0,003 = 0,13 - 0,003$.
   Alors $p_2 = 0,127$.

   c) Calculons la probabilité p pour qu'une et une seule des deux machines tombent en panne.
   $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$:l'événement une et une seule des deux machines tombent en panne.
   Comme les événements $(\overline{A} \cap B)$ et $(A \cap \overline{B})$ sont incompatibles, $\overline{A}$ et B sont indépendants et A et $\overline{B}$ sont indépendants alors on a

$$\begin{aligned} p &= p[(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] = p[(\overline{A} \cap B)] + p[(A \cap \overline{B})] \\ &= p(A)p(\overline{B}) + p(\overline{A})p(B) = (0,1)(1 - 0,03) + (1 - 0,1)(0,03) \\ &= 0,9 \times 0,03 + 0,1 \times 0,97 = 0,027 + 0,097 \\ \Rightarrow p &= 0,124. \end{aligned}$$

2. a) Donnons la loi de probabilité de la variable N.
   Lorsqu'on considère une machine parmi les 10 machines on a deux possibiltés soit elle tombe en panne avec une probabilité $p = 0,1$ ou elle fonctionne avec une probabilité $q = 0,9$ ce qui donne une épreuve de Bernouilli. Par conséquent lorsqu'on