BTS Mécanique et Automatismes Industriels

Sujets d'examens

Lycée Louis Armand, Poitiers, Année scolaire 2009/2010

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1997

Exercice 1 : (*12 points*) **Équation différentielle d'ordre 2,** *bts mai, session 1997*

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

(E) $$y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}.$$

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation (E') :

   (E') $$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x}$ soit solution de l'équation (E).
3. *a*) Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

   b) Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point $S(0; 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

– Partie B - Étude d'une solution particulière de l'équation différentielle (E) –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2e^{2x}(1 - 2x).$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ; unité graphique : 2 cm.

1. *a*) Étudier la limite de f en $+\infty$

   b) Étudier la limite de f en $-\infty$.

   En déduire que C admet une asymptote (que l'on précisera). Préciser la position de C par rapport à cette asymptote.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe C.
4. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$. Donner la valeur de cette aire arrondie au mm^2.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des pièces en série. . . ,** *bts mai, session 1997*

Une entreprise fabrique en série des pièces dont le diamètre, mesuré en millimètres, définit une variable aléatoire D.

On admet que cette variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

1. *Estimation de m et* σ *:*

   a) Un échantillon de 100 pièces est prélevé au hasard dans la production. Les mesures des diamètres des pièces de cet échantillon son regroupées dans le tableau suivant :

Mesures des diamètres (en mm)	$[4,0; 4,2[$	$[4,2; 4,4[$	$[4,4; 4,6[$	$[4,6; 4,8[$	$[4,8; 5,0[$
effectif	6	24	41	25	4

   En faisant l'hypothèse que, pour chaque classe, les valeurs mesurées sont égales à celle du centre de la classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne d et l'écart type s de cet échantillon.

   En déduire l'estimation ponctuelle de σ fournie par cet échantillon.

   b) On appelle $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces de l'échantillon.

   On rappelle que $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma/10$.

   Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m de D au seuil de confiance de 95%.
2. Dans cette question, on admet que la production comporte 5 % de pièces inutilisables.

   a) L'entreprise conditionne ses pièces par boîtes de 25.

On tire une boîte au hasard (on assimilera cette épreuve à un tirage successif avec remise de 25 pièces dans la production).

On désigne par K le nombre de pièces inutilisables dans cette boîte.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire K ?

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que cette boîte contienne au plus une pièce inutilisable.

b) Un client qui a besoin de 185 pièces commande 8 boîtes de pièces (on assimile cette épreuve à un tirage successif et avec remise de 200 pièces dans la production).

On désigne par L le nombre de pièces inutilisables dans cette commande. On admet que L suit la loi de Poisson de paramètre 10.

Quelle est la probabilité que le client dispose d'un échantillon suffisant de pièces utilisables dans sa commande ?

Brevet de Technicien Supérieur

Session 1998

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*11 points*) **Une usine de plaquettes,** bts mai**,** *1998*

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.

Une entreprise fabrique des plaquettes dont la longueur et la largeur sont mesurées en mm.

– Partie A –

Sur un échantillon de 100 plaquettes, on a mesuré la longueur de chaque plaquette et obtenu le tableau suivant :

Longueur	$[35, 37[$	$[37, 39[$	$[39, 41[$	$[41, 43[$	$[43, 45[$
effectif	3	25	50	20	2

1. On veut calculer une valeur approchée de la moyenne m et de l'écart type s de l'échantillon. Pour cela, on fait comme si toutes les observations d'une classe étaient situées au centre de la classe. Calculer m et s. Compte tenu de l'erreur de méthode induite par l'approximation précédente, les résultats seront donnés à 10^{-1} près.

2. On suppose que la variable aléatoire L qui à chaque plaquette associe sa longueur suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $1,6$.

a) Donner une estimation ponctuelle de μ.

b) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de μ centré sur la valeur obtenue précédemment.

– Partie B –

On suppose dans cette partie que L suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type $1,6$ et que la largeur ℓ suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type $1,2$.

1. On tire une plaquette au hasard dans la production.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une longueur comprise entre 37 et 43 mm ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une largeur comprise entre 22 et 28 mm ?

2. Une plaquette est acceptée si sa longueur est comprise entre 37 et 43 mm et sa largeur est comprise entre 22 et 28 mm.

En admettant que L et ℓ sont des variables aléatoires indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée ?

– Partie C –

La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit rejetée est égale à $0,07$.

On appelle X la variable aléatoire qui à un lot de 100 plaquettes extraites de la fabrication associe le nombre de plaquettes rejetées contenues dans ce lot.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres et son espérance mathématique.

2. En admettant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson, préciser son paramètre.

Quelle est alors la probabilité d'obtenir strictement moins de 10 plaquettes rejetées dans un lot de 100 plaquettes ?

Exercice 2 : (*9 points*) **Transformée de Laplace et équation différentielle,** bts mai**,** *1998*

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que

a) $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

b) $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$.

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

– Partie A – Détermination de la transformée de Laplace de f –

Nous allons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle. Pour cela, nous admettons que f et ses dérivées premières et seconde admettent des transformées de Laplace. On note F la transformée de f. ($F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$).

Remarque – Je vous ai recopié *texto* l'énoncé de l'examen. Avec les notations habituelles utilisées en cours, le contenu de la dernière parenthèse serait plutôt : $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$.

1. Calculer en fonction de $F(p)$:

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right], \qquad \mathcal{L}\left[f'(t)\right], \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}\left[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)\right],$$

2. Calculer $\mathcal{L}\left[e^{-t}U(t)\right]$ où U est l'échelon unité.

3. En déduire $F(p)$.

– Partie B – Détermination de f –

1. Vérifier que

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+2},$$

puis montrer que

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

2. Déduire du résultat précédent l'expression de $f(t)$ pour t positif.

Brevet de Technicien Supérieur – groupement B Session 1999

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance industrielle, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Mise en forme des alliages moulés, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Réalisation d'ouvrages chaudronnés, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*) **Production et contrôle de qualité,** *Bts mai, 1999*

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.

1. Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre $293,5$ et $306,5$.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2. On note A l'événement : « *une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse* ».

On note de même B l'événement : « *une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse* ».

On admet que les probabilités des deux événements A et B sont $p(A) = 0,03$ et $p(B) = 0,07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « *les deux pièces du module sont défectueuses* » ;

E_2 : « *au moins une des deux pièces du module est défectueuses* » ;

E_3 : « *aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse* » ;

3. Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au **2.**

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est $0,902$.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binômiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3.

4. Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces P_2.

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces P_2 prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que $\overline{X}$ suit la loi normale :

$$\text{de moyenne inconnue } \mu \qquad \text{et} \qquad \text{d'écart type } \frac{\sigma}{\sqrt{60}} \quad \text{avec} \quad \sigma = 0,084.$$

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces P_2 d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} près de la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon est $\overline{x} = 4,012$.

a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant cette journée.

b) Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : « *la moyenne* μ *est obligatoirement entre* $3,991$ *et* $4,033$ ». Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Exercice 2 : (*11 points*) **Problème d'examen,** *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 1999*

Les parties **A.** *et* **B.** *peuvent être traitées de façon indépendante*

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E') \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

soit une solution particulière de l'équation (E)

3. Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = e + \frac{3}{2}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soient f et g les deux fonctions de la variable x définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)]$.
   Interpréter graphiquement le dernier résultat.
2. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.
3. *a*) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\quad f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$.
   b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. *a*) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.
   b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe $\mathcal{P}$.
5. *a*) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4\left(-4e^{-3} + 3e^{-2}\right)$.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A.

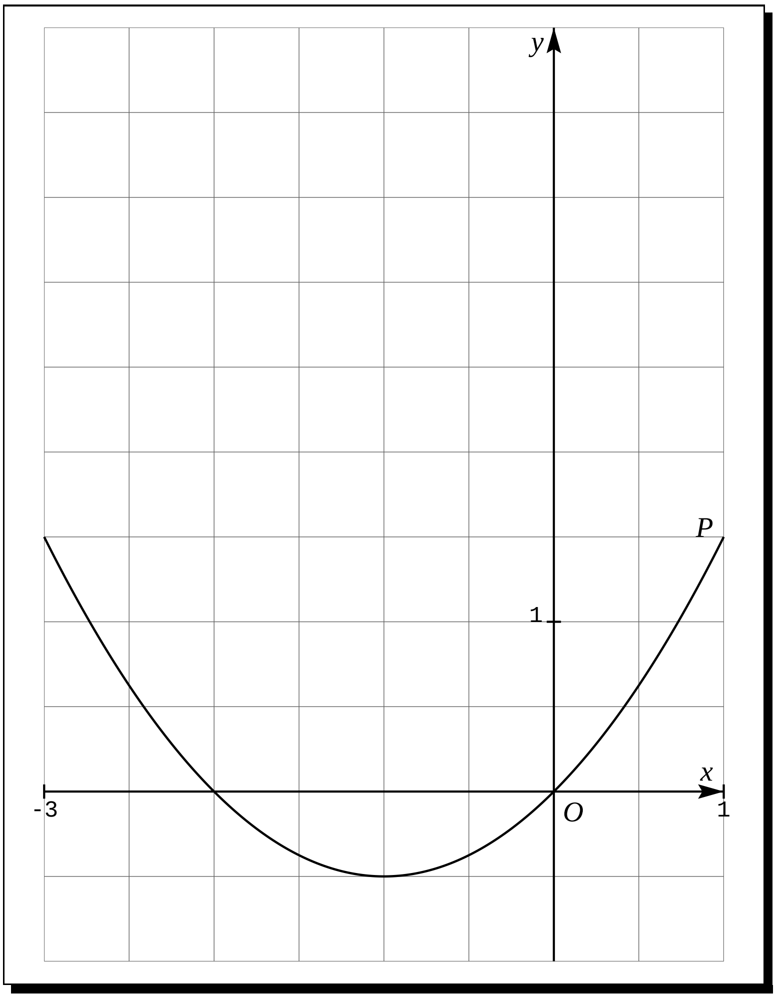
Feuille annexe (à rendre avec la copie)

– Partie B –

4. *a*)

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1
$f(x)$									

b)



Brevet de Technicien Supérieur – groupement B Session 2000

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*8 points*) **Des boulons**. . . , *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise industrielle utilise de grandes quantités d'un certain type de boulons. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre de la tête ou le diamètre du pied d'un boulon est conforme à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

1. Un boulon de ce type est considéré comme conforme pour le diamètre de sa tête si celui-ci est, en millimètres, compris entre $25,30$ et $25,70$.

   On note D la variable aléatoire qui, à chaque boulon choisi au hasard dans un lot très important, associe le diamètre de sa tête.

   On suppose que D suit la loi normale de moyenne $25,50$ et d'écart-type $0,10$.

   Déterminer la probabilité qu'un boulon choisi au hasard dans le lot soit conforme pour le diamètre de sa tête.

2. Dans un lot de ce type de boulons, 96% ont le diamètre de la tête conforme.

   On prélève au hasard 10 boulons de ce lot pour vérification du diamètre de leur tête. Le stock est suffisament important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 boulons.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 boulons, associe le nombre de boulons conformes pour le diamètre de la tête.

   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un boulon ne soit pas conforme pour le diamètre de la tête.

3. Dans cette question, on veut contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en mm, des pieds de boulon constituant un stock très important ; on se propose de construire un test d'hypothèse.

   On note Y la variable aléatoire qui, à chaque boulon tiré au hasard dans le stock, associe le diamètre, en mm, de son pied.

   La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0,1$.

   On désigne par $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 boulons prélevé dans un stock, associe la moyenne des diamètres des pieds de ces 100 boulons (le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

   L'hypothèse nulle est $H_0 \ : \mu = 10$. Dans ce cas, les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied.

   L'hypothèse alternative est $H_1 \ : \mu \neq 10$.

   Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

   a) Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type $0,01$.

   b) Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que

   $$P\left(10 - h \leqslant \overline{Y} \leqslant 10 + h\right) = 0,95.$$

   c) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

   d) On prélève un échantillon de 100 boulons et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des pieds est $\overline{y} = 10,03$.

   Peut-on, au risque de 5%, conclure que les boulons du stock sont conformes pour le diamètre de leur pied ?

Exercice 2 : (*12 points*) **Une équation différentielle d'ordre 2,** *Bts mai, 2000*

L'objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle dont une solution particulière est susceptible de définir une fonction de densité en probabilités.

Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

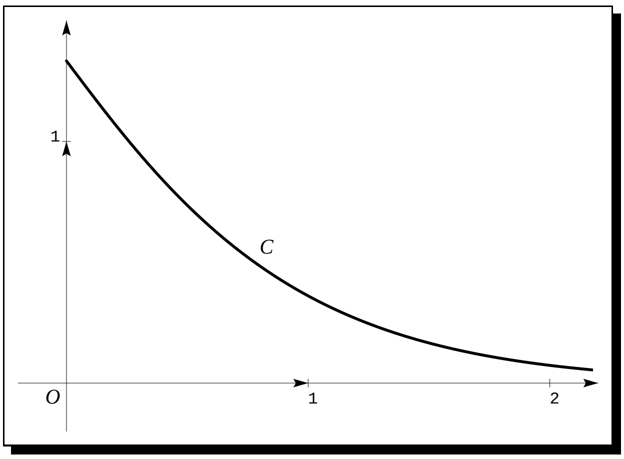
1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

   $$(E_0) \qquad y'' - 4y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$
   est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions
   $$h(0) = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad h'(0) = -\frac{4}{3}.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}$$



Une représentation graphique C de f, dans un repère orthogonal, est donnée ci-dessus.

1. Le graphique suggère un sens de variation pour la fonction f. L'objet de cette question est de justifier ce résultat.
   a) Démontrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$,
   $$f'(x) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}.$$
   b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
2. Le graphique permet d'envisager une asymptote en $+\infty$ pour la courbe C. À partir de l'expression de $f(x)$, déterminer une limite de f justifiant cette propriété graphique.

3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et t, pour x positif au voisinage de 0.

4. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de l'intégrale ;

$$I = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Donner une valeur approchée, arrondie au centième, de l'intégrale I.

Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

b) Sur l'écran d'une calculatrice, équipée d'un logiciel particulier (calcul formel), on lit le résultat suivant, où t est un nombre réel positif quelconque :

$$I = \int_0^t f(x)\,dx = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$$

Ce résultat est admis ici et n'a donc pas à être démontré.

Déterminer

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t}.$$

c) Soit $A(t)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe C, et la droite d'équation $x = t$ où t est un nombre réel positif.

Déterminer $J = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

d) Déterminer la valeur exacte de $J - I$ où $I = A(3)$ a été calculé à la question **4.***a*), et en déduire la double inégalité : $0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}$.

Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation graphique de $J - I$.

BTS groupement B session 2001

Exercice 1 : (*9 points*) **Pièces métalliques et contrôle de qualité,** bts mai, *juin 2001*

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dons les cotés sont exprimés en millimètres.

Un contrôle de qualité consiste à à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

– Partie A –

On note E l'événement : « *Une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme* ».

On suppose que la probabilité de l'événement E est $0,9$.

On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

– Partie B –

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ».

Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,94$.

On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.
2. Calculer la probabilité pour que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.
3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153.

   On admet que les variables M et N sont indépendantes.

   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est $0,914$.

– Partie C –

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité.

On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 est $p_2 = 0,879$.

La machine 1 fournit 60% de la production totale des ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.

On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées.

On définit les événements suivants :

A : « *la pièce provient de la machine* 1 » ;

B : « *la pièce provient de la machine* 2 » ;

C : « *la pièce est conforme* ».

1. Déterminer les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(C|_A)$, $p(C|_B)$.

   (On rappelle que $p(C|_A)$ est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.)
2. En déduire $p(C \cap A)$ et $p(C \cap B)$.
3. En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$, calculer $p(C)$.

Exercice 2 : (*11 points*) **Équation différentielle et étude de fonction,** bts mai, *juin 2001*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – *Résolution d'une équation différentielle* –

On considère l'équation différentielle

(E) $$y' - 2y = e^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

   (E_0) $$y' - 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{2x}$.

   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$.

– Partie B – *Étude d'une fonction* –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

Sa courbe représentative C est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au *b*).
2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

   c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. *a*) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

   b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

   $$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

   c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

   d) Tracer T dans le repère de l'annexe.

– Partie C – *Calcul intégral* –

1. Soit α un réel strictement négatif ; on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)\,dx$.

   Démontrer que

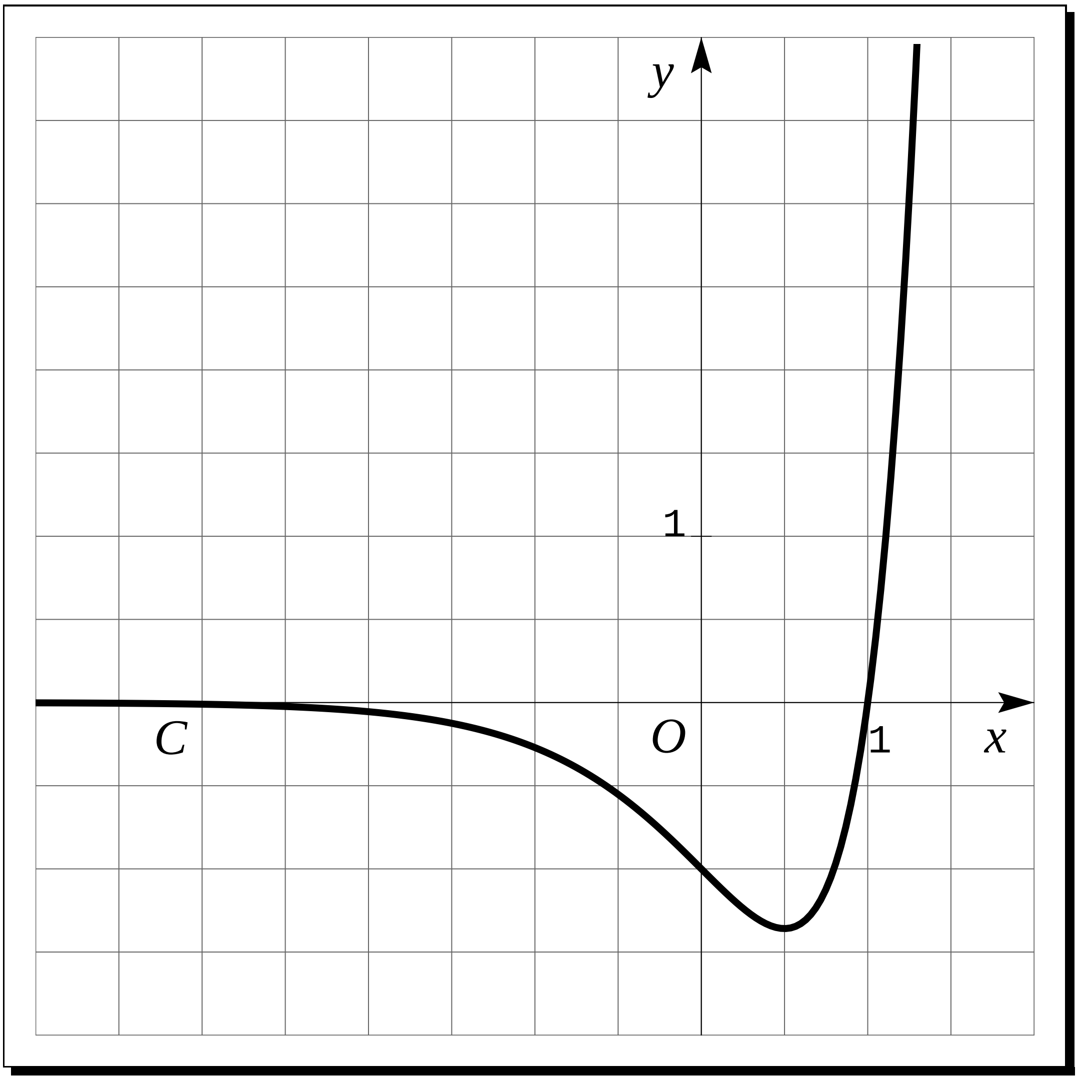
   $$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}.$$

   On pourra effectuer une intégration par parties.
2. *a*) Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

   b) À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

NOM :

Annexe



Brevet de Technicien Supérieur

Session 2002

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*8 points*) **Assurances d'une flotte de véhicules**

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans un groupe d'assurances on s'intéresse aux sinistres suceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.

Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats sont à arrondir à 10^{-3} près.

1. *Étude du nombre de sinistres par véhicule*

   Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée.

   On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $0,28$.

   a) Calculer la probabilité de l'événement A : « *un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée* ».

   b) Calculer la probabilité de l'événement B : « *un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée* ».

2. *Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs*

   On note E l'événement : « *un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée* ».

   On suppose que la probabilité de l'événement E est $0,6$.

   On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à untirage avec remise de 15 conducteurs.

   On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

   a) Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

   b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. *Étude du coût des sinistres*

   Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

   On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros.

   On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.

   Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 euros et 1 500 euros.

4. **La question ci-dessous doit être traitée par les candidats de toutes les spécialités de BTS du groupement B, à l'exception du BTS Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques.**

On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

a) Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

b) Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

On suppose que F suit la loi normale

$$\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$$

où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : « *le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question b)* ». Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)

4. La question ci-dessous doit être traitée uniquement par les candidats au BTS Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques.

Pour un parc de véhicules, on a relevé le nombre de sinistres par véhicule pendant la première année de mise en service.

Pour les véhicules ayant eu, au plus, quatre sinistres, on a obtenu :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
Effectif : n_i	1 345	508	228	78	35

a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

Nombre de sinistres : x_i	0	1	2	3	4
$y_i = \ln n_i$					

b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x sous la forme

$$y = ax + b$$

où a et b sont à arrondir à 10^{-2}.

c) À l'aide de l'équation précédente, estimer le nombre de véhicules ayant eu six sinistres pendant leur première année de mise en circulation.

Exercice 2 : (*12 points*) **Équation différentielle, développement limité, relations fonctionnelles**

Les 3 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' - y' - 2y = (-6x - 4)e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diférentielle (E)

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle E qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0)=1 \qquad \text{et} \qquad f'(0)=1.$$

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$. Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b).

2. a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t\mapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x\mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)=0.$$

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

– Partie C – Calcul intégral –

1. a) La fonction f définie dans la partie **B** étant une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y''-y'-2y=(-6x-4)e^{-x},$$

montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[f''(x)-f'(x)+(6x+4)e^{-x}\right].$$

b) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[f'(x)-f(x)-(6x+10)e^{-x}\right].$$

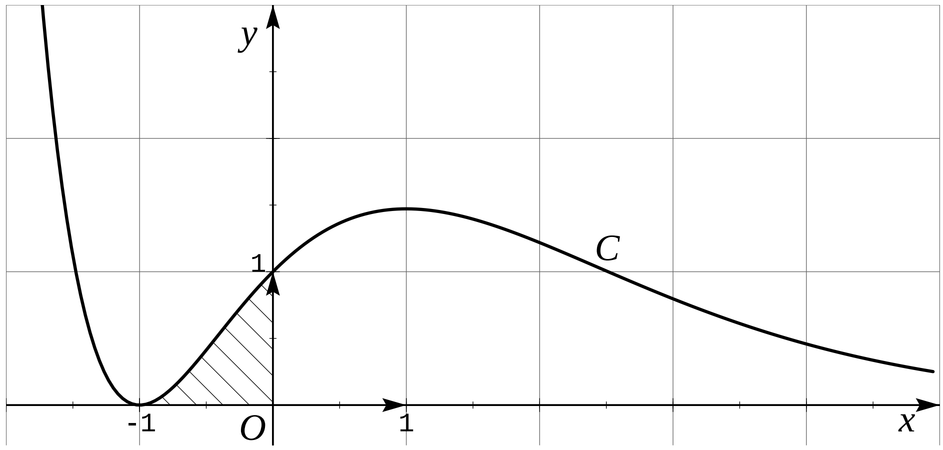
Montrer que F est une primitive de f.

c) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}.$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unité d'aire,

$$A=e-5.$$


y
1
C
-1
O
1
x

Brevet de Technicien Supérieur

Session 2003

Épreuve de mathématiques

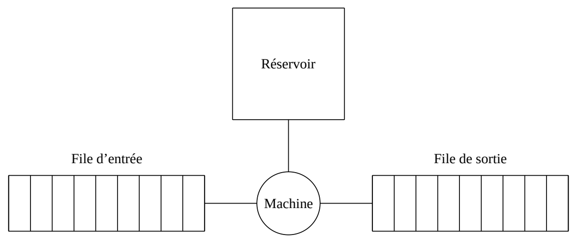
Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*) **Une chaîne d'embouteillage,** *bts mai, mai 2003*

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides, selon le schéma ci-contre.

L'exercice consiste en une étude statistique du bon fonctionnement de ce système.



1. *Défaut d'approvisionnement*

On considère qu'il y a défaut d'approvisionnement :

– soit lorsque la file d'entrée des bouteilles est vide,

– soit lorsque le réservoir est vide.

On tire au hasard un jour ouvrable dans une année. On note A l'événement : « *la file d'attente est vide au moins une fois dans la journée* » et B l'événement : « *le réservoir est vide au moins une fois dans la journée* ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants et une étude statistique a montré que

$$p(A) = 0,04 \qquad \text{et} \qquad p(B) = 0,02.$$

Calculer la probabilité des événements suivants :

a) $E_1 = A \cap B$.

b) E_2 : « *la machine a connu au moins un défaut d'approvisionnement dans la journée* ».

2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours*

On note X la variable aléatoire qui à toute période de 100 jours consécutifs, tirée au hasard dans les jours ouvrables d'une année, associe le nombre de pannes de la machine. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de machines de ce type, permet d'admettre que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,5$.

Déterminer, à l'aide de la table du formulaire :

a) $p(X \leqslant 2)$;

b) la probabilité de l'événement « *la machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs* »;

c) le plus petit entier n tel que : $p(X \leqslant n) \geqslant 0,99$.

Dans tout ce qui suit, les volumes sont exprimés en litres et tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

3. *Qualité de l'embouteillage à la sortie*

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production d'une heure, associe le volume d'eau qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, Y suit la loi normale de moyenne $1,5$ et d'écart-type $0,01$.

Une bouteille d'eau est conforme aux normes de l'entreprise lorsqu'elle contient entre $1,47$ et $1,53$ litre d'eau.

Calculer la probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme.

4. *Fiabilité d'une machine à embouteiller*

On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans le parc des machines sur le point d'être livrées par le constructeur.

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard dans le parc, asssocie sa durée de vie avant une défaillance.

On note $p(T > t)$ la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours.

On suppose que $p(T > t) = e^{-0,005t}$.

a) Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours sans panne.

b) Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de t jours, soit égale à $0,8$. Arrondir à l'entier par défaut.

Exercice 2 : (*11 points*) **Équation différentielle,** *bts mai, session 2003*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{-x}$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

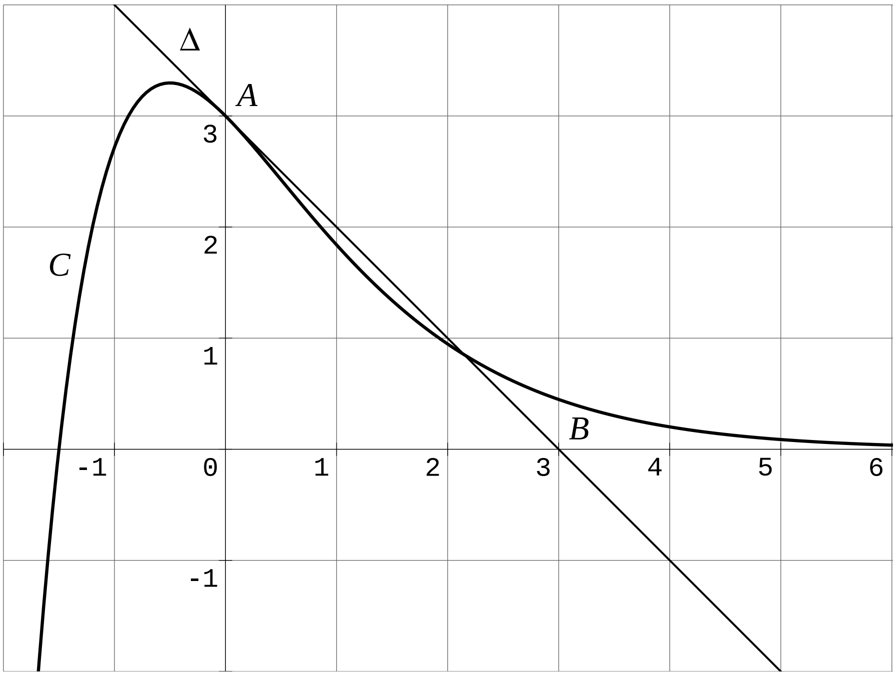
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.

– Partie B - Étude d'une fonction –

1. La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

La droite Δ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3, 0)$.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$.

b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.

c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+3)e^{-x}.$$

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$;

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$;

c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (On ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.)

3. *a*) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

– Partie C - Calcul intégral –

1. La fonction f définie dans la partie **B** est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}.$$

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

a) Démontrer que $I = 5 - 6e^{-1/2}$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. On note $J = \displaystyle\int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$.

a) Démontrer que $J = 65/48$.

b) Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.

c) Vérifier que les valeurs approchées obtenues ci-dessus pour I et J diffèrent de moins de 10^{-2}.

Brevet de Technicien Supérieur

Session 2004

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*9 points*) **Des tiges métalliques**. . . , *bts mai, session 2004*

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A - Loi normale.

Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[99,45; 100,55]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur.

On suppose que X suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type $0,25$.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que :

$$p(100 - h \leqslant X \leqslant 100 + h) = 0,95.$$

   Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

B - Loi binomiale et loi de Poisson.

Dans un lot de ce type de tiges, 3% des tiges ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. On considère que la loi suivie par Y peut-être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
4. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ a la valeur obtenue au **3.**
   Calculer $p(Z = 2)$ et $p(Z \leqslant 2)$.

C - Intervalle de confiance.

Dans cette question, on s'intéresse au diamètre des tiges, exprimé en millimètres.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 50 tiges dans la production d'un journée.

Soit $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 tiges prélevées au hasard et avec remise dans la production d'un journée, associe la moyenne des diamètres des tiges de cet échantillon.

On suppose que $\overline{D}$ suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma/\sqrt{50}$ avec $\sigma = 0,19$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\overline{x} = 9,99$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des tiges produites dans cette journée.

2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des diamètres des tiges produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.
3. On considère l'affirmation suivante : « *la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenue à la question* **2.** ».

   Est-elle vraie ? (on ne demande pas de justification.)

Exercice 2 : (*11 points*) **Hauteurs de crues et probabilités,** *bts mai, session 2004*

Dans cet exercice, on étudie une fonction qui intervient dans des calculs de probabilité à propos de la crue d'un fleuve. (Source : un bureau d'étude du domaine de l'équipement.)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A - Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ : y' + (0,4x)y = 0,4x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0)\ : y' + (0,4x)y = 0.$$

2. Montrer que la fonction constante h, définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Vérifier que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-0,2x^2}$ est la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.

B - Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 0,4xe^{-0,2x^2}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les unités graphiques étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $[0;+\infty[$,

$$f'(x) = 0,4\left(1-\sqrt{0,4}x\right)\left(1+\sqrt{0,4}x\right)e^{-0,2x^2}.$$

   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$.

   c) Donner le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

   On y fera figurer la valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de la fonction f.
3. Un logiciel de calcul formel fournit pour f le développement limité suivant, à l'ordre 3, au voisinage de 0 :

$$f(x) = 0,4x - 0,08x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

   Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

   En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, et la position relative de T et C au voisinage de ce point.
4. Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ défini au début de la partie B.

C - Application à un problème de probabilité.

Une étude statistique, fondée sur un historique des crues d'un fleuve, permet de faire des prévisions dur sa hauteur maximale annuelle, en mètres.

On note X la variable aléatoire qui, à une année prise au hasard dans une longue période, associe la hauteur maximale du fleuve en mètres.

Soit x un réel positif. La probabilité qu'una année donnée la hauteur maximale du fleuve soit inférieure à x mètres est

$$p(X \leqslant x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est la fonction définie dans la partie B.

On admet que : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-0,2x^2}$.

1. Les digues actuelles ne protègent l'agglomération que lorsque la hauteur du fleuve est inférieure à 4 mètres.

Calculer la probabilité $p(X \leqslant 4)$ qu'une année donnée, l'agglomération soit protégée de la crue; arrondir le résultat à 10^{-2}.

2. Afin de réaliser des travaux pour améliorer la protection de l'agglomération, on cherche la hauteur x_0, en mètres, telle que $P(X \leqslant x_0) = 0,99$.

a) Montrer que x_0 est solution de l'équation : $e^{-0,2x_0^2} = 0,01$.

b) Déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de x_0.

c) On considère l'affirmation suivante : « *En surélevant les digues d'un mètre, la probabilité qu'une année prise au hasard, l'agglomération soit protégée est supérieure à* $0,99$ ».

Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication.)

Brevet de Technicien Supérieur

Session 2005

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*11 points*) *bts mai, session 2005*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)y'+y=\frac{1}{1+x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$(1+x)y'+y=0$$

sont les fonctions définie par

$$h(x)=\frac{k}{x+1}, \qquad \text{où } k \text{ est une constante réelle quelconque}$$

2. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$g(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

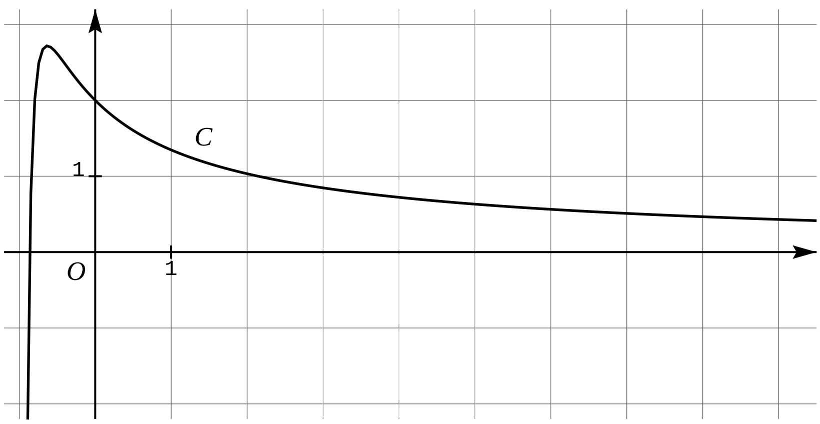
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0)=2$.

– Partie B – Étude d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2+\ln(1+x)}{1+x}.$$

Sa courbe représentative C, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous :



1. On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. *a*) Démontrer que, pour tout x de $]-1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

b) Résoudre dans $]-1; +\infty[$ l'inéquation

$$-1 - \ln(1+x) \geqslant 0.$$

En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1; +\infty[$.

c) Établir le tableau de variation de f.

3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

a) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de C et T au voisinage de leur point d'abscisse 0.

– Partie C - Calcul intégral –

1. Déterminer la dérivée de la fonction G définie sur $]-1; +\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x)\right)^2.$$

2. En déduire qu'une primitive de la fonction f sur $]-1; +\infty[$ est définie par

$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left(\ln(1+x)\right)^2.$$

3. *a*) On note

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

Démontrer que

$$I = \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \ln 3.$$

b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.

c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au *b*).

Exercice 2 : (*9 points*) **Production de rondelles**... *bts mai, session 2005*

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

– Partie A – loi normale –

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle $[89,6; 90,4]$.

1. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre; On supppose que X_1 suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart type $\sigma = 0,17$.

Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart type σ_1.

Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à $0,99$.

– Partie B – Loi binomiale –

On note E l'événement : *une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux.*

On supppose que $p(E) = 0,02$.

On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles.

On considère la variable aléatoire Y_1 qui à tout prélèvement de quatre rondelles associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux. Arrondir à 10^{-3}.

– Partie C – Approximation d'une loi binomiale par une loi normale –

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire Y_2 qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire Y_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,02$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y_2 par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type $4,43$.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart type $4,43$.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles, c'est à dire calculer $p(Z \leqslant 15,5)$.

– Partie D – Test d'hypothèse –

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres, en millimètres, de rondelles constituant une livraison à effectuer.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la livraison, associe son diamètre.

La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,17$.

On désigne par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 rondelles prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces rondelles (la livraison est assez importatne pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 90$. Dans ce cas la livraison est dite conforme pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 90$.

Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test en admettant, sous l'hypothèse nulle H_0, le résultat suivant qui n'a pas à être démontré :

$$p(89,967 \leqslant \overline{X_2} \leqslant 90,033) = 0,95.$$

2. On prélève un échantillon de 100 rondelles dans la livraison et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{x} = 90,02$.

   Peut-on, au seuil de 5%, conclure que la livraison est conforme pour le diamètre ?

Brevet de Technicien Supérieur
Session 2006
Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 3 : (*11 points*) **Équation différentielle, étude de fonction,** *bts mai, session 2006*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

(E) $$y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

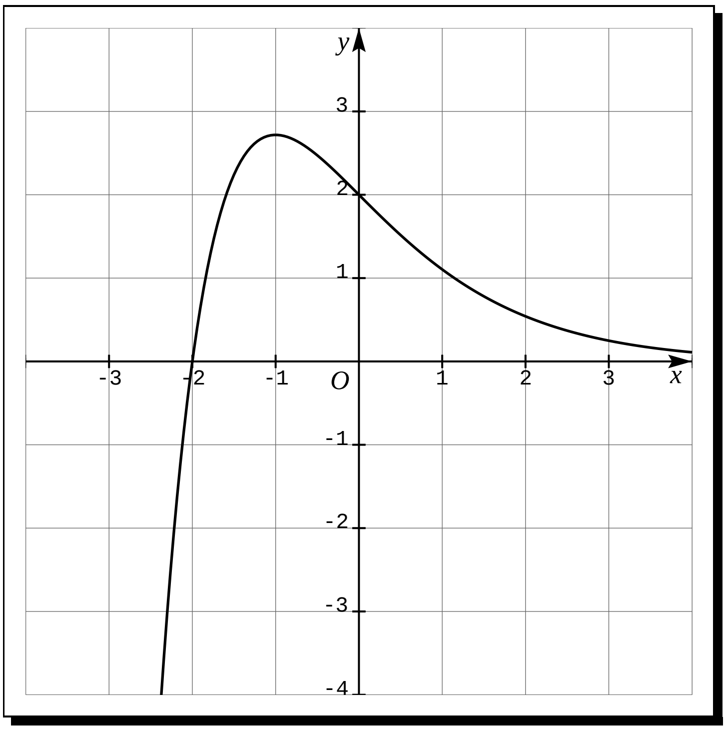
   (E_0) $$y'' - 3y' - 4y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

– Partie B - Étude locale d'une fonction –

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.



1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. Déduire du **1.** une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

3. Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

– Partie C - Calcul intégral –

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6e^{-0,6}$.

2. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. Donner une interprétation graphique du nombre I.

Exercice 4 : (*9 points*) **Des chaudières...** *bts mai, session 2006*

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

- des chaudières dites « à cheminée »,
- des chaudières dites « à ventouse ».

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A - Ajustement affine –

Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de chaudières fabriquées : y_i (unité : le millier)	15, 35	15, 81	16, 44	16, 75	17, 19	17, 30

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer :

a) le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables x et y ; arrondir à 10^{-2} ;

b) déterminer une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$, où a sera arrondi à 10^{-3} et b sera arrondi à l'unité.

2. En supposant que la tendance observée se poursuive pendant deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

– Partie B - Probabilités conditionnelles –

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminées et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminées sont défectueuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

A : « *La chaudière est à cheminée* » ;

B : « *La chaudière est à ventouse* » ;

D : « *La chaudière présente un défaut* ».

1. Déterminer $p(A)$, $p(B)$, $p(D|A)$ et $p(B|D)$.

2. Calculer $p(D \cap A)$ et $p(D \cap B)$.

3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $D \cap A$ et $D \cap B$ sont incompatibles, calculer $p(D)$ et $p(\overline{D})$.

– Partie C - Loi normale –

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque chaudière à cheminée prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement en années.

On admet que X suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 3.

Une chaudière est dite « amortie » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Calculer la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit « amortie »; arrondir à 10^{-3}.

– Partie D - Intervalle de confiance –

On considère un échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard dans un stock important. Ce stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 94 chaudières sont sans aucun défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard et avec remise dans ce stock, associe la fréquence des chaudières de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

   On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des chaudières du stock qui sont sans aucun défaut.

   Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95%. Arrondir les bornes à 10^{-2}.
3. On considère l'affirmation suivante : « le fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2.** ».

   Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)

Brevet de Technicien Supérieur

Session 2007

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 5 : (*11 points*) **Équation différentielle, étude de fonction,** *bts mai, session 2007*

On étudie dans cet exercice une fonction φ suceptible d'intervenir dans la modélisation du traffic Internet au terminal informatique d'une grande société. Pour un réel t positif, $\varphi(t)$ est la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux paquets de données soit inférieur à t secondes.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 710y = 710$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 710y = 0.$$

2. Soit h la fonction défine sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = 1$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$.

– Partie B - Étude d'une fonction –

Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$.

On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que φ est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$.

2. *a*) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est

$$\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de C et T au voisinage de ce point.

3. Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ défini au début de la partie **B**. On pourra se limiter à la partie de C correspondant à l'intervalle $[0; 0,01]$.

4. *a*) Déterminer par le calcul le nombre réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0,5$.

Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur arrondie à 10^{-5}.

b) Retrouver sur la figure le résultat obtenu au *a*) : faire apparaître les constructions utiles.

Le nombre α représente le temps médian en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

– Partie C - Calcul intégral –

1. Pour tout réel positif, on note

$$I(t) = 710 \int_O^t xe^{-710x}\, dx.$$

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(t) = -te^{-710t} - \frac{1}{710}e^{-710t} + \frac{1}{710}.$$

2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.

Donner la valeur exacte de cette limite, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

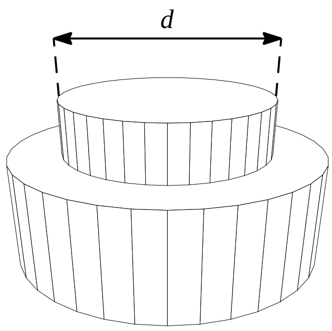
Le résultat obtenu est le temps moyen en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

Exercice 6 : (*9 points*) **Ventilateurs...** *bts mai, session 2007*

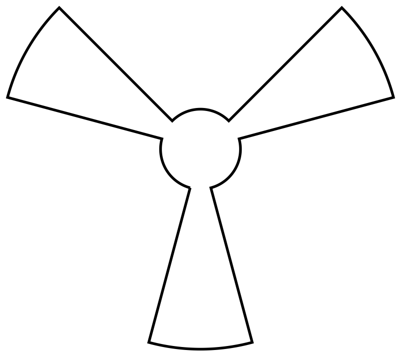
Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique des ventilateurs en grande quantité. On s'intéresse à trois types de pièces : l'axe moteur, appelée pièce de type 1, l'ensemble des trois pales, appelé pièce de type 2 et le support, appelé pièce de type 3.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.



Pièce de type 1



Pièce de type 2

– Partie A - Loi normale –

Une pièce de type 1 est conforme lorsque le diamètre d (voir la figure), exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[29,8; 30,2]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 1 prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1, associe le diamètre d exprimé en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type $0,09$.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production des pièces de type 1 soit conforme.

– Partie B - Loi binomiale –

On considère un stock important de pièces de type 2.

On note E l'événement : « *une pièce prélevée au hasard dans le stock de pièces de type 2 est défectueuse* ».

On suppose que $P(E) = 0,03$.

On prélève au hasard 20 pièces dans le stock de pièces de type 2 pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimilier ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 pièces de type 2.

On considère la variable Y qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

– Partie C - Test d'hypothèse –

Une importante commande de pièces de type 3 est passée auprès d'un sous-traitant. La hauteur du support doît être de 400 millimètres.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler, au moment de la livraison, la moyenne μ de l'ensemble des hauteurs, en millimètres, des pièces de type 3.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque pièce de type 3 prélevée dans la livraison associe sa hauteur.

La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 5$.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 pièces de type 3 prélevé dans la livraison, associe la moyenne des hauteurs des pièces de cet échantillon. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 400$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 400$.

Le seuil de signification est fixé à $0,05$.

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart-type $0,5$.

   Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que :

$$P(400 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 400 + h) = 0,95.$$

2. En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
3. On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces dans la livraison reçue et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des hauteurs des pièces est $\overline{z} = 399,12$.

   Peut-on, au seuil de risque de 5%, conclure que la livraison est conforme pour la hauteur ?

Brevet de Technicien Supérieur

Session 2008

Épreuve de mathématiques

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 7 : (*12 points*) **La solution particulière est donnée,** *bts mai, juin 2008*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = xe^x,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

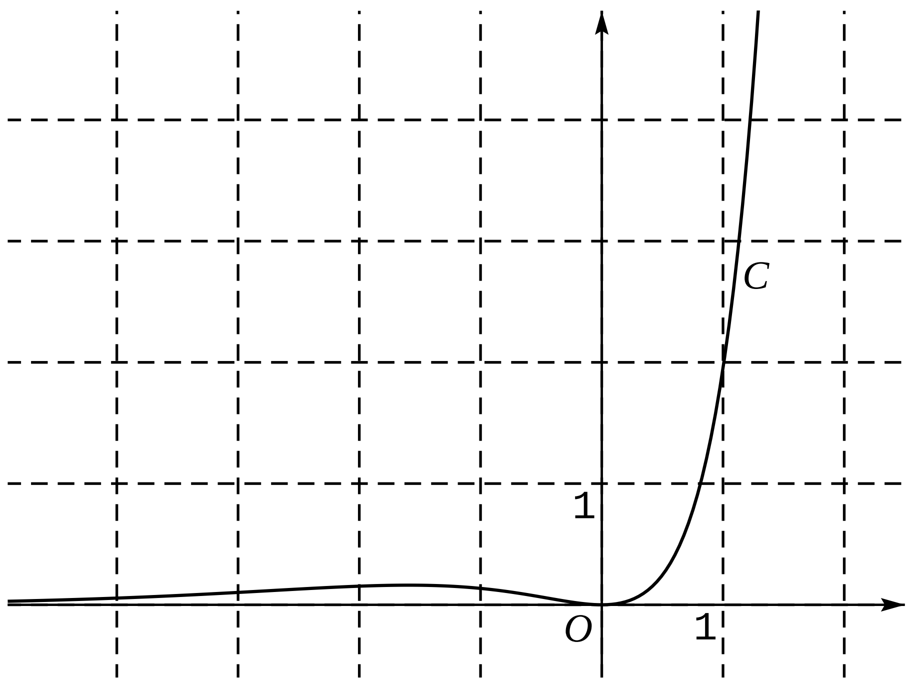
1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$(E_0) \qquad y' - 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-1)e^x$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

– Partie B - Étude locale d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$. Sa courbe représentative C est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. *a*) Démontrer que pour tout réel x,
$$f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x).$$
   b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   c) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.
   d) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

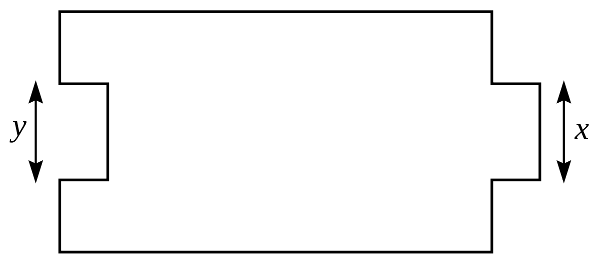
– Partie C - Calcul intégral –

1. On note
$$I = \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,dx.$$
   Démontrer que $I = 0,009$.
2. On note
$$J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x}\,dx.$$
   Démontrer que $J = 0,5\left(e^{0,6} - e^{-0,6}\right)$.
3. On note
$$K = \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^x\,dx.$$
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(e^{0,3} - e^{-0,3}\right)$.
4. On note
$$L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,dx.$$
   a) Déduire des questions précédente la valeur exacte de L.
   b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.
   c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 8 : (*8 points*) **Des pièces encastrables,** *bts mai, juin 2008*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique en grande série des pièces en bois. Ces pièces sont prévues pour s'encastrer les unes dans les autres.



Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A - Loi normale.

Une pièce de ce type rest conforme lorsque sa cote x, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[9,5; 10,5]$ et lorsque sa cote y appartient à l'intervalle $[10,5; 11,5]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à caque piècede ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote x. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type $0,21$.

Calculer $p(9,5 \leqslant 10,5)$.

2. On onte Y la variable aléatoire qui, à chaque pièce de ce type prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe sa cote y. On admet que

$$p(10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5) = 0,985.$$

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme.

B - Loi binomiale et loi de Poisson.

On considère un stock important de pièces.

On note E l'événement « *une pièce prélevée au hasard dans le stock de pièces est défectueuse* ».

On supppose que $p(E) = 0,03$.

On prélève au hasard 50 pièces dans le stock de pièces pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de pièces qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer $p(Z = 0)$ et $p(Z \leqslant 2)$.

3. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z peut être approchée par une loi de Poisson.

   a) Déterminer la paramètre λ de cette loi.

   b) On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au *a*).

   En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 pièces, au plus deux pièces soient défectueuses.

C - Intervalle de confiance.

Dans cette partie on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 100 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 96 pièces sont sans aucun défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des pièces de cette livraison qui sont sans aucun défaut.

2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquance des pièces de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

On suppose que F suit une la loi normale de moyenne p et d'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$, où p est la fréquence inconnue des pièces de la livraison qui sont sans aucun défaut.

Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95%.