Géométrie
Coniques & quadriques *

26 mars 2009

Ce chapitre est une étude rapide des coniques et des quadriques définies à partir de leurs équations générales .

Table des matières

---

*Geom3ConiquesQuadr.teX — ceci est un dvi2pdf

1 Des coniques

1.1 Equations générale d'une conique dans un espace affine euclidien

definition 1 On appelle conique du plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé $(O, \mathcal{B})$, une courbe dont l'équation est de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{1.1}$$

On peut écrire une équation du type (1.1) sous la forme :

$$^tX\ A\ X +^t L\ X + h = 0. \tag{1.2}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0. \tag{1.3}$$

Théorème 1 *coniques à centre*
Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $\phi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.
Posons $\mathcal{Q}(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Alors

– pour tout point (x_0, y_0), on a :

$$\phi(x_0 + X, y_0 + Y) = \mathcal{Q}(X, Y) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0)\, X + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0)\, Y + \phi(x_0, y_0);$$

– la conique $\mathcal{C}$ admet (x_0, y_0) pour centre de symétrie ssi

$$grad(\phi)(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Un tel point, s'il existe est unique.

Théorème 2 *réduction*
Soit, dans E rapporté à un repère orthonormé (O, i, j), la conique $\mathcal{C}$ d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

On note λ et μ les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

– Dans un repère orthonormé (O, u, v) dans lequel u et v sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ et μ, l'équation de $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + gX + hY + f = 0. \tag{1.4}$$

– Si $\lambda\mu \neq 0$, il existe $\Omega \in E$, tel que dans le repère (Ω, u, v)

$$\lambda X_1^2 + \mu Y_1^2 + \gamma = 0. \tag{1.5}$$

Théorème 3 *nature géométrique de la conique*
Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + gX + hY + f = 0.$$

• si les valeurs propres λ et μ vérifient $\lambda\mu > 0$, $\mathcal{C}$ est soit une ellipse, soit un singleton (si $\gamma = 0$), soit $\emptyset$.
• si les valeurs propres λ et μ vérifient $\lambda\mu < 0$, $\mathcal{C}$ est soit une hyperbole, soit la réunion de deux droites sécantes en Ω(si $\gamma = 0$.)
• si une des valeurs propres est nulle, la courbe est soit une parabole, soit la réunion de deux droites parallèles, soit une droite, soit $\emptyset$.

1.2 Propriétés géométriques des coniques

Conique C de foyer F, de directrice (D), d'excentricité (e). On note d = dist(F, (D)) > 0.

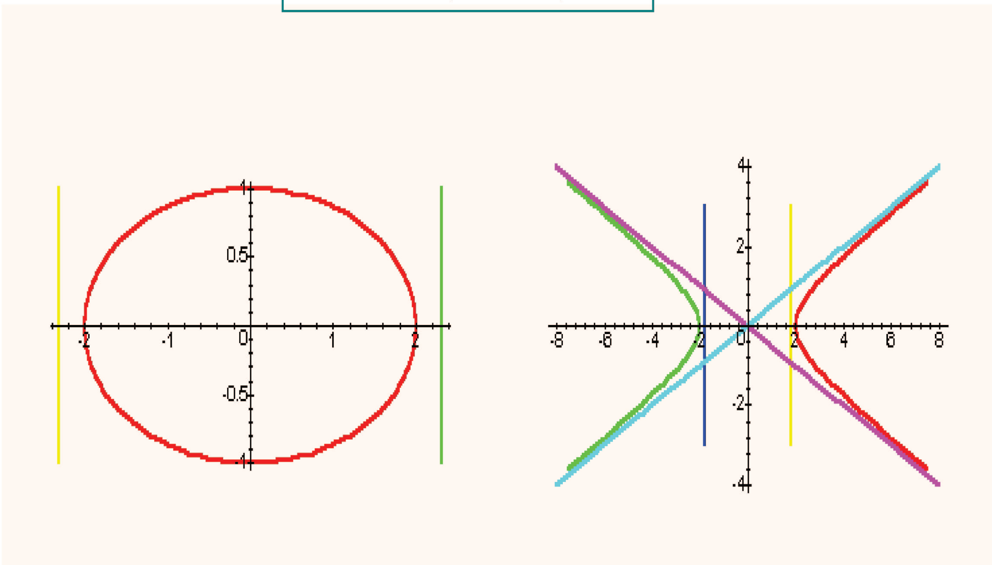
définition monofocale de la conique: $\boxed{M \in C \text{ ssi } MF = e.\text{dist}(M,D)}$

Nature de la conique	**Ellipse** (e < 1)	**Hyperbole** (e > 1)	**Parabole** (e = 1)
équation polaire: **r = MF et** $\theta = \left(\vec{u}, \vec{FM}\right)$	$r = \dfrac{ed}{1+e\cos\vartheta} = \dfrac{p}{1+e\cos\vartheta}$	$r = \dfrac{ed}{1+e\cos\vartheta} = \dfrac{p}{1+e\cos\vartheta}$	$r = \dfrac{ed}{1+\cos\vartheta} = \dfrac{p}{1+\cos\vartheta}$
repére: (Ω, ΩX,ΩY) **(ΩX) est l'axe focal.** $\boxed{c = \Omega F}$	Ω, centre de symétrie. ΩX grand axe, ΩY, petit axe . $c = \dfrac{e^2 d}{1-e^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = ae.$	Ω, centre de symétrie. ΩX axe transverse (focal) . $c = \left\|\dfrac{e^2 d}{1-e^2}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = ae.$	Ω, sommet . ΩY, axe de symétrie et axe focal.
équation réduite	$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \; (a > b > 0)$ $a^2 = \left(\dfrac{ed}{1-e^2}\right)^2, b^2 = \left\|\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}\right\|$	$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \; (a,\ b > 0)$ $a^2 = \left(\dfrac{ed}{1-e^2}\right)^2, b^2 = \left\|\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}\right\|$	$y^2 = 2d\,x = px.$
foyers et directrices	$F\begin{pmatrix}\pm c\\0\end{pmatrix}$ et $D(X = \pm\dfrac{a^2}{c})$	$F\begin{pmatrix}\pm c\\0\end{pmatrix}$ et $D(X = \pm\dfrac{a^2}{c})$	$F\begin{pmatrix}d\\0\end{pmatrix}$, D (X = -d)
Sommets **(et asymptotes si e > 1)**	$A\begin{pmatrix}\pm a\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\\pm b\end{pmatrix}$	$\mathbf{S}\begin{pmatrix}\pm a\\0\end{pmatrix}$, $\Delta\,(bX \pm aY = 0)$	Ω

<u>définitions bifocales:</u>

ellipse: $MF + MF' = 2a$

hyperbole: $|MF - MF'| = 2a$



f

<u>Exercice 1:</u> Que sont les courbes d'équations respectives:
$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$;
$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2(1+\sqrt{3})x + - 2(1+\sqrt{3})y + 2 = 0$

<u>Exercice 2:</u> On se donne e > 0 et différent de 1, ainsi que deux points distincts M et F. <u>Lieu</u> des centres des coniques de foyer F, d'excentricité e et passant par M?

<u>Exercice 3</u>: Quelle est la courbe définie paramétriquement par: $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$?

<u>Exercice 4</u>: Quelle est la courbe définie paramétriquement par: $\begin{cases} x = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\cos t + \sin t \\ y = \cos t - \sin t \end{cases}$

1.3 Exercices

Exercice 1 Étudier la conique d'équation

$$108x^2 + 312xy + 17y^2 - 840x - 280y - 100 = 0.$$

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}$ d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

1. On suppose $b \neq 0$. Déterminer l'angle de la rotation qui transforme la base dans laquelle cette équation est écrite en une BON de vecteurs propres (calculer la tangente).
2. Étudier la conique d'équation

$$1/2x^2 + 3\sqrt{2}xy + 1/2y^2 + x - 1 = 0.$$

Exercice 3 *paramétrisation rationnelle d'une hyperbole*
Soit $\mathcal{H}$, l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

1. Intersection de $\mathcal{H}$ et de la droite d'équation $y = mx + b$.
2. Soit Δ_m, la droite passant par $A'(-1, 0)$ de pente m. Déterminer l'intersection de Δ et de $\mathcal{H}$, en déduire une paramétrisation rationnelle de l'hyperbole.

Exercice 4 *Que pensez vous de ces définitions du (petit ?) Littré*
Parabole :
Allégorie qui renferme quelque vérité importante. Parabole de l'enfant prodigue.
Courbe plane du second degré présentant une double branche infinie ; elle résulte de la section d'un cône par un plan parallèle à son côté.

Hyperbole :
Figure de rhétorique qui consiste à augmenter ou à diminuer excessivement la vérité des choses pour produire plus d'impression.
Math. Courbe telle qu'en menant d'un quelconque de ses points des rayons à deux points fixes nommés foyers, la différence de ces rayons est toujours la même.

Ellipse :
Gramm. Figure par laquelle on retranche quelque mot dans une phrase.
Géom. Courbe résultant de la section d'un cône droit par un plan oblique à l'axe ; c'est un cercle allongé.
Raccourci dans l'expression d'un raisonnement.

Exercice 5 *Centrale (avec MAPLE)*
Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Trouver toutes les hyperboles équilatères (*i.e :* les asymptotes sont orthogonales), passant par les trois points

$$A = (-3 - 1),\ B = (1, 4),\ C = (5, 1)$$

2. Montrer qu'elles passent par un même $4^{ième}$ point.
3. Déterminer l'ensemble des centres de ces hyperboles.

correction

1. On écrit l'équation générale d'un hyperbole équilatère :

$$ax^2 + 2\,bxy - ay^2 + dx + ey + f = 0,$$

ce qui en substituant les coordonnées des points à x et y, conduit au système :

$$\begin{cases} 8\,a + 6\,b - 3\,d - e + f = 0 \\ -15\,a + 8\,b + d + 4\,e + f = 0 \\ 24\,a + 10\,b + 5\,d + e + f = 0 \end{cases}$$

dont les solutions vérifient :

$$d = -\frac{63}{16}\,a - 1/2\,b, f = -\frac{193}{16}\,a - 15/2\,b, e = \frac{31}{4}\,a,$$

ce qui donne :

$$ax^2 + 2\,bxy - ay^2 + \left(-\frac{63}{16}\,a - 1/2\,b\right)x + \frac{31}{4}\,ay - \frac{193}{16}\,a - 15/2\,b = 0.$$

2. En remplaçant le couple (a, b) par $(0, 1)$ puis par $(1, 0)$ on obtient :

$$\left\{x = \frac{15}{16}, y = \frac{17}{4}\right\}, \{x = 1, y = 4\}, \{x = 5, y = 1\}, \{x = -3, y = -1\},$$

d'où le $4^{ième}$ point.

3. La substitution $x = x1 + \alpha, y = y1 + \beta$, conduit au système

$$\begin{cases} -\frac{63}{16}\,a - 1/2\,b + 2\,b\beta + 2\,a\alpha = 0 \\ \frac{31}{4}\,a - 2\,a\beta + 2\,b\alpha = 0 \end{cases}.$$

Le centre a pour coordonnées :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{32}\,\frac{(63\,a^2 - 116\,ab)}{a^2 + b^2} \\ \\ \beta = \frac{1}{32}\,\frac{124\,a^2 + 63\,ab + 8\,b^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

La forme des expressions suggère fortement de poser :

$$a = \cos(\theta),\ b = \sin(\theta).$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} \frac{63}{32}\,(\cos(\theta))^2 - \frac{29}{8}\,\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \\ \frac{29}{8}\,(\cos(\theta))^2 + \frac{63}{32}\,\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{63}{64} & \frac{-29}{16} \\ \\ \frac{29}{16} & \frac{63}{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\theta) \\ \\ \sin(2\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{63}{64} \\ \\ \frac{33}{16} \end{bmatrix}$$

Les centres décrivent donc un cercle de centre $\Omega = [63/64, 33/16]$, de rayon $R = \frac{5}{64}\sqrt{697}$.

2 Des quadriques

Partant d'une équation dans un repère quelconque, nous savons après réduction, à classer les coniques, déterminer leurs éléments géométriques. De la même façon nous allons ici entreprendre la réduction d'équations de la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + \alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon = 0$$

et classer les quadriques.

2.1 Equation générale et réduction

Dans ce qui suit, E est un espace euclidien de dimension 3.

definition 2 On appelle quadrique de E (de dim 3), une surface S, qui admet dans un certain repère une équation $f(x, y, z) = 0$, où f est un polynôme de degré 2 en ses trois variables.

Théorème 4
• si S est une quadrique de E, son équation dans un repère quelconque de E est polynomiale du second degré, donc de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + \alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon = 0;$$

• l'équation de S dans un repère quelconque admet une écriture matricielle :

$$f(x, y, z) =^t XAX + LX + \varepsilon = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [\alpha, \beta, \gamma] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \varepsilon = 0.$$

• dans un autre repère la partie quadratique devient ${}^tX({}^tPAP)X$, où P est la matrice de passage d'une base à l'autre ; le rang de la partie quadratique est invariant, on dit que c'est **le rang de la quadrique ;**
• il existe une base orthonormée (u, v, w) telle que l'équation de S dans un repère $(0, u, v, w)$ est de la forme

$$\lambda x^2 + +\mu y^2 + \nu z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + k = 0.$$

---

definition 3 On dit qu'un point Ω est **centre** de la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ si c'est un centre de symétrie pour cette surface ; c'est à dire si pour tout point M,

$$f(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}) = 0 \Leftrightarrow f(\Omega - \overrightarrow{\Omega M}) = 0.$$

Théorème 5
Soit S une quadrique d'équation $f(x,y,z) =^t XAX + LX + \varepsilon = 0$ en un certain repère.
• Ω est un centre de S ssi $grad(f(\omega)) = 0$;

1. si rg(A)= 3, S admet un centre et un seul ;
2. si rg(A)= 2, les centres forment une droite ou l'ensemble vide ;
3. si rg(A)= 3, les centres forment un plan ou l'ensemble vide ;

• si S admet un centre Ω, dans un repère d'origine Ω l'équation de S est de la forme

$$^tXAX + \varepsilon = 0$$

et il existe une base orthonormée (u, v, w) telle que l'équation de S dans le repère (Ω, u, v, w) est de la forme

$$\lambda x^2 + +\mu y^2 + \nu z^2 = k;$$

2.2 Cônes et cylindres

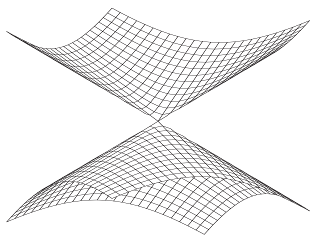
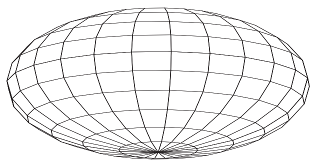
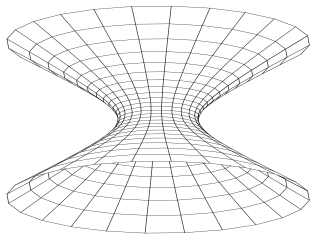
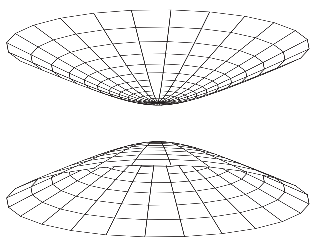
definition 4 cônes, cylindres
• On appelle cône de sommet Ω (point de E), de directrice Γ (courbe de E), la réunion des droites passant par Ω et rencontrant Γ.
• On appelle cylindre (ou surface cylindrique) S, de directrice (la courbe) Γ, et de direction (la droite vectorielle) D, la réunion des droites affines de direction D, rencontrant Γ. On dit qu'une telle droite affine passant par $M \in \Gamma$ est la génératrice de S passant par M.

Exercice 6 *cône et cylindres...*

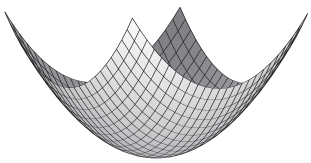
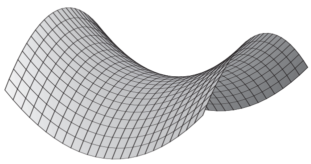
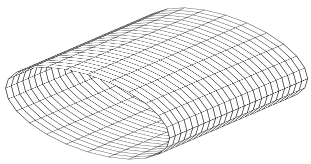
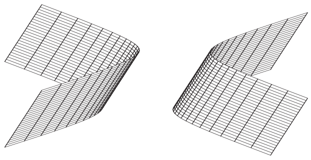
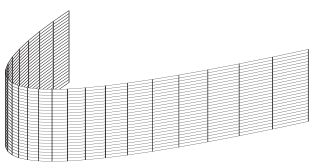
1. Soit C un cône de directrice Γ (de représentation $t \to \gamma(t)$) de sommet Ω. RP du cône ?
2. Montrer que S est un cône si elle admet une équation
$$f(P/R, Q/R) = 0$$
avec $P = ax + by + cz + d$, $Q = a'x + b'y + c'z + d'$, $R = a"x + b"y + c"z + d"$, les plans $P = 0, Q = 0, R = 0$, ont un point d'intersection et un seul ;
exemple : $z^2 - xy - 2z + 1 = 0$;
3. Soit C un cylindre de directrice Γ (de représentation $t \to \gamma(t)$), de direction $\overrightarrow{u}$. RP du cylindre ?
4. Montrer que S est un cylindre si elle admet une équation
$$f(P, Q) = 0$$
avec $P = ax + by + cz + d$, $Q = a'x + b'y + c'z + d'$, les plans $(P = 0)$, $(Q = 0)$, étant sécants ;
exemple : $e^{x^2+y^2+z^2} - (x + z)e^{-2xz} = 0$.
5. Montrer que si S est un cône ou un cylindre le plan tangent à S en un point M contient la génératrice passant par ce point ;

2.3 Description géométrique des quadriques

Quadriques de rang 3

Equation réduite	*nom*	*figure*	*représ. paramétrique*
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	*cône(sommet à l'orig.)*		$\begin{cases} x = am\cos\theta \\ y = bm\sin\theta \\ z = cm \end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	*ellipsoïde*		$\begin{cases} x = a\ \cos\phi\cos\theta \\ y = b\ \cos\phi\sin\theta \\ z = c\ \sin\phi \end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	*hyperboloïde à une nappe*		$\begin{cases} x = a\ \mathrm{ch}\phi\cos\theta \\ y = b\ \mathrm{ch}\phi\sin\theta \\ z = c\ \mathrm{sh}\phi \end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	*hyperboloïde à deux nappes*		$\begin{cases} x = a\ \mathrm{sh}\phi\cos\theta \\ y = b\ \mathrm{sh}\phi\sin\theta \\ z = \pm c\ \mathrm{ch}\phi \end{cases}$

Quadriques de rang 2

Equation *réduite*	*nom*	*figure*	*représ. paramétrique*
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$	*paraboloïde elliptique*		$\begin{cases} x = a\,u\,\cos\theta \\ y = b\,u\,\sin\theta \\ z = cu^2 \end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$	*paraboloïde hyperbolique*		$\begin{cases} x = a\,u\,\cosh\theta \\ y = b\,u\,\sinh\theta \\ z = cu^2 \end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	*cylindre elliptique*		$\begin{cases} x = a \\ cos\theta \\ y = b\ \sin\theta \\ z = t \end{cases}$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	*cylindre hyperbolique*		$\begin{cases} x = \pm a \\ cosh\theta \\ y = b\ \sinh\theta \\ z = t \end{cases}$
$x^2 - 2py = 0$	*cylindre parabolique*		$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{1}{2p}u^2 \\ z = t \end{cases}$

2.4 Quadriques de révolution

definition 5 *surfaces de révolution*
On appelle surface de révolution une surface S obtenue en faisant tourner une courbe Γ autour d'un axe, ce qui signifie que S est la réunion des courbes

$$Rot(D,\theta)(\Gamma)$$

lorsque θ parcourt $[0,2\pi]$. D est l'axe de S, une méridienne est l'intersection d'un demi-plan de frontière D avec S, un parallèle est un cercle intersection de S est d'un plan perpendiculaire à D.

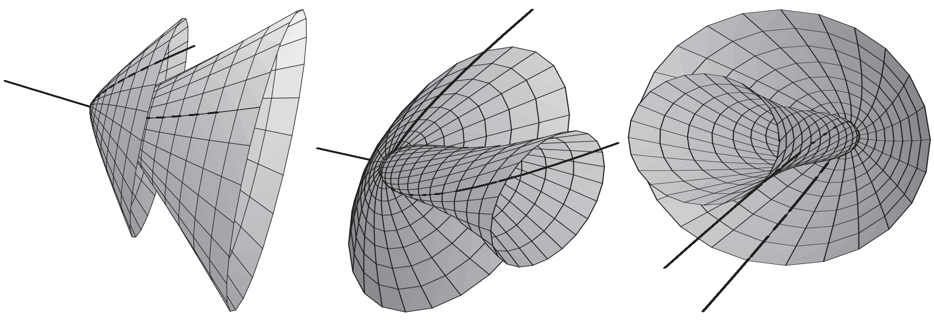
Illustration : sous MAPLE, une courbe de l'espace, une famille de rotations d'axe D qui transforment Γ en une famille de courbes...

```
> restart;
> with(plots):
> with(linalg):

> R:=t->matrix(3,3,[[1,0,0],[0,cos(t),-sin(t)],[0,sin(t),cos(t)]]);
> R(theta);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

```
> Gamma:=t->[t^2+1,t,t^2+2*t];
> S:=evalm(R(theta)&*Gamma(t));

> plot3d({S},t=-8..5,theta=0..2*Pi, orientation=[-73,29]):
> plot3d({Gamma(t),[u,0,0]},t=-7..6, u=-30..30,orientation=[-73,29],thickness=3):
> display({%%,%});
```

$$S := [t^2+1, \cos(\theta)\,t - \sin(\theta)\left(t^2+2\,t\right), \sin(\theta)\,t + \cos(\theta)\left(t^2+2\,t\right)]$$



Théorème 6 *caractérisation des quadriques de révolution*
Soit S une quadrique non vide, de matrice associée dans une base orthonormale :

$$(S):\ {}^tXAX + LX + k = 0;$$

S est un quadrique de révolution ssi A admet une valeur propre double non nulle.

Démonstration vérification dans l'inventaire

2.5 Exercices

Exercice 7 Que sont-ce ?

1. $3x^2 + 8yz + 4zx - 4xy + y + z = 0;$
2. $3x^2 + yz + 4zx - 4xy - z = 0;$
3. $3x^2 - 8yz + 4zx - 4xy = 0;$

Exercice 8 Soit S d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$,

1. Intersection de S avec son plan tangent en $(0, 0, 0)$, en
2. Intersection de S avec le plan $(z = \lambda)$;
3. Intersection de S avec le plan $(x = \lambda)$;
4. Droites contenues dans S?

Exercice 9 *cylindres et coniques REVOIR*

1. Donner une équation du cylindre d'axe (Oz) rencontrant xOy alias $z = 0$, en

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 4y, \\ z = 0. \end{cases}$$

2. Soit la courbe paramétrée :

$$x(t) = \frac{2-4t}{1+t^2},\ y(t) = \frac{2-4t}{1+t^2},\ z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

   Montrer que c'est une courbe plane et contenue dans le cylindre.

Exercice 10 Important : droites contenues dans un hyperboloïde à 1 nappe
On considère l'hyperboloïde $(\mathcal{H})$ d'équation

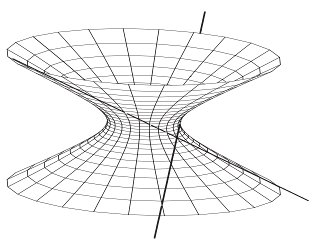
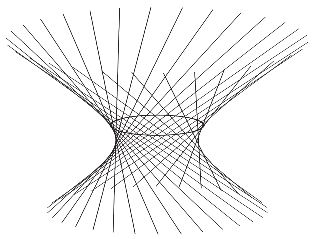
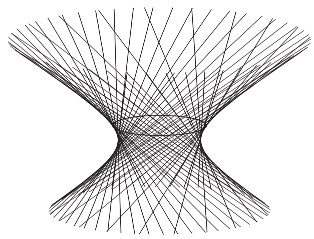
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la droite contenant le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et de vecteur directeur (α, β, γ) soit contenue dans $(\mathcal{H})$.
2. Montrer que A peut s'écrire $(a\mathrm{sh}(u)\cos(\phi), b\mathrm{ch}(\mathrm{u})\sin(\phi), c\mathrm{sh}(u))$; en déduire une expression analogue pour le vecteur directeur (α, β, γ).
3. Montrer que par tout point de $M_0 \in \mathcal{H}$ il passe deux droites contenues dans $(\mathcal{H})$ exactement et préciser leurs directions en fonction des coordonnées de M_0.

Les trois figures ci-dessous illustrent cet exercice.
Elles sont produites par le code MAPLE qui est présenté. Le titre de chaque figure est le nom de la procédure MAPLE qui permet de la tracer. Elles représentent de gauche à droite :
– *L'hyperboloïde. La fonction* **S** *retourne la nappe paramétrée, le tracé est obtenu avec la fonction* **plot3d***. Les courbes obtenues ont des équations de la forme p=cste, où p est l'un des paramètres de la nappe S.*
– *La deuxième figure est formée de droites de cet hyperboloïde passant par certains points du cercle $\mathcal{H} \cap (z = ch(1/2)$, à raison d'une droite par point ; on constate que ces droites ne sont pas sécantes. Ces droites sont définies par leurs représentations paramétriques retournées pas la fonction* **Dr1(x,θ)** *et tracée avec la fonction* **spacecurve***.*
– *Dans la troisième figure, pour chaque point choisi sur le cercle, les 2 droites de l'hyperboloïde qui passent par ce point sont tracées. Les deux représentations paramétriques des droites contenues dans cet hyperboloïde et passant par le point de paramètres x et θ sont retournées par les fonctions* **Dr1(x,θ), Dr2(x,θ).**

```
> restart;
> with(plots):

> S:=(t,phi)->[cosh(t)*cos(phi),cosh(t)*sin(phi),sinh(t)];
> H:=plot3d(S(t,phi),t=-2..1,phi=-Pi..Pi):

> Dr1:=proc(x, theta)
>   local phi;
>   phi:=theta+arccos(tanh(x));
>   [cosh(x)*cos(theta)+ t*cos(phi),cosh(x)*sin(theta)+t*sin(phi), sinh(x)+t]
> end:
>
> Dr2:=proc(x, theta)
>   local phi;
>   phi:=theta-arccos(tanh(x));
>   [cosh(x)*cos(theta)+ t*cos(phi),cosh(x)*sin(theta)+t*sin(phi), sinh(x)+t]
> end:
```

```
# On trace ici, avec spacecurve deux droites passant par un point de
  l'hyperboloïde:

> spacecurve({Dr1(-1/2,0),Dr2(-1/2,0)} , t=-3..3,color=black,thickness=2):
> display({%,H});
> DeuxDroitesSurH:=%:

# On trace ensuite, avec spacecurve le cercle intersection de l'hyperboloïde
  avec le plan (z=sh(1/2), puis, pour un choix de points de de ce cercle,
  une des deux droites passant par ce point:

> spacecurve([cosh(1/2)*cos(t),cosh(1/2)*sin(t) , sinh(1/2)] , t=-Pi..Pi,
           thickness=2,color=black):
> spacecurve({seq(Dr2(1/2,2*k*Pi/100) , k=0..99)} ,
           t=-3..3,color=black, orientation=[20,83]);
> UneDroiteParPtDuCercle:=display({%,%%}):

# On trace enfin ce même cercle puis, pour un choix de points de de ce cercle,
  les deux droites passant par ce point:

> spacecurve([cosh(1/2)*cos(t),cosh(1/2)*sin(t), sinh(1/2)] ,
           t=-Pi..Pi,thickness=2,color=black):
> spacecurve({seq(Dr1(1/2,2*k*Pi/48) , k=0..47),
           seq(Dr2(1/2,2*k*Pi/48) , k=0..47)},
           t=-3..3,color=black, orientation=[-49,69]);
> DeuxDroitesParPtDuCercle:=display({%,%%}):
```

		
DeuxDroitesSurH	UneDroiteParPtDuCercle	DeuxDroitesParPtDuCercle

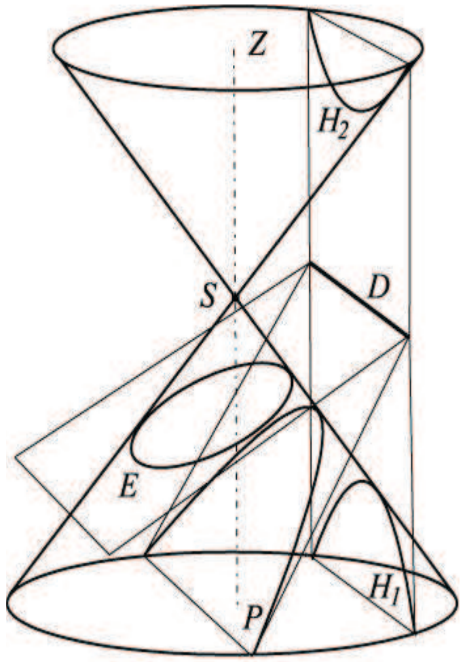
Exercice 11 *Intersection d'un cône et d'un plan*[1]
On considère un espace affine de dimension 3 de repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et le cône

$$\Gamma = \{M \in P\,;\, x^2 + y^2 = \tan(\phi)^2 z^2\,\},$$

l'équation étant donnée dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Quelles sont les droites contenues dans Γ ? Préciser un vecteur directeur et un point remarquable de ces droites.
2. Soit P_m, le plan d'équation $(z = m)$, et O_m le point de coordonnées $(0, 0, m)$ dans $\mathcal{R}$. Choisir un repère de P_m, d'origine O_m, dans lequel vous donnerez une équation de $\Gamma \cap P_m$.
   Nature géométrique de cet ensemble ?
3. Soit Q_m, le plan d'équation $(x = m)$, et Ω_m le point de coordonnées $(m, 0, 0)$ dans $\mathcal{R}$. Choisir un repère de Q_m, d'origine Ω_m, dans lequel vous donnerez une équation de $\Gamma \cap Q_m$.
   Nature géométrique de cet ensemble ? Donnez en une représentation graphique dans le plan Q_m, lorsque $m = 0, m = 1$.
4. Soit R_m, le plan d'équation $(x + az = m)$. Mêmes questions. On aura sans doute à discuter pour ce qui est de la nature géométrique de l'intersection. Figures pour

$$(\phi, m, a) = (\pi/4, 1, 1),\ (\pi/4, 1, 2),\ (\pi/4, 1, 1/2).$$



Sections du cône de révolution par des plans passant par une droite D

1. La première question mise à part, cet exercice reprend les idées d'un problème de bac C (Académie d'Aix-Marseille) que j'avais posé il y a quelques lustres. Il y avait d'autres questions sur les isométries affines qui laissent la figure invariante. Vous en saviez moins lorsque vous étiez en terminale que les élèves qui passaient le bac cette année là, mais vous en saviez autant que moi quand j'ai passé mon bac ; tout va donc bien... pour l'instant.