

Chapitre B-VII

De la mécanique des systèmes à celle des solides.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur www.joelsornette.fr.

Il s'agit dans ce chapitre d'établir les lois de la mécanique du solide à partir de celles de la mécanique du point.

On commence par démontrer les théorèmes du centre de gravité, du moment cinétique et de l'énergie cinétique pour un système de points matériels et l'on introduit ensuite le référentiel barycentrique.

On établit les propriétés du champ des vitesses d'un solide et l'on introduit successivement le vecteur rotation et la matrice d'inertie, ce qui permet l'adaptation au solide des théorèmes relatifs aux systèmes.

On montre l'intérêt de la notion de torseur pour modéliser les interactions.

On termine en montrant, pour un solide réel, le découplage entre mécanique et thermodynamique, ce qui justifie le modèle du solide parfait.

Table des matières

B-VII De la mécanique des systèmes à celle des solides.	1
1 Rappels de mécanique du point.	5
2 Systèmes matériels.	7
3 Postulat d'additivité des forces.	7
4 Forces intérieures et extérieures à un système.	8
5 Théorème du centre de gravité.	9
5.a Centre de gravité.	9
5.b Quantité de mouvement d'un système matériel.	9
5.c Le théorème.	10
5.d Forces de pesanteur.	10
6 Théorème du moment cinétique.	11
6.a Théorème du moment cinétique en un point fixe.	11
6.b Théorème du moment cinétique par rapport à un axe.	12
6.c Moment des forces de pesanteur.	12
7 Théorème de l'énergie cinétique	13
7.a Enoncé du théorème pour un système.	13
7.b Energie potentielle de pesanteur.	13
8 Référentiel barycentrique et théorèmes de Kőnig.	14
8.a Référentiel barycentrique.	14
8.b Théorème de Kőnig pour le moment cinétique.	15
8.c Théorème du moment cinétique au centre de gravité.	15
8.d Théorème de Kőnig pour l'énergie cinétique.	16

9	Champ des vitesses d'un solide.	17
10	Moment cinétique d'un solide. Matrice d'inertie.	21
11	Energie cinétique d'un solide.	26
12	Adaptation des théorèmes de la mécanique des systèmes à celle des solides.	27
12.a	Remarque initiale.	27
12.b	Théorème du centre de gravité.	27
12.c	Théorème du moment cinétique.	27
12.d	Théorème de l'énergie cinétique.	28
13	Notion de torseur.	29
13.a	Définitions.	29
13.b	Formulation torsorielle des théorèmes de la mécanique des systèmes.	31
13.c	Force localisée.	31
13.d	Formulation torsorielle du théorème de l'énergie pour un solide.	31
13.e	Notion de couple. Réduction d'un torseur.	32
14	Mécanique du solide et thermodynamique.	33
15	En guise de conclusion.	34

1 Rappels de mécanique du point.

Il ne s'agit ici que d'un résumé du chapitre sur la dynamique du point matériel, sans aucun commentaire ni aucune démonstration.

On postule l'existence de particules de taille infiniment petite, appelées *points matériels*. La matière, dans ce modèle, est un assemblage de points matériels. A chaque point matériel est affecté un coefficient scalaire appelé *masse inertielle* noté m

On postule l'existence de référentiels privilégiés appelée *référentiels inertiels* ou *référentiels galiléens* dans lequel un point matériel isolé, c'est-à-dire sans interaction avec tout autre point, a un mouvement rectiligne uniforme, donc a une vitesse constante.

On appelle *quantité de mouvement* du point A de masse m_A et de vitesse $\vec{v}_A$ la grandeur vectorielle :

$$\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A(t)$$

Dans le cas d'un système isolé¹ de deux points en interaction notés A et B , on appelle *force exercée* par B sur A la grandeur vectorielle :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(m_A \vec{v}_A) = m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

et bien sûr la force exercée par A sur B la grandeur vectorielle :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(m_B \vec{v}_B) = m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

On postule que pour un système isolé de deux particules, la somme de leurs deux quantités de mouvement se conserve et l'on en déduit immédiatement que :

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$$

Il s'agit du théorème d'*action et réaction*.

Soit un point matériel A (isolé ou en interaction avec un point B , voire d'autres) de masse m_A , de vitesse $\vec{v}_A$ et donc de quantité de mouvement $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$. On définit le *moment cinétique* de A comme un champ vectoriel dont la valeur en tout point M du référentiel est :

$$\vec{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{p}_A$$

De cette formule résulte une « formule de changement de point », qui peut être utile, permettant de lier les valeurs du champ de moment cinétique en deux points différents, disons M et M' . La voici :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(M') = \vec{\sigma}_A(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{p}_A}$$

1. c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autre points matériels que A et B

Par analogie avec le moment cinétique, on appelle moment dynamique exercé sur le point A subissant une force $\vec{F}_A$ le champ vectoriel dont la valeur en un point M est :

$$\vec{\mathfrak{M}}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{F}_A$$

De la même façon que pour le moment cinétique, la formule de changement de point :

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_A(M') = \vec{\mathfrak{M}}_A(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{F}_A}$$

Pour le champ $\vec{\sigma}_A$ qui à tout point M associe, à l'instant t , $\vec{\sigma}_A(M, t)$, on définit sa dérivée temporelle, notée $\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}$ comme un champ qui à M associe, à l'instant t , $\frac{\partial \vec{\sigma}_A}{\partial t}(M, t)$, dérivée partielle par rapport au temps de $\vec{\sigma}_A(M, t)$, définition exprimée tout naturellement en terme de dérivée partielle, impliquant donc *par essence* le fait que M est fixe.

On démontre le *théorème du moment cinétique* dont l'expression est :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}_A}$$

autrement dit, qu'en tout point M fixe et en sous-entendant qu'il s'agit aussi de fonctions du temps :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}(M) = \vec{\mathfrak{M}}_A(M)}$$

On postule que la somme des moments cinétiques d'un système isolé de deux points en interaction se conserve.

On en déduit que $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$; dans cette axiomatique, la force d'interaction entre deux points est toujours parallèle à la droite qui les joint.

Soit un point matériel A (isolé ou en interaction avec un point B , voire d'autres) de masse m_A , de vitesse $\vec{v}_A$, on définit l' *énergie cinétique* de A par :

$$E_{cin A} = \frac{1}{2} m_A \vec{v}_A^2$$

et l'on appelle *puissance* exercée par $\vec{F}_A$ sur A la quantité :

$$\mathcal{P}_A = \vec{F}_A \cdot \vec{v}_A$$

On démontre le théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{dE_{cin A}}{dt} = \mathcal{P}_A}$$

On montre qu'a priori pour un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, la somme de leurs énergies cinétiques ne se conserve pas. En notant ci-après cette somme E_{cin} , on a en effet, en notant $\overrightarrow{AB} = r \overrightarrow{u}$ où $r = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\overrightarrow{F}_{A \rightarrow B} = F \overrightarrow{u}$:

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = \overrightarrow{F}_{A \rightarrow B} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} = F \frac{dr}{dt}$$

L'énergie cinétique ne se conserve donc que si la distance r entre les points est constante (ce sera important pour la mécanique du solide).

Si la loi d'interaction est isotrope c'est-à-dire si F ne dépend que de r et donc pas de la direction de $\overrightarrow{u}$ et si l'on note $U_{AB}(r)$ l'opposé de la primitive de $F(r)$, qu'on appellera *énergie potentielle*, notée U_{AB} , on aura :

$$\frac{d}{dt} [E_{cin}(t) + U_{AB}(r(t))] = 0$$

La quantité $E = E_{cin} + U_{AB}$ se conserve donc dans ces conditions, on l'appelle *énergie mécanique*.

La loi de *gravitation universelle* affirme que deux points matériels A et B s'attirent selon la loi :

$$F_{A \rightarrow B} = -G M_A M_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}$$

où G est une constante universelle dont la valeur dépend du choix des unités et M_A et M_B des coefficients scalaires appelé *masses gravitationnelles* de points A et B .

L'expérience oblige à postuler qu'il y a identité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle ; seule la théorie de la relativité générale propose une explication.

2 Systèmes matériels.

On étudie ici un système matériel comme un ensemble fini de points matériels.

Un tel ensemble pourra toutefois être décrit par une distribution continue de masse où chaque élément de volume dV centré sur un point M a une masse dm , somme des masses ponctuelles contenues dans dV , et que l'on note $dm = \mu(M) dV$ où $\mu(M)$ s'appelle masse volumique en M . Les masses ponctuelles contenues dans dV ont toutes la même vitesse $\overrightarrow{v}(M)$, à des infiniment petits près d'ordre supérieur à celui de la taille de dV , qui sera considérée comme la vitesse de dm .

3 Postulat d'additivité des forces.

Soit un point matériel A soumis à l'interaction de points $B_1, B_2, \dots B_n$; on postule que la force qu'il subit est la somme vectorielle des forces qu'il subirait de la part de chacun

des points B_i si celui-ci était seul, soit :

$$\vec{F}_A = \sum_{i=1}^{i=n} F_{B_i \rightarrow A}$$

Remarque : Un point matériel A soumis l'attraction universelle de points B_i subit donc une force totale de gravitation :

$$\vec{F}_A = M_A \sum_i \left(-G M_{B_i} \frac{\vec{AB_i}}{\|AB_i\|^3} \right)$$

que l'on notera $\vec{F}_A = M_A \vec{g}$. Pour la différence subtile entre gravitation et pesanteur, voir le chapitre sur le choix d'un référentiel (COPERNIC, FOUCAULT ou terrestre); on ne détaille pas ici.

4 Forces intérieures et extérieures à un système.

Soit un système constitué des points $A_1, A_2, \dots, A_n$, soumis à l'interaction de points $B_1, B_2, \dots, B_p$ extérieurs au système. Le point A_1 (par exemple) est soumis à l'action d'autres points du système, comme A_2 , et de points extérieurs au système, comme B_1 . Une force comme $\vec{F}_{A_2 \rightarrow A_1}$ est dite *force intérieure* et une force comme $\vec{F}_{B_1 \rightarrow A_1}$ est dite *force extérieure*.

La somme sur un système des forces intérieures est nulle par sommation du théorème d'action et réaction sur les couples de points intérieurs, soit :

$$\sum \vec{F}_{int} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{F}_{A_i \rightarrow A_j} + \vec{F}_{A_j \rightarrow A_i}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \vec{0} = \vec{0}$$

Il en est de même pour la somme en un point M des moments dynamiques, soit en tenant compte du théorème d'action et réaction pour les moments :

$$\sum \vec{\mathfrak{M}}_{int}(M) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{\mathfrak{M}}_{A_i \rightarrow A_j}(M) + \vec{\mathfrak{M}}_{A_j \rightarrow A_i}(M)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \vec{0} = \vec{0}$$

Par contre, on ne peut rien dire a priori de la somme des puissances intérieures; même si les forces dérivent d'un potentiel; on a, en utilisant un résultat de mécanique du point :

$$\sum \mathcal{P}_{int} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathcal{P}_{A_i \rightarrow A_j} + \mathcal{P}_{A_j \rightarrow A_i}) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{d}{dt} U(\|\vec{A_i A_j}\|) = - \frac{d}{dt} \sum_{1 \leq i < j \leq n} U(r_{ij})$$

Le seul cas où l'on puisse affirmer quelque chose est celui où tous les $r_{ij} = \|\overrightarrow{A_i A_j}\|$ sont constants (on dit qu'on a affaire à un système *indéformable*, c'est à dire un solide au sens théorique du terme que l'on définira un peu plus loin), alors et alors seulement :

$$\sum \mathcal{P}_{int} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathcal{P}_{A_i \rightarrow A_j} + \mathcal{P}_{A_j \rightarrow A_i}) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 0 = 0$$

5 Théorème du centre de gravité.

5.a Centre de gravité.

Soit un système de points matériels A_i , de masses m_i . Par définition, le *centre de gravité*, ou *barycentre*, est le point G qui vérifie les deux formules équivalentes :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_i m_i \right) \overrightarrow{OG} = M_{tot} \overrightarrow{OG}$$

On rappelle que cette définition (seconde formulation) est indépendante du choix du point O .

Dans le cas d'une description continue par une masse volumique $\mu(M)$, on définit G ainsi :

$$\iiint \mu(M) \overrightarrow{OM} dV = \left(\iiint \mu(M) dV \right) \overrightarrow{OG} = M_{tot} \overrightarrow{OG}$$

5.b Quantité de mouvement d'un système matériel.

Par définition, la quantité de mouvement du système est la somme des quantités de mouvement de ses points, soit :

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

soit

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \overrightarrow{OA_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} \right) = \frac{d}{dt} (M_{tot} \overrightarrow{OG}) = M_{tot} \vec{v}_G$$

Retenons donc :

$$\boxed{\vec{p}_{tot} = M_{tot} \vec{v}_G}$$

5.c Le théorème.

Soit un système de points matériels A_i , de masses m_i , soumis à l'interaction de points $B_1, B_2, \dots, B_p$ extérieurs au système. Dérivons par rapport au temps la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{tot} = M_{tot} \vec{v}_G = \sum_i \vec{p}_i$$

on tire :

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = M_{tot} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Détaillons

$$\begin{aligned} M_{tot} \frac{d\vec{v}_G}{dt} &= \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{A_j \rightarrow A_i} + \sum_k \vec{F}_{B_k \rightarrow A_i} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\vec{F}_{A_j \rightarrow A_i} + \vec{F}_{A_i \rightarrow A_j}) + \sum_i \sum_k \vec{F}_{B_k \rightarrow A_i} \end{aligned}$$

Le premier terme de l'expression finale est la somme des forces intérieures, il est donc nul (cf supra) ; abrégeons la notation du second :

$$\boxed{M_{tot} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

connu sous le nom de *théorème du centre de gravité* ou encore *théorème de la résultante dynamique*.

5.d Forces de pesanteur.

Soit un système de points matériels A_i , soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme (approximation légitime si la taille du système est négligeable devant le rayon de la terre), la somme des forces de pesanteur est bien évidemment :

$$\sum_i (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \right) \vec{g} = M_{tot} \vec{g}$$

Pour un système matériel qui ne serait soumis qu'aux forces de gravitation dans un champ uniforme, on en déduit que $\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{g}$ et ce, quelque compliqué que soit le système et quelles que soient les conditions initiales. Le théorème du centre de gravité s'avère très efficace même si ses conclusions ne suffisent pas à tout prédire de l'évolution du système.

6 Théorème du moment cinétique.

6.a Théorème du moment cinétique en un point fixe.

Soit un système de points matériels A_i , de masses m_i , soumis à l'interaction de points $B_1, B_2, \dots, B_p$ extérieurs au système. Dérivons par rapport au temps le moment cinétique total, calculé en un point fixe O et défini par :

$$\vec{\sigma}_{tot}(O) = \sum_i \vec{\sigma}_i(O)$$

on tire :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{tot}}{dt}(O) = \sum_i \frac{d\vec{\sigma}_i}{dt}(O) = \sum_i \vec{\mathfrak{M}}_i(O)$$

détaillons

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_{tot}}{dt}(O) &= \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{\mathfrak{M}}_{A_j \rightarrow A_i}(O) + \sum_k \vec{\mathfrak{M}}_{B_k \rightarrow A_i}(O) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\vec{\mathfrak{M}}_{A_j \rightarrow A_i}(O) + \vec{\mathfrak{M}}_{A_i \rightarrow A_j}(O) \right) + \sum_i \sum_k \vec{\mathfrak{M}}_{B_k \rightarrow A_i}(O) \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre représente la somme des moments intérieurs qui est nulle (cf supra) ; abrégeons la notation du second :

si O est fixe, $\frac{d\vec{\sigma}_{tot}}{dt}(O) = \sum \vec{\mathfrak{M}}_{ext}(O)$

connu sous le nom de *théorème du moment cinétique*.

Remarque 1 : par sommation les formules de changement de point pour les moments cinétique et dynamique restent :

$$\vec{\sigma}(M') = \vec{\sigma}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}(M') = \vec{\mathfrak{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{F}$$

Remarque 2 : à la différence de la quantité de mouvement, il n'y a aucune formule donnant une expression du moment cinétique autre que celle qui le définit. Autrement dit, dans le cas général, ce théorème ne sert à RIEN. Par contre, on verra plus loin que, dans le cas du solide, on trouvera une expression utilisable qui permettra de faire de ce théorème un outil puissant. En mécanique des fluides, par contre, on sera obligé de revenir à la mécanique du point par le biais de la « quasi-particule ».

6.b Théorème du moment cinétique par rapport à un axe.

Le théorème du moment cinétique en O s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O) = \vec{\mathfrak{M}}_{ext}(O)$$

Projetons sur Oz en multipliant scalairement par le vecteur constant $\vec{e}_z$, on tire :

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O) \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}(O) \cdot \vec{e}_z) = \vec{\mathfrak{M}}_{ext}(O) \cdot \vec{e}_z$$

On appellera moment cinétique et moment dynamique par rapport à l'axe Oz respectivement les expressions :

$$\begin{aligned} \sigma_{Oz} &= \vec{\sigma}(O) \cdot \vec{e}_z \\ \mathfrak{M}_{ext,Oz} &= \vec{\mathfrak{M}}_{ext}(O) \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où le théorème du moment cinétique par rapport à un axe :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \sigma_{Oz} = \mathfrak{M}_{ext,Oz}}$$

Terminons par la remarque suivante : le choix du point O sur l'axe importe peu, en effet si O' est un autre point de l'axe, on a :

$$\vec{\sigma}(O') = \vec{\sigma}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}$$

Multiplions scalairement par $\vec{e}_z$:

$$\vec{\sigma}(O') \cdot \vec{e}_z = \vec{\sigma}(O) \cdot \vec{e}_z + (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{e}_z = \vec{\sigma}(O) \cdot \vec{e}_z$$

le dernier terme étant nul car $\overrightarrow{O'O} // \vec{e}_z$ ce qui prouve l'assertion précédente (et pour le moment dynamique, la démonstration est identique).

A vrai dire, ce théorème est réducteur car il n'est qu'une seule des trois projections d'un théorème plus général. Je ne le cite uniquement pour qu'on ne m'accuse pas de ne pas l'avoir fait.

6.c Moment des forces de pesanteur.

Le bilan des moments des forces de pesanteur, que le système soit solide ou non est :

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{M}}_{tot}(O) &= \sum_i (\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{g}) = \sum_i (m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{g}) = \\ &= \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \right) \wedge \vec{g} = M_{tot} \overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge M_{tot} \vec{g} \end{aligned}$$

Ce qui signifie que plutôt que faire ce même calcul à chaque fois, il suffit de considérer le poids total comme une force unique $M_{tot} \vec{g}$ appliquée au centre de gravité G ; c'est certes ce qu'on a tendance à faire spontanément, mais en voilà la démonstration rigoureuse, il fallait bien qu'elle fût faite un jour.

7 Théorème de l'énergie cinétique

7.a Enoncé du théorème pour un système.

Soit un système de points matériels A_i , de masses m_i , soumis à l'interaction de points $B_1, B_2, \dots, B_p$ extérieurs au système. Dérivons par rapport au temps l'énergie cinétique totale définie par :

$$E_{cin,tot} = \sum_i E_{cin,i}$$

on tire :

$$\frac{dE_{cin,tot}}{dt} = \sum_i \frac{dE_{cin,i}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

détaillons

$$\frac{dE_{cin,tot}}{dt} = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{P}_{A_j \rightarrow A_i}(O) + \sum_k \mathcal{P}_{B_k \rightarrow A_i}(O) \right)$$

Abrégeons la notation :

$$\boxed{\frac{dE_{cin,tot}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{int} + \sum \mathcal{P}_{ext}}$$

connu sous le nom de *théorème de l'énergie cinétique*.

7.b Energie potentielle de pesanteur.

Soit un système, solide ou non, soumis au champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. La puissance totale des forces de pesanteur est :

$$\mathcal{P}_{pes.} = \sum_i m_i \vec{g} \cdot \vec{v}_i = \vec{g} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{g} \cdot \vec{p}_{tot} = \vec{g} \cdot M_{tot} \vec{v}_G = M_{tot} \vec{g} \cdot \vec{v}_G$$

Là encore, on retrouve le formalisme équivalent d'une force unique $M_{tot} \vec{g}$ appliquée au point G .

Poursuivons :

$$\mathcal{P}_{pes.} = -M_{tot} g \vec{e}_z \cdot \vec{v}_G = -M_{tot} g \frac{dz_G}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{tot} g z_G) = -\frac{dE_{pes.}}{dt}$$

où l'on appelle *énergie potentielle de pesanteur* la quantité $E_{\text{pes.}} = M_{\text{tot}} g z_G$.

Si l'on reporte le résultat précédent dans le théorème de l'énergie cinétique en lui faisant changer de membre, on arrive à :

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{cin,tot}} + E_{\text{pes.}}) = \sum \mathcal{P}_{\text{int}} + \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}^*$$

où $\mathcal{P}_{\text{ext}}^*$ désigne la puissance des forces extérieures, hormis celle de pesanteur.

Généralisons : chaque fois que l'on peut mettre une puissance sous forme de la dérivée temporelle, changée de signe, d'une énergie potentielle, on ajoute celle-ci à l'énergie cinétique pour obtenir l'*énergie mécanique* et l'on supprime bien sûr du second membre la puissance ainsi transformée.

8 Référentiel barycentrique et théorèmes de Kőnig.

8.a Référentiel barycentrique.

Soit un système matériel, repéré dans un référentiel galiléen $Oxyz$ et de centre de gravité G . On appelle *référentiel barycentrique* de ce système le référentiel (a priori non galiléen) $Gxyz$, centré en G et dont les axes sont parallèles à ceux de $Oxyz$. Ce second référentiel est en translation (a priori non uniforme) par rapport au premier ; la vitesse d'entraînement est donc la même en tout point, c'est la vitesse $\vec{v}_G$ du point G dans le référentiel « du laboratoire » et son vecteur rotation par rapport à $Oxyz$ est nul.

Pour tout point A_i du système, on note $\vec{v}_i$ sa vitesse absolue (par rapport à $Oxyz$) et $\vec{v}_i^*$ sa vitesse relative (par rapport à $Gxyz$) ; la loi de composition des vitesses nous apprend que :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$$

que nous allons reporter dans la définition du moment cinétique et de l'énergie cinétique.

Par contre le théorème de la résultante dynamique (théorème du centre de gravité) est si simple tel qu'on le connaît qu'on continuera toujours à l'utiliser sous cette forme simple.

Remarquons toutefois que le calcul qui a conduit dans le référentiel du laboratoire à $\vec{p} = M \vec{v}_G$ conduit à une quantité de mouvement dans le référentiel barycentrique $\vec{p}^* = M \vec{v}_G^*$, or $\vec{v}_G^*$ est bien sûr nulle, d'où $\vec{p}^* = \vec{0}$

Attention, dans ce qui suit, à ne pas croire qu'on cherche à exprimer les théorèmes de la mécanique dans le référentiel non galiléen barycentrique ; la suite montre qu'il ne sert que d'auxiliaire de calcul pour calculer le moment cinétique et l'énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire.

8.b Théorème de Kőnig pour le moment cinétique.

Reportons la loi de composition des vitesses dans le moment cinétique calculé en un point fixe O du référentiel absolu, réputé galiléen :

$$\vec{\sigma}(O) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_G$$

On reconnaît dans le premier terme le moment cinétique calculé avec les vitesses dans le référentiel barycentrique, qu'on note provisoirement $\vec{\sigma}^*(O)$; pour le second, on a :

$$\begin{aligned} \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_G &= \sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{v}_G = \\ &= \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} \right) \wedge \vec{v}_G = M \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_G = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G \end{aligned}$$

Formellement c'est le moment cinétique qu'*aurait* un point matériel concentrant toute la masse (on la note désormais M sans indice) du système en G .

Par ailleurs, la formule de changement de point pour le moment cinétique, appliquée dans le référentiel barycentrique donne :

$$\vec{\sigma}^*(O) = \vec{\sigma}^*(M) + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}^* = \vec{\sigma}^*(M)$$

car $\vec{p}^*$ est nul (cf supra) ; on en déduit que $\vec{\sigma}^*$ ne dépend pas du point de calcul et on ne le mentionne donc plus.

Retenons donc ce *premier théorème (ou formule) de KőNIG*² :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{\sigma}^*}$$

Remarque : cette formule est censée aider au calcul du moment cinétique et le terme $\overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G$ va dans ce sens, mais c'est un leurre ; en effet, si l'on ne sait pas calculer $\vec{\sigma}(O) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i$, on ne saura pas plus calculer $\vec{\sigma}(O) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{v}_i^*$. Dans le cas général, cette formule ne sert elle non plus à RIEN. Par contre dans le cas d'un solide, on pourra s'appuyer sur le fait que G est fixe dans le référentiel barycentrique pour alléger les calculs (cf infra).

8.c Théorème du moment cinétique au centre de gravité.

Le théorème du centre de gravité est valable en un point fixe (disons O) et l'on y a :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O) = \vec{\mathfrak{M}}_{tot,ext}(O)$$

2. physicien allemand, donc on trouve sur la lettre O non pas un tréma mais un « umlaut » .

Reportons-y les formules de changement de points entre O et G :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(O) &= \vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p} \\ \vec{\mathfrak{M}}(O) &= \vec{\mathfrak{M}}(G) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(G) + \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OG} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{\mathfrak{M}}(G) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} \\ \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(G) + \vec{v}_G \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F} &= \vec{\mathfrak{M}}(G) + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

où les termes $\overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}$ des deux membres se simplifient et $\vec{v}_G \wedge \vec{p}$ est nul car ces vecteurs sont parallèles ($\vec{p} = M \vec{v}_G$) donc, en réintroduisant l'indice « extérieur » omis pour alléger l'exposé :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(G) = \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext.}}(G)$$

Ce qui prouve que le théorème du moment cinétique est valable en G , bien que ce point ne soit pas fixe.

Remarquons de plus que si l'on prend $O = G$ dans la formule de KÖNIG (avec $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$), on a : $\vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*$. Retenons donc :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}^* = \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext}}(G) \text{ même si le centre de gravité } G \text{ n'est pas fixe.}$$

Remarque : par projection sur un axe fixe, on retrouve le théorème du moment cinétique par rapport à un axe exactement comme plus haut.

8.d Théorème de Kőnig pour l'énergie cinétique.

Reportons la loi de composition des vitesses dans l'expression de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}E_{\text{cin}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G)^2 = \dots \\ &\dots = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} + \sum_i m_i \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_G^2 = \dots \\ &\dots = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{*2} + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i^* \right) \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_G^2 = \dots \\ &\dots = E_{\text{cin}}^* + \vec{p}^* \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 = E_{\text{cin}}^* + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2\end{aligned}$$

où $\vec{p}^*$ est nul (cf supra) et E_{cin}^* est l'énergie cinétique calculée avec les vitesses dans le référentiel barycentrique. $\frac{1}{2} M \vec{v}_G^2$ est formellement l'énergie cinétique qu'*aurait* un point matériel concentrant toute la masse du système en G .

Retenons donc ce *second théorème (ou formule) de KÖNIG* :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + E_{cin}^*$$

Remarque 1 : Comme pour l'autre formule de KÖNIG et pour les mêmes raisons, ce théorème ne sert à RIEN dans le cas général ; il n'est intéressant que dans le cas d'un solide (cf infra).

Remarque 2 : Compte tenu que $\vec{p}^* = \vec{0}$, on note l'analogie entre les trois formules suivantes où le second membre comporte un terme relatif à toute la masse concentrée en G et un second qui correspond à la grandeur du premier membre mais calculée avec les vitesses barycentriques :

$$\vec{p} = M_{tot} \vec{v}_G + \vec{p}^*$$

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{OG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{\sigma}^*$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + E_{cin}^*$$

9 Champ des vitesses d'un solide.

• Définition d'un solide parfait.

Un système matériel est un *solide parfait* si, quelque soit son mouvement et quels que soient deux points A et B du système, leur distance est constante.

Ce modèle est bien sur en défaut lorsqu'on étudie les déformations sous l'effet de forces (théorie de l'élasticité et propagation d'ondes) ou l'agitation thermique autour d'une position moyenne fixe (thermodynamique) ; néanmoins les écarts au modèle restent faibles, ce qui lui conserve une grande efficacité.

On verra un peu plus loin une remarque thermodynamique qui validera le modèle en présence d'agitation thermique.

• Vecteur rotation.

Soit un référentiel lié au solide représenté par un repère $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, que l'on appellera par la suite référentiel du solide ou référentiel relatif, en mouvement par rapport au référentiel absolu représenté par un repère $\mathcal{R} = Oxyz$.

Pour deux points quelconques A et B du solide, si l'on projette le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur le repère lié au solide, ses composantes sont bien évidemment constantes ; on notera :

$$\overrightarrow{AB} = X_0 \overrightarrow{e_{x'}} + Y_0 \overrightarrow{e_{y'}} + Z_0 \overrightarrow{e_{z'}}$$

avec un indice zéro pour suggérer la valeur constante.

On doit avoir $\|\overrightarrow{AB}\| = Cte$ soit $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = Cte$, d'où en dérivant et simplifiant par le facteur 2 qui apparaît :

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = (X_0 \overrightarrow{e_{x'}} + Y_0 \overrightarrow{e_{y'}} + Z_0 \overrightarrow{e_{z'}}) \cdot \left(X_0 \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + Y_0 \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + Z_0 \frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned} 0 &= X_0^2 \overrightarrow{e_{x'}} \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + Y_0^2 \overrightarrow{e_{y'}} \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + Z_0^2 \overrightarrow{e_{z'}} \frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} + \dots \\ &\dots + X_0 Y_0 \left(\overrightarrow{e_{x'}} \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + \overrightarrow{e_{y'}} \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} \right) + Y_0 Z_0 \left(\overrightarrow{e_{y'}} \frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} + \overrightarrow{e_{z'}} \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} \right) + Z_0 X_0 \left(\overrightarrow{e_{z'}} \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + \overrightarrow{e_{x'}} \frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} \right) \end{aligned}$$

et ceci quels que soient X_0 , Y_0 et Z_0 . Pour cela il faut et il suffit que les six coefficients de X_0^2 , Y_0^2 , Z_0^2 , $X_0 Y_0$, $Y_0 Z_0$ et $Z_0 X_0$ soient tous nuls.

Nous avons donc besoin pour la suite de la dérivée temporelle des vecteurs unitaires de $\mathcal{R}'$ considérés dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ (par rapport à $\mathcal{R}'$, ce serait stupide car ils y sont fixes ! Inutile donc de noter $\mathcal{R}$ en indice.) ; ces dérivées seront données par leurs composantes dans la base vectorielle de $\mathcal{R}'$, car c'est ce qui permettra de dire des choses intéressantes, notons donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} &= \omega_{xx} \overrightarrow{e_{x'}} + \omega_{yx} \overrightarrow{e_{y'}} + \omega_{zx} \overrightarrow{e_{z'}} \\ \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} &= \omega_{xy} \overrightarrow{e_{x'}} + \omega_{yy} \overrightarrow{e_{y'}} + \omega_{zy} \overrightarrow{e_{z'}} \\ \frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt} &= \omega_{xz} \overrightarrow{e_{x'}} + \omega_{yz} \overrightarrow{e_{y'}} + \omega_{zz} \overrightarrow{e_{z'}} \end{aligned}$$

Le coefficient de X_0^2 est nul soit $\overrightarrow{e_{x'}} \cdot \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} = 0$; d'où $\omega_{xx} = 0$ et de même $\omega_{yy} = 0$ et $\omega_{zz} = 0$.

Le coefficient de $X_0 Y_0$ est nul soit $\overrightarrow{e_{x'}} \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + \overrightarrow{e_{y'}} \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} = 0$, d'où $\omega_{yx} + \omega_{xy} = 0$ et de même $\omega_{zx} + \omega_{xz} = 0$ et $\omega_{yz} + \omega_{zy} = 0$.

On peut donc noter $\Omega_1 = \omega_{zy} = -\omega_{yz}$, $\Omega_2 = \omega_{xz} = -\omega_{zx}$ et $\Omega_3 = \omega_{yx} = -\omega_{xy}$.

En reportant dans les expressions des dérivées des vecteurs de la base du référentiel du solide puis celles-ci dans $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = X_0 \frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt} + Y_0 \frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt} + Z_0 \frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}$, on en déduit, en terminant le calcul sous forme matricielle :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = X_0 (\Omega_3 \overrightarrow{e_{y'}} - \Omega_2 \overrightarrow{e_{z'}}) + Y_0 (\Omega_1 \overrightarrow{e_{z'}} - \Omega_3 \overrightarrow{e_{x'}}) + Z_0 (\Omega_2 \overrightarrow{e_{x'}} - \Omega_1 \overrightarrow{e_{y'}})$$

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \Omega_2 Z_0 - \Omega_3 Y_0 \\ \Omega_3 X_0 - \Omega_1 Z_0 \\ \Omega_1 Y_0 - \Omega_2 X_0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} (\overrightarrow{AB})$$

Nous avons donc fait apparaître une matrice antisymétrique qui lie un vecteur fixe dans le référentiel relatif et sa dérivée dans le référentiel absolu. Ce n'est pas très difficile mais lourd à manipuler et encombrant à l'écriture.

Or sur $\mathbb{R}$, on définit le produit vectoriel³ de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ par :

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

définition qui est indépendante⁴ du choix de la base orthonormée directe ; la relation qui suit, démontrée dans la base liée au solide sera valable dans la base du laboratoire.

On peut donc définir le *vecteur rotation du solide* par $\overrightarrow{\Omega} = \Omega_1 \overrightarrow{ex'} + \Omega_2 \overrightarrow{ey'} + \Omega_3 \overrightarrow{ez'}$ et écrire formellement, ce qui remplace avantageusement la notation matricielle :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque 1 : notons que le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ dépend a priori du temps.

Remarque 2 : ce calcul a aussi été mené dans l'étude des changements de référentiel (voir chapitre sur la cinématique du point) ; on généralise aisément (voir au même endroit) que, pour un vecteur variable dans les deux référentiels, sa dérivée dans le référentiel du laboratoire noté $\mathcal{R}$ et celle dans celui du solide $\mathcal{R}'$ sont liées par :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}$$

3. Les principales propriétés du produit vectoriel sont les suivantes :

- il est bilinéaire : d'une part $(\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2}) \wedge \overrightarrow{b} = \lambda_1 (\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{b}) + \lambda_2 (\overrightarrow{a_2} \wedge \overrightarrow{b})$ et d'autre part $\overrightarrow{a} \wedge (\lambda_1 \overrightarrow{b_1} + \lambda_2 \overrightarrow{b_2}) = \lambda_1 (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b_1}) + \lambda_2 (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b_2})$
- il est antisymétrique $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$
- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est nul si et seulement si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont parallèles
- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et à $\overrightarrow{b}$
- $\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| |\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})|$, soit aussi l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$

4. On admettra ; ce n'est pas difficile mais ennuyeux.

Remarque 3 : soit un solide tournant autour d'un axe qu'on choisit comme axe Oz . Le référentiel du laboratoire sera nommé $Oxyz$ et l'on considère un référentiel tournant $OXYz$ lié au solide. On note $\varphi(t)$ l'angle entre Ox et OX . Un point M du solide se projette en H sur Oz . On note r le module (la norme) de $\overrightarrow{HM}$ et l'on note $\overrightarrow{OH} = z \overrightarrow{e}_z$. Le point M décrit manifestement un cercle de centre H de rayon r ; sa vitesse est classiquement :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M) &= r \dot{\theta} \overrightarrow{e}_\theta = r \dot{\theta} \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_r = (\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z) \wedge (r \overrightarrow{e}_r) = \dots \\ &\dots = (\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z) \wedge (r \overrightarrow{e}_r + z \overrightarrow{e}_z) = (\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z) \wedge \overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{0}$. On en déduit pour deux points A et B du solide, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z) \wedge \overrightarrow{OB} - (\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z) \wedge \overrightarrow{OA} = (\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z) \wedge \overrightarrow{AB}$$

ce qui permet d'identifier Ω à $\dot{\theta} \overrightarrow{e}_z$.

• Champ des vitesses.

La relation $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ peut être ainsi reformulée :

$$\forall B \forall A \quad \vec{v}_B - \vec{v}_A = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La conséquence la plus importante est que, pour connaître, à un instant donné, la vitesse de tous les points d'un solide, il suffit de connaître, à ce même instant, la vitesse d'un point particulier ayant si possible une vitesse connue ou aisée à paramétrer, disons le point M , et le vecteur rotation. On lit donc la relation plutôt sous la forme :

$$\forall M' \quad \vec{v}(M') = \vec{v}(M) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$$

Pour une meilleure mémorisation, on peut s'appuyer sur la ressemblance avec les formules de changement de point pour les moments cinétique et dynamique, c'est -à-dire :

$$\sigma(M') = \vec{\sigma}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}(M') = \vec{\mathfrak{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{F}$$

en écrivant plutôt, après un double changement de signe :

$$\boxed{\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{\Omega}}$$

On appelle parfois cette formule, formule de VARIGNON ; en fait la véritable formule de VARIGNON n'est pas exactement celle-là.

Remarque 1 : A un instant t donné, $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$ est nul si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à $\vec{\Omega}$. On en déduit aisément que l'ensemble des points de vitesse nulle, s'il existe, est une droite parallèle à $\vec{\Omega}$. On en déduit en outre qu'il suffit qu'un point ait une vitesse nulle pour que cette droite existe ; on l'appelle alors *axe instantané de rotation*. Il ne faut pas croire que cet axe ainsi défini existe forcément ; un contre exemple simple est celui d'une vis qui progresse parallèlement à son axe en tournant autour de celui-ci. De plus s'il existe, cet axe n'est pas forcément fixe ni par rapport au laboratoire, ni par rapport au référentiel barycentrique, ni par rapport au solide.

Remarque 2 : En introduisant le référentiel barycentrique, la formule fondamentale du champ de vitesse se transforme ainsi :

$$\begin{aligned}\forall B \forall A \quad \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \forall B \forall A \quad \vec{v}_G + \vec{v}_B^* &= \vec{v}_G + \vec{v}_A^* + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \forall B \forall A \quad \vec{v}_B^* &= \vec{v}_A^* + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur rotation est le même dans le référentiel du laboratoire et le référentiel barycentrique ; cela tient au fait que le second est en translation par rapport au premier.

10 Moment cinétique d'un solide. Matrice d'inertie.

• Matrice d'inertie en G , centre de gravité.

Soit un solide en mouvement. Dans le référentiel barycentrique, par définition de celui-ci, le point G est fixe ; on en déduit que pour tout point M du solide $\vec{v}_M^* = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$.

Calculons, dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique du solide. Découpons-le pour cela en volumes élémentaires de masse $dm = \mu(M) dV$, autour du point courant M où la masse volumique, pas forcément homogène, est $\mu(M)$, assimilés à des points matériels. Pour un volume élémentaire, la quantité de mouvement élémentaire est :

$$d\vec{p} = dm \vec{v}(M) = \mu(M) dV \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique est un champ uniforme mais pour en calculer la valeur constante, il est judicieux de se placer en G , centre de gravité. Le moment cinétique élémentaire, calculé en G est :

$$d\vec{\sigma}^* = d\vec{\sigma}^*(G) = \overrightarrow{GM} \wedge d\vec{p} = \mu(M) dV \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$$

On va procéder ensuite par intégration après projection sur une base orthonormée directe ; la logique du référentiel barycentrique voudrait que ce soit sur sa base, identique

à celle du laboratoire. Mais la logique de l'intégration exige que le domaine d'intégration soit indépendant du temps si l'on veut que le résultat soit exploitable. On va donc projeter sur une base liée au solide. Il est toujours déroutant de projeter une grandeur vectorielle définie dans un repère sur les vecteurs de base d'un autre repère, mais c'est tout à fait licite à condition, bien sûr, de ne pas perdre de vue que les vecteurs de la *base de projection* dépendent du temps dans le référentiel d'étude.

Notons donc ici $\vec{e}_X$, $\vec{e}_Y$ et $\vec{e}_Z$ une base orthonormée liée au solide ; pour un point M du solide, notons $\vec{GM} = X \vec{e}_X + Y \vec{e}_Y + Z \vec{e}_Z$ avec X , Y et Z indépendant du temps et notons $\vec{\Omega}(t) = \Omega_X \vec{e}_X + \Omega_Y \vec{e}_Y + \Omega_Z \vec{e}_Z$ avec Ω_X , Ω_Y et Ω_Z dépendant, eux, du temps. Un calcul de routine conduit alors, en notant $\mathcal{V}$ le domaine d'intégration décrivant la forme du solide et en écrivant sous forme de vecteurs-colonnes, à :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* &= \iiint_{\mathcal{V}} d\vec{\sigma}^* = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(M) dV \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \\ \vec{\sigma}^* &= \iiint_{\mathcal{V}} \mu(X, Y, Z) dX dY dZ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right] \\ \vec{\sigma}^* &= \iiint_{\mathcal{V}} \mu(X, Y, Z) dX dY dZ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Z \Omega_Y - Y \Omega_Z \\ X \Omega_Z - Z \Omega_X \\ Y \Omega_X - X \Omega_Y \end{pmatrix} \\ \vec{\sigma}^* &= \iiint_{\mathcal{V}} \mu(X, Y, Z) dX dY dZ \begin{pmatrix} (Y^2 + Z^2) \Omega_X - X Y \Omega_Y - X Z \Omega_Z \\ -X Y \Omega_X + (X^2 + Z^2) \Omega_Y - Y Z \Omega_Z \\ -X Z \Omega_X - Y Z \Omega_Y + (X^2 + Y^2) \Omega_Z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On peut présenter ce résultat de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^* \\ \sigma_Y^* \\ \sigma_Z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX} & J_{XY} & J_{XZ} \\ J_{YX} & J_{YY} & J_{YZ} \\ J_{ZX} & J_{ZY} & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}$$

ou de façon condensée $(\vec{\sigma}^*) = (J) (\vec{\Omega})$ avec :

$$J_{XX} = \iiint_{\mathcal{V}} (Y^2 + Z^2) dm = \iiint_{\mathcal{V}} (Y^2 + Z^2) \mu(X, Y, Z) dX dY dZ \quad \text{et analogues}$$

$$J_{XY} = - \iiint_{\mathcal{V}} X Y dm = - \iiint_{\mathcal{V}} X Y \mu(X, Y, Z) dX dY dZ \quad \text{et analogues}$$

La matrice ainsi définie est la *matrice d'inertie* en G . Ses coefficients diagonaux sont traditionnellement et bien maladroitement ⁵ appelés *moments d'inertie*, J_{XX} , par exemple,

⁵ car il n'y a aucun rapport avec les moments cinétiques et dynamiques qui eux procèdent d'une même logique.

est le moment d'inertie par rapport à l'axe GX et l'on remarquera que $Y^2 + Z^2$ qui apparaît dans sa définition est la distance du point à l'axe GX . Ses termes non diagonaux sont appelés *produits d'inertie*.

La matrice d'inertie est manifestement symétrique et l'on sait qu'une matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée. Chaque fois qu'on le pourra c'est-à-dire s'il n'y a pas une raison supérieure d'en choisir une autre (par exemple l'existence d'un axe fixe autour duquel le solide tournerait), on choisira donc la base orthonormée liée au solide dans laquelle la matrice est diagonale et les trois axes de cette base sont les *axes principaux d'inertie*.

Le fait que la matrice soit calculée dans une base liée au solide, donc a priori mobile par rapport au laboratoire pose évidemment problème, nous y reviendrons un peu plus loin.

• Matrice d'inertie en O , point fixe. Formule de Huyghens.

Le calcul qui précède s'est appuyé sur le fait que dans le référentiel barycentrique, le centre de gravité G a, par construction, une vitesse nulle. Si, dans le référentiel du laboratoire, existe (ce n'est pas toujours le cas, cf supra pour le contre-exemple du mouvement de vissage) un point O de vitesse nulle, on peut reprendre la même étude avec les mêmes conclusions en liant au solide un référentiel $OXYZ$ et définir une matrice d'inertie en ce point liant le moment cinétique calculé en ce point au vecteur rotation. Rigoureusement, on peut procéder ainsi si, à un instant donné, O a une vitesse nulle, mais alors le résultat n'est valable qu'à cet instant ; or le moment cinétique a vocation à être dérivé et ce résultat serait donc sans intérêt. On se place donc ici dans le cas où O est un point fixe de vitesse constamment nulle.

Dans le cas où un solide possède un point fixe O , on peut calculer le moment cinétique en ce point soit directement avec la matrice d'inertie en ce point (indice O) soit indirectement avec le théorème de KÖNIG et la matrice d'inertie au centre de gravité (indice G). Développons en utilisant le champ des vitesses par $\vec{v}(G) = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OG}$ où $\vec{v}(O) = \vec{0}$ et en appelant M la masse du solide :

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{\sigma}^* + \vec{OG} \wedge M \vec{v}_G$$

$$(J_O)(\vec{\Omega}) = (J_G)(\vec{\Omega}) + M \vec{OG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OG})$$

En notant X_G , Y_G et Z_G les composantes de $\vec{OG}$ dans une base $OXYZ$ liée au solide,

on retrouve un calcul déjà effectué plus haut, ce qui permet de ne pas le refaire. On a donc :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} J_{O_{XX}} & J_{O_{XY}} & J_{O_{XZ}} \\ J_{O_{YX}} & J_{O_{YY}} & J_{O_{YZ}} \\ J_{O_{ZX}} & J_{O_{ZY}} & J_{O_{ZZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} = \dots \\
& \dots = \begin{pmatrix} J_{G_{XX}} & J_{G_{XY}} & J_{G_{XZ}} \\ J_{G_{YX}} & J_{G_{YY}} & J_{G_{YZ}} \\ J_{G_{ZX}} & J_{G_{ZY}} & J_{G_{ZZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} \right] \\
& \begin{pmatrix} J_{O_{XX}} & J_{O_{XY}} & J_{O_{XZ}} \\ J_{O_{YX}} & J_{O_{YY}} & J_{O_{YZ}} \\ J_{O_{ZX}} & J_{O_{ZY}} & J_{O_{ZZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} = \dots \\
& \dots = \begin{pmatrix} J_{G_{XX}} & J_{G_{XY}} & J_{G_{XZ}} \\ J_{G_{YX}} & J_{G_{YY}} & J_{G_{YZ}} \\ J_{G_{ZX}} & J_{G_{ZY}} & J_{G_{ZZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} (Y_G^2 + Z_G^2) & -X_G Y_G & -X_G Z_G \\ -X_G Y_G & (X_G^2 + Z_G^2) & -Y_G Z_G \\ -X_G Z_G & -Y_G Z_G & (X_G^2 + Y_G^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit deux types de formules :

- d'une part des formules comme $J_{O_{XX}} = J_{G_{XX}} + M(Y_G^2 + Z_G^2)$ où le dernier terme fait apparaître la distance de G à l'axe OX ou la distance de O à l'axe GX . On remarque au passage que, quelque soit la position du point O , on a $J_{G_{XX}} < J_{O_{XX}}$ mais c'est assez anecdotique. On note plus volontiers J_{OX} et J_{GX} au lieu de $J_{O_{XX}}$ et $J_{G_{XX}}$.
- d'autre part des formules comme $J_{O_{XY}} = J_{G_{XY}} - M X_G Y_G$

Ces formules sont connues sous le nom de *formules de HUYGENS* et montrent que la donnée de la matrice d'inertie en G permet le calcul de la matrice d'inertie en tout autre point.

• Calcul des matrices d'inertie.

Mis à part quelques rares solides homogènes de forme géométrique simple, le calcul par intégration de la matrice d'inertie est impossible, pas plus du reste que le calcul de la masse ou de la position du centre de gravité. De même que la masse d'un solide est une donnée expérimentale que l'on trouve, non par intégration mais par pesage, la matrice d'inertie doit être considérée comme une donnée expérimentale même si la mesure de ses coefficients est bien plus délicate qu'une simple pesée. Les exemples de calcul qui suivent ne sont donnés qu'à titre anecdotique.

Premier exemple : soit une sphère homogène de centre géométrique O confondu avec son centre de gravité G , de masse M et de rayon R donc de volume $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ et de masse volumique $\mu = \frac{M}{V}$. Par symétrie, tous les termes non diagonaux de la matrice d'inertie sont

nuls et les termes diagonaux sont égaux. On se convainc aisément par symétrie que :

$$\begin{aligned} J &= J_{OX} = J_{OY} = J_{OZ} = \iiint_{\mathcal{V}} (Y^2 + Z^2) \, dm = \iiint_{\mathcal{V}} (Z^2 + X^2) \, dm = \iiint_{\mathcal{V}} (X^2 + Y^2) \, dm = \dots \\ \dots &= 2 \iiint_{\mathcal{V}} X^2 \, dm = 2 \iiint_{\mathcal{V}} Y^2 \, dm = 2 \iiint_{\mathcal{V}} Z^2 \, dm = \frac{2}{3} \iiint_{\mathcal{V}} (X^2 + Y^2 + Z^2) \, dm \end{aligned}$$

En passant en coordonnées sphériques

$$J = \frac{2}{3} \iiint_{\mathcal{V}} r^2 \, dm = \frac{2}{3} \int_0^R r^2 \mu 4\pi r^2 \, dr = \frac{8\pi\mu R^5}{15} = \frac{2}{5} M R^2$$

Second exemple : soit un cylindre homogène de centre O confondu avec son centre de gravité G , d'axe OZ , de rayon R , de hauteur H , de masse M et donc de volume $V = \pi R^2 H$ de masse volumique $\mu = \frac{M}{V}$. Par symétrie, tous les termes non diagonaux de la matrice d'inertie sont nuls. En passant en coordonnées cylindriques, on a :

$$J_{OZ} = \iiint_{\mathcal{V}} (X^2 + Y^2) \, dm = \int_0^R r^2 \mu 2\pi r \, dr H = \frac{2\pi\mu R^4 H}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

On a donc par symétrie :

$$\iiint_{\mathcal{V}} X^2 \, dm = \iiint_{\mathcal{V}} Y^2 \, dm = \frac{1}{2} J_{OZ} = \frac{1}{4} M R^2$$

Par ailleurs :

$$\iiint_{\mathcal{V}} Z^2 \, dm = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} Z^2 \mu \pi R^2 \, dZ = \frac{\pi\mu R^2 H^3}{12} = \frac{1}{12} M H^2$$

et donc

$$J_{OX} = J_{OY} = \iiint_{\mathcal{V}} (Y^2 + Z^2) \, dm = \iiint_{\mathcal{V}} (Z^2 + X^2) \, dm = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M H^2$$

Dans le cas du cylindre avec $R \ll H$ (on parle alors de tige mince), on a $J_{OZ} = 0$ et $J_{OX} = J_{OY} = \frac{1}{12} M H^2$.

• moment cinétique en mécanique du point et en mécanique du solide.

On insiste lourdement sur le fait que pour un point matériel, $\vec{\sigma}(O)$ se calcule par $\vec{OM} \wedge (m \vec{v})$ et pour un solide, par le produit matriciel de la matrice d'inertie et du vecteur rotation ; ces deux démarches sont fondamentalement différentes. La mécanique du point et celle du solide demandent des automatismes de pensée dictincts qu'il convient de ne pas confondre.

11 Energie cinétique d'un solide.

• Cas général.

Sauf cas particulier, on passe par la seconde formule de KÖNIG, $E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + E_{cin}^*$ où $E_{cin}^* = \frac{1}{2} \iiint dm \vec{v}^*(M)^2$ et $\vec{v}^*(M) = \vec{v}^*(G) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$ avec $\vec{v}^*(G) = \vec{0}$ que l'on utilise, suprême astuce, qu'une seule fois ; d'où, en utilisant les propriétés du produit mixte et en reconnaissant l'expression du moment cinétique barycentrique :

$$\begin{aligned} E_{cin}^* &= \frac{1}{2} \iiint dm v^*(M)^2 = \frac{1}{2} \iiint dm \vec{v}^*(M) \cdot \vec{v}^*(M) = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} \iiint dm \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM} \right) \cdot \vec{v}^*(M) = \frac{1}{2} \iiint \vec{\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{GM} \wedge dm \vec{v}^*(M) \right) = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \iiint \left(\overrightarrow{GM} \wedge dm \vec{v}^*(M) \right) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}^* \end{aligned}$$

En repassant en notation matricielle, on fait apparaître une forme quadratique :

$$E_{cin}^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Omega_X & \Omega_Y & \Omega_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{XX} & J_{XY} & J_{XZ} \\ J_{YX} & J_{YY} & J_{YZ} \\ J_{ZX} & J_{ZY} & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}$$

ou de façon condensée $E_{cin}^* = \frac{1}{2} {}^t(\vec{\Omega})(J_G)(\vec{\Omega})$. Finalement :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} {}^t(\vec{\Omega})(J_G)(\vec{\Omega})$$

• Cas particulier où il existe un point fixe.

En partant cette fois de $\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec $\vec{v}(O) = \vec{0}$, la même démonstration conduit à :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} {}^t(\vec{\Omega})(J_O)(\vec{\Omega})$$

Mais attention à bien utiliser la matrice d'inertie calculée en O et à ne surtout pas ajouter $\frac{1}{2} M \vec{v}_G^2$ car on n'est pas passé par la formule de KÖNIG. On rencontre trop souvent une confusion entre les deux approches qui sont du reste toutes les deux possibles dans le cas où existe un point fixe.

12 Adaptation des théorèmes de la mécanique des systèmes à celle des solides.

12.a Remarque initiale.

En mécanique du point, on n'a qu'une inconnue vectorielle, la vitesse du point et il suffit d'une équation vectorielle pour résoudre un problème, le théorème du centre de gravité OU celui du moment cinétique.

En mécanique des fluides, on a une infinité d'inconnues (voir le ou les chapitres qui lui sont consacrés), les vitesses de toutes les quasi-particules et il faut une infinité d'équations, la formule d'EULER appliquée à chacune des quasi-particules. De facto, on se ramène donc à la mécanique du point.

En mécanique des solides, le champ des vitesses est tel qu'il suffit de connaître la vitesse d'un point et le vecteur rotation pour connaître la vitesse de tous les points ; il n'y a donc que deux inconnues vectorielles et il faut deux équations vectorielles pour résoudre un problème, le théorème du centre de gravité ET celui du moment cinétique.

12.b Théorème du centre de gravité.

Le théorème du centre de gravité $M_{tot} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ est tellement concis qu'on ne peut espérer une forme encore plus simple et c'est donc sous cette forme qu'on l'utilise en mécanique du solide.

12.c Théorème du moment cinétique.

Le théorème du moment cinétique est valable au centre de gravité dans tous les cas ; il affirme (cf supra) que :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right|_{\text{bar.}} = \vec{\mathfrak{M}}(G)$$

et par ailleurs dans un référentiel lié au solide on a $(\vec{\sigma}^*) = (J_G)(\vec{\Omega})$ où la matrice est une donnée expérimentale du problème (cf supra). Le problème réside dans la dérivation du moment cinétique. Dans la base vectorielle liée au solide et où la matrice est fixe, on a

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right|_{\text{sol.}} = (J_G) \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)$$

et en utilisant la remarque 2 du paragraphe sur le vecteur rotation on a aussi :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right|_{\text{bar.}} = \left. \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right|_{\text{sol.}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}^*$$

En effectuant la synthèse de tout cela, le théorème s'écrit donc :

$$(J_G) \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right) + \vec{\Omega} \wedge [(J_G)(\vec{\Omega})] = \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext.}}(G)$$

où il ne faudra pas perdre de vue que le premier membre sera calculé dans une base vectorielle mobile liée au solide.

L'utilisation de ce théorème sera étudiée dans le chapitre suivant consacré à la mécanique du solide.

Dans le cas particulier où le solide possède un point fixe noté O , on peut utiliser le théorème en O dans le référentiel du laboratoire et la matrice d'inertie en O , on arrive alors de la même façon à :

$$(J_O) \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right) + \vec{\Omega} \wedge [(J_O)(\vec{\Omega})] = \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext.}}(O)$$

où, là non plus, il ne faudra pas perdre de vue que le premier terme sera calculé dans une base vectorielle mobile liée au solide.

Remarque : l'adaptation de théorème du moment cinétique par rapport à un axe n'est pertinente que dans certains cas particuliers, nous les aborderons dans le prochain chapitre.

12.d Théorème de l'énergie cinétique.

Le point important et simplificateur est que le solide est un système indéformable par définition et donc que la puissance des forces intérieures est nulle. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dE_{\text{cin}}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext.}}$$

où il suffit de reporter l'expression de l'énergie cinétique d'un solide.

On peut remarquer dès à présent que c'est une équation scalaire et qu'elle ne peut pas ni seule ni avec l'un des deux théorèmes précédents résoudre un problème où il y a a priori deux inconnues vectorielles. Toutefois, dans un grand nombre de cas particuliers, son utilisation dans un premier temps abrège la résolution du problème.

L'utilisation de ce théorème sera détaillée dans le chapitre suivant consacré à la mécanique du solide.

13 Notion de torseur.

13.a Définitions.

- **Torseur, relation fondamentale.**

Le moment cinétique, le moment dynamique et le champ des vitesses d'un solide sont des champs qui vérifient respectivement :

$$\vec{\sigma}(M') = \vec{\sigma}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}(M') = \vec{\mathfrak{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{\Omega}$$

On appellera plus généralement *torseur* la donnée conjointe d'un vecteur $\vec{V}$ appelé *résultante du torseur* et d'un champ vectoriel $\vec{\mathcal{M}}$ appelé *moment du torseur* vérifiant :

$$\forall M' \quad \forall M \quad \vec{\mathcal{M}}(M') = \vec{\mathcal{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V}$$

On note dans ce cours un tel torseur $[\vec{V}, \vec{\mathcal{M}}]$ et, en mécanique des solides, $[\vec{p}, \vec{\sigma}]$, $[\vec{F}, \vec{\mathfrak{M}}]$ et $[\vec{\Omega}, \vec{v}]$ sont des torseurs, respectivement le *torseur cinétique*, le *torseur dynamique* et le *torseur des vitesses*.

- **Additions de torseurs.**

Soit des torseurs $[\vec{V}_i, \vec{\mathcal{M}}_i]$, par addition des formules fondamentales, on a :

$$\forall M' \quad \forall M \quad \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(M') = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \sum_i \vec{V}_i$$

ce qui prouve que $[\sum_i \vec{V}_i, \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i]$ est un torseur appelé somme des torseurs.

- **Dérivée temporelle d'un torseur.**

Un torseur dépendant du temps est la donnée conjointe d'un vecteur $\vec{V}(t)$ et d'un champ vectoriel $\vec{\mathcal{M}}(t)$ vérifiant :

$$\forall t \quad \forall M' \quad \forall M \quad \vec{\mathcal{M}}(M', t) = \vec{\mathcal{M}}(M, t) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V}(t)$$

On note dans ce cours un tel torseur $[\vec{V}(t), \vec{\mathcal{M}}(t)]$.

Si l'on dérive par rapport au temps la relation fondamentale, on tire :

$$\forall t \quad \forall M' \quad \forall M \quad \left. \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}}{\partial t} \right|_{(M',t)} = \left. \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}}{\partial t} \right|_{(M,t)} + \overrightarrow{M'M} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Par définition la dérivée temporelle $\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt}$ d'un champ $\vec{\mathcal{M}}$ est définie par :

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt}(M, t) = \left. \frac{\partial \vec{\mathcal{M}}}{\partial t} \right|_{(M,t)}$$

et l'on a donc :

$$\forall t \quad \forall M' \quad \forall M \quad \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt}(M', t) = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt}(M, t) + \overrightarrow{M'M} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

ce qui prouve que $\left[\frac{d\vec{V}}{dt}, \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} \right]$ est un torseur qu'on appelle dérivée temporelle du torseur $[\vec{V}(t), \vec{\mathcal{M}}(t)]$ et que l'on note $\frac{d}{dt} [\vec{V}, \vec{\mathcal{M}}]$.

• Produit scalaire de torseurs

Soient deux torseurs $[\vec{V}_1, \vec{\mathcal{M}}_1]$ et $[\vec{V}_2, \vec{\mathcal{M}}_2]$ et considérons le champ scalaire P qui à tout M associe $\vec{V}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(M) + \vec{V}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(M)$; la formule de changement de point permet d'affirmer que :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(M') + \vec{V}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(M') &= \dots \\ &= \vec{V}_1 \cdot \left(\vec{\mathcal{M}}_2(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V}_2 \right) + \vec{V}_2 \cdot \left(\vec{\mathcal{M}}_1(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V}_1 \right) = \dots \\ &= \vec{V}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(M) + \vec{V}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(M) + \vec{V}_1 \cdot \left(\overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V}_2 \right) + \vec{V}_2 \cdot \left(\overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V}_1 \right) = \dots \\ &= \vec{V}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(M) + \vec{V}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(M) \end{aligned}$$

où l'antisymétrie du produit mixte permet la simplification finale; le champ ainsi construit est donc un champ scalaire constant que l'on peut identifier à sa valeur scalaire appelée produit scalaire des deux torseurs, noté $[\vec{V}_1, \vec{\mathcal{M}}_1] \cdot [\vec{V}_2, \vec{\mathcal{M}}_2]$.

L'intérêt de cette notion apparaîtra un peu plus loin.

13.b Formulation torsielle des théorèmes de la mécanique des systèmes.

On peut donc regrouper le théorème du centre de gravité et celui du moment en un théorème torsoriel⁶ :

$$\frac{d}{dt} [\vec{p}, \vec{\sigma}] = [\vec{F}_{\text{ext.}}, \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext.}}]$$

C'est concis et élégant, mais ne change pas fondamentalement l'utilisation des théorèmes mécaniques. L'intérêt essentiel de la notion de torseur réside dans la modélisation des interactions, on y vient sous peu. Le théorème est valable pour les systèmes, mais en pratique, on ne l'utilise que pour des solides.

13.c Force localisée.

La mécanique des systèmes et des solides a été construite à partir de la mécanique du point. Soit un point A d'un système ou d'un solide et $\vec{F}_A$ la somme des forces qu'exerce l'extérieur du système sur le point A ; la mécanique du point définit le moment calculé en M de la force $\vec{F}_A$ appliquée à A par :

$$\vec{\mathfrak{M}}_A(M) = \vec{MA} \wedge \vec{F}_A$$

qui vérifie par construction la formule de changement de point, ce qui donne à $[\vec{F}_A, \vec{\mathfrak{M}}_A]$ une structure de torseur. Ce type de torseur est appelée *force localisée en A*.

Remarquons qu'en particulier $\vec{\mathfrak{M}}_A(A) = \vec{0}$. Si le point A fait partie d'un solide, on peut en profiter pour formuler comme suit la puissance exercée sur le point A :

$$\mathcal{P}_A = \vec{F}_A \cdot \vec{v}(A) = \vec{F}_A \cdot \vec{v}(A) + 0 = \vec{F}_A \cdot \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \cdot \vec{0} = \vec{F}_A \cdot \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}_A(A)$$

qui est le produit scalaire du torseur $[\vec{F}_A, \vec{\mathfrak{M}}_A]$ et du torseur des vitesses du solide $[\vec{\Omega}, \vec{v}]$.

13.d Formulation torsielle du théorème de l'énergie pour un solide.

Par additivité des puissances sur les différents points d'indice i d'un même solide, la puissance des forces extérieures sur un solide est donc :

$$\frac{dE_{\text{cin}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext.}} = \sum_i [\vec{F}_i, \vec{\mathfrak{M}}_i] \cdot [\vec{\Omega}, \vec{v}] = \left[\sum_i \vec{F}_i, \sum_i \vec{\mathfrak{M}}_i \right] \cdot [\vec{\Omega}, \vec{v}] = [\vec{F}_{\text{ext.}}, \vec{\mathfrak{M}}_{\text{ext.}}] \cdot [\vec{\Omega}, \vec{v}]$$

6. Torsoriel est l'adjectif correspondant à torseur, comme vectoriel correspond à vecteur.

ce qui prouve que pour les trois théorèmes de la mécanique la seule donnée du torseur des interactions extérieures suffit.

Pour décrire l'interaction d'un solide avec son extérieur ou une partie de son extérieur, même si elle résulte d'innombrables interaction entre points, on peut toujours se ramener à un torseur qui en rende compte de façon globale.

13.e Notion de couple. Réduction d'un torseur.

• Notion de couple.

Soit un torseur obtenu par sommation de forces localisées élémentaires. On dit qu'on a affaire à un *couple* si cet ensemble de forces a une résultante nulle, c'est-à-dire si l'on a $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$.

La formule de changement de point des moments dynamique donne alors :

$$\vec{\mathfrak{M}}(M') = \vec{\mathfrak{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{F} = \vec{\mathfrak{M}}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{0} = \vec{\mathfrak{M}}(M)$$

ce qui signifie que le moment dynamique ne dépend pas du point de calcul, on ne précise donc plus celui-ci ; l'usage est de noter plutôt $\vec{\Gamma}$ un moment dynamique indépendant du point de calcul et l'on parle du *couple* $\vec{\Gamma}$ qui sous-entend le torseur $\left[\vec{0}, \vec{\Gamma} \right]$.

• Puissance d'un couple appliqué à un solide.

La puissance de cet ensemble de forces est (cf supra) :

$$\mathcal{P} = \left[\vec{0}, \vec{\mathfrak{M}} \right] \cdot \left[\vec{\Omega}, \vec{v} \right]$$

Choisissons un point O arbitraire pour effectuer ce produit scalaire :

$$\mathcal{P} = \vec{0} \cdot \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathfrak{M}}(O) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Gamma}$$

car $\vec{\mathfrak{M}}$ est un champ uniforme de valeur $\vec{\Gamma}$.

• Bilan pratique.

Retenons que pour un couple $\vec{\Gamma}$ appliqué à un solide de vecteur rotation $\vec{\Omega}$

- la résultante des forces de liaison est nulle,
- le moment des forces de liaison est $\vec{\Gamma}$, quel que soit le point de calcul,
- la puissance est $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$.

• **Réduction d'un torseur.**

Soit un torseur $[\vec{F}, \vec{\mathfrak{M}}]$ représentant une interaction quelconque exercée sur un solide par l'extérieur ou une partie de l'extérieur. Soit un point O arbitraire mais, en pratique, choisi de façon pertinente compte tenu des particularités du problème étudié. Le champ de moment a, en ce point, une valeur $\vec{\mathfrak{M}}(O)$ que nous rebaptiserons $\vec{\Gamma}$.

Considérons les deux torseurs suivants

- une force $\vec{F}$ localisée au point O , soit le torseur $[\vec{F}, \vec{\mathfrak{M}}_O]$ dont le champ de moment a, en O , une valeur nulle $\vec{\mathfrak{M}}_O(O) = \vec{0}$
- un couple de valeur $\vec{\Gamma}$, soit le torseur $[\vec{0}, \vec{\Gamma}]$ dont le champ de moment a, en tout point, en particulier en O , la valeur $\vec{\Gamma} = \vec{\mathfrak{M}}(O)$

La somme de ces deux torseurs a une résultante $\vec{F} + \vec{0} = \vec{F}$ et un moment $\vec{\mathfrak{M}}_O + \vec{\Gamma}$ dont la valeur en O est $\vec{\mathfrak{M}}_O(O) + \vec{\Gamma} = \vec{0} + \vec{\mathfrak{M}}(O) = \vec{\mathfrak{M}}(O)$ ce qui suffit à prouver que l'on retrouve le torseur de départ ; en effet la formule de changement de point montre que deux torseurs sont égaux s'ils ont la même résultante et si, en un point, leurs moments sont égaux.

La conclusion est que toute interaction peut être décrite comme somme d'une force localisée et d'un couple et c'est là le principal intérêt de la théorie des torseurs.

14 Mécanique du solide et thermodynamique.

Nous suggérons à notre fidèle lecteur de se replonger dans le chapitre traitant du premier principe de la thermodynamique avant d'aborder ce paragraphe. Pour lui éviter des jongleries entre deux chapitres après cette relecture, nous en résumons l'esprit.

Soit un solide réel dont les atomes vibrent par agitation thermique autour des positions d'équilibre qui constituent un solide parfait qui sert de squelette au solide réel. La thermodynamique découpe tacitement la matière en volumes petits à notre échelle et grands à l'échelle atomique et y définit des valeurs moyennes dites macroscopiques de vitesses et de forces ; ce choix gomme les fluctuations de l'agitation thermique et les valeurs macroscopiques se confondent donc avec les valeurs prédites par le modèle du solide parfait.

Le théorème de l'énergie mécanique utilisé avec les vraies vitesses et vraies forces, toutes deux qualifiées de microscopiques donne quelque chose comme :

$$dE_{\text{cin., micro.}} + dE_{\text{pot.}} = \delta W_{\text{micro.}}$$

On affecte d'un indice désignant l'agitation thermique la différence entre une grandeur calculée à partir de valeurs microscopiques et la même grandeur calculée à partir des valeurs moyennes macroscopiques ; on peut donc réécrire ainsi la relation précédente :

$$dE_{\text{cin., macro.}} + dE_{\text{cin., therm.}} + dE_{\text{pot.}} = \delta W_{\text{macro., ext.}} + \delta W_{\text{therm.}}$$

On rebaptise échange thermique δQ le terme correctif $\delta W_{\text{therm.}}$ et l'on appelle énergie interne U la somme $E_{\text{cin., therm.}} + E_{\text{pot.}}$; on arrive donc au premier principe, en escamotant les indices « macro. » :

$$dE_{\text{cin.}} + dU = \delta W_{\text{ext.}} + \delta Q$$

Par identification entre valeurs macroscopiques et valeurs prédites par le modèle du solide parfait (cf supra), le théorème de l'énergie mécanique établi dans ce chapitre revient à dire que :

$$dE_{\text{cin.}} = \delta W_{\text{ext.}}$$

d'où l'on déduit par différence :

$$dU = \delta Q$$

Il y a donc un parfait découplage entre la mécanique du solide parfait qui affirme que $dE_{\text{cin.}} = \delta W_{\text{ext.}}$ et la thermodynamique qui affirme que pour un solide, incompressible par nature, ce qui entraîne un travail nul des forces de pression, $dU = \delta Q$. Avouons que ce découplage nous simplifie bien la vie.

15 En guise de conclusion.

Nous n'avons ici fait que justifier les théorèmes utilisés en mécanique du solide et nous les utiliserons sans démonstration dans le chapitre suivant traitant de la mécanique du solide. Il est en effet sain que ne soient pas mélangées la justification des outils et leur utilisation car la problématique en est totalement différente.