Déterminants

Groupe symétrique

Exercice 1 [02231] [Correction]

Soit $n \geq 2$ et c la permutation circulaire $c = (1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)$.
Déterminer toutes les permutations σ de $\mathcal{S}_n$ qui commutent avec c .

Exercice 2 [02225] [Correction]

Dans $\mathcal{S}_n$ avec $n \geq 2$, on considère une permutation σ et un p -cycle :

$$c = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$$

Observer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p -cycle qu'on précisera.

Exercice 3 [02224] [Correction]

Soient n un entier supérieur à 2, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Montrer que σ et $\tau = (i \ j)$ commutent si, et seulement si, $\{i, j\}$ est stable par σ .

Exercice 4 [00121] [Correction]

Soit H l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma(k) + \sigma(n+1-k) = n+1$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$

Exercice 5 [02226] [Correction]

Déterminer la signature de :

$$(a) \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 [02227] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$(a) \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$$

Exercice 7 [02228] [Correction]

Soit $n \geq 2$ et τ une transposition de $\mathcal{S}_n$.

- (a) Montrer que l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ vers $\mathcal{S}_n$.
- (b) En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ formé des permutations de signature 1 élément de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 8 [02230] [Correction]

Soit $n \geq 5$.

Montrer que si $(a \ b \ c)$ et $(a' \ b' \ c')$ sont deux cycles d'ordre 3 de $\mathcal{S}_n$, alors il existe une permutation σ , paire, telle que

$$\sigma \circ (a \ b \ c) \circ \sigma^{-1} = (a' \ b' \ c')$$

Exercice 9 [04196] [Correction]

[Inégalités de réordonnement] Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels triés par ordre croissant :

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \quad \text{et} \quad b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

Déterminer

$$\min_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$$

Formes multilinéaires alternées

Exercice 10 [01410] [Correction]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
Soient f une forme linéaire sur E , p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = \text{Id} - p$ sa projection complémentaire.
Montrer que l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E .

Exercice 11 [01413] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n) = \text{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 12 [01411] [Correction]

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -\text{Id}$. Montrer que l'espace E est de dimension paire.

Exercice 13 [01412] [Correction]

Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

- Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
- Montrer que l'application $D: f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 14 [03071] [Correction]

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

- Montrer qu'il existe d'unique complexes a, b tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$$

- Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f .

Exercice 15 [00752] [Correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ déterminé par

$$\varphi_A(M) = AM$$

Calculer la trace et le déterminant de φ_A

Exercice 16 [03641] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

- Montrer que A est inversible.
- On suppose en outre

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} > 0$$

Montrer que $\det A > 0$.

Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 17 [01414] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Former une relation liant $\det(A)$ et $\det \bar{A}$.

Exercice 18 [01415] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t A = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 [01416] [Correction]

Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n + 1$. Montrer

$$\det A = 0$$

Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 20 [01417] [Correction]

Comparer $\det(a_{i,j})$ et $\det((-1)^{i+j} a_{i,j})$ où $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 21 [03382] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$$

Montrer

$$2^{n-1} \mid \det A$$

Exercice 22 [00738] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$.

Calculer le déterminant de la matrice B de colonnes

$$C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$$

Exercice 23 [02355] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 24 [02603] [Correction]

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est élément de $GL_n(\mathbb{Z})$ si la matrice A est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.

- (a) Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ alors $|\det A| = 1$.
- (b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, A + kB \in GL_n(\mathbb{Z})$$

Calculer $\det A$ et $\det B$.

Exercice 25 [02604] [Correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) (n \geq 2)$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $B_1, \dots, B_n$ déterminées par

$$B_j = \sum_{i \neq j} A_i$$

Exprimer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 26 [02695] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec $n \geq 2$) vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 27 [00229] [Correction]

Soient A et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg } H = 1$. Montrer :

$$\det(A + H) \det(A - H) \leq \det A^2$$

Exercice 28 [01587] [Correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Établir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

Exercice 29 [03278] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1$$

Montrer

$$|\det A| \leq 1$$

Calculs de déterminants élémentaires

Exercice 30 [01418] [Correction]

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$

Exercice 31 [01419] [Correction]

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{\max(i,j)})$.

En déduire en particulier $\det(\max(i, j))$ et $\det(\min(i, j))$.

Exercice 32 [01420] [Correction]

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 33 [01421] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$ on a

$$S_k = \sum_{i=1}^k i$$

Exercice 34 [01423] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- (a) Calculer ${}^t A A$. En déduire $\det A$.
- (b) Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

Exercice 35 [03377] [Correction]

- (a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

- (b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 36 [03366] [Correction]

Montrer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

Calculs de déterminants avancés

Exercice 37 [01425] [Correction]

Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \dots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$

- (a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x .
- (b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 38 [02693] [Correction]

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où $x, a_1, \dots, a_n$ réels.

Exercice 39 [00748] [Correction]

Pour $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, on considère $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$. Calculer

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{[déterminant de Cauchy]}$$

Traiter en particulier le cas où

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, a_i = b_i = i \quad \text{[déterminant de Hilbert]}$$

Exercice 40 [00299] [Correction]

On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \quad (\text{avec } n \geq 2)$$

- (a) Montrer que P_n admet n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$$

Exercice 41 [03806] [Correction]

[Déterminant de Hurwitz] Soient $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$H = \begin{pmatrix} a + \lambda_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a + \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 42 [03124] [Correction]

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de coefficient

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 43 [03578] [Correction]

Soient un naturel $n \geq 2$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n réels distincts de $[0; \pi]$.

On pose

$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_j - \cos x_i)$$

et on considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$$

- (a) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$ et donner son coefficient dominant.
- (b) Calculer $\det M_n$ en fonction de P_n .

Exercice 44 [03577] [Correction]

Pour une famille de n réels distincts (x_k) de $[0; \pi]$, on pose

$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_i - \cos x_j)$$

(a) Combien le produit définissant P_n comporte-t-il de facteurs ?

(b) Pour $(i, j) \in \llbracket 1; 4 \rrbracket^2$ écrire la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$$

- (c) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$.
- (d) Calculer $\det M$ en fonction de P_4 et montrer $|\det M| < 24$

Calculs de déterminants par une relation de récurrence

Exercice 45 [01426] [Correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 46 [01427] [Correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 47 [01428] [Correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 48 [01429] [Correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite (H_n) avec

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 49 [01430] [Correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 50 [01431] [Correction]

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & & \vdots \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ddots & \vdots \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & C_n^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en notant

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 51 [01432] [Correction]

Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en notant par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 52 [03254] [Correction]

Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Calculs de déterminants tridiagonaux

Exercice 53 [02584] [Correction]

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 54 [01436] [Correction]

Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ distincts. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 55 [00739] [Correction]

Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 56 [00740] [Correction]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 57 [00741] [Correction]

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Exercice 58 [01433] [Correction]

Pour $a \in \mathbb{K}^*$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

Applications des déterminants

Exercice 59 [01422] [Correction]

[Identité de Lagrange] Calculer de deux façons :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$$

Exercice 60 [01441] [Correction]

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Pour quelles valeurs de λ , a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$?

(b) Déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 61 [01442] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [-\varepsilon; \varepsilon], A + xB \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 62 [01445] [Correction]

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

(a) Calculer $\det M$.

(b) Déterminer, en fonction de α le rang de M .

Exercice 63 [01446] [Correction]

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) Calculer le déterminant de

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

(b) En déduire le rang de $M(a, b)$ selon les valeurs des paramètres a et b .

Exercice 64 [03417] [Correction]

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé des matrices inversibles d'ordre n à coefficients entiers dont l'inverse est encore à coefficients entiers.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers ($n \geq 2$). Montrer qu'il existe une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ si, et seulement si, ces entiers sont premiers dans leur ensemble.

Exercice 65 [00749] [Correction]

Établir que l'inverse de la matrice $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est à coefficients entiers.

Systèmes de Cramer

Exercice 66 [01437] [Correction]

Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{K}$. Résoudre sur $\mathbb{K}$ les systèmes suivants :

- (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ avec a, b, c deux à deux distincts.
- (b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$ avec a, b, c deux à deux distincts et $a + b + c \neq 0$.

Exercice 67 [01438] [Correction]

Résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}$$

en fonction de $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 68 [01439] [Correction]

Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 69 [01440] [Correction]

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts.

(a) Résoudre

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

en introduisant : $P = X^3 - (x + yX + zX^2)$

(b) Même question pour

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \end{cases}$$

Comatrice

Exercice 70 [01443] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- (a) Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$.
- (b) Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si, et seulement si, $\det A = \pm 1$.

Exercice 71 [01444] [Correction]

Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Établir

$$\begin{cases} \text{rg}(A) = n \implies \text{rg}(\text{Com } A) = n \\ \text{rg}(A) = n - 1 \implies \text{rg}(\text{Com } A) = 1 \\ \text{rg}(A) \leq n - 2 \implies \text{rg}(\text{Com } A) = 0 \end{cases}$$

(b) Montrer

$$\det(\text{Com } A) = (\det A)^{n-1}$$

(c) En déduire

$$\text{Com}(\text{Com } A)$$

Exercice 72 [03142] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les comatrices de A et B commutent.

Exercice 73 [03260] [Correction]

Résoudre l'équation

$$\text{Com } M = M$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 74 [03576] [Correction]

(a) Donner le rang de $B = {}^t(\text{Com } A)$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(b) On se place dans le cas où $\text{rg } A = n - 1$.

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AC = CA = O_n$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C = \lambda B$$

Exercice 75 [02659] [Correction]

Soient des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux.

Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$

Exercice 76 [03944] [Correction]

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la comatrice de S est symétrique.

Déterminants de Vandermonde et apparentés

Exercice 77 [00742] [Correction]

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Calculer

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 78 [02384] [Correction]

Calculer pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 79 [02385] [Correction]

Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 80 [02386] [Correction]

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Calculs de déterminants par blocs

Exercice 81 [03129] [Correction]

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Établir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

Exercice 82 [03130] [Correction]

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D inversible. Établir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

Exercice 83 [02694] [Correction]

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 84 [02387] [Correction]

(a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$$

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.

(d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Exercice 85 [01424] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$$

(b) Justifier

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0$$

Exercice 86 [00198] [Correction]

Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

(a) À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

(b) Donner son inverse quand cela est possible.

Exercice 87 [00713] [Correction]

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On écrit la comatrice de M sous une forme analogue

$$\text{Com } M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1} \det D$$

Exercice 88 [03147] [Correction]

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose $C'D$ symétrique et D inversible. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A'D - B'C)$$

(b) On suppose toujours $C'D$ symétrique mais on ne suppose plus D inversible. Montrer que l'égalité précédente reste vraie.

Exercice 89 [03288] [[Correction](#)]

Soient A, B, C, D des matrices carrées d'ordre n , réelles et commutant deux à deux.

Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD - BC$ l'est.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Pour commencer, notons que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $c^{k-1}(1) = k$ et par conséquent $c^{-(k-1)}(k) = 1$.

Soit σ une permutation commutant avec c_n .

Posons $k = \sigma(1) \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $s = c^{-(k-1)} \circ \sigma$ de sorte que $s(1) = 1$.

Comme σ et c commutent, s et c commutent aussi et on a pour tout $2 \leq i \leq n$, $s = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}$ d'où $s(i) = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}(i) = \sigma^{(i-1)} \circ s(1) = \sigma^{(i-1)}(1) = i$ car $c^{-(i-1)}(i) = 1$.

Par conséquent $s = \text{Id}$ puis $\sigma = c^k$.

Inversement les permutations de la forme c^k avec $1 \leq k \leq n$ commutent avec c .

Exercice 2 : [énoncé]

Pour $x = \sigma(a_i)$, on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma(a_{i+1})$$

(en posant $a_{p+1} = a_1$).

Pour $x \notin \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p)\}$, on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$$

car $c(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x)$ puisque $\sigma^{-1}(x) \notin \{a_1, \dots, a_p\}$.

Ainsi

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \quad \sigma(a_2) \quad \dots \quad \sigma(a_p))$$

Exercice 3 : [énoncé]

Si $\{i, j\}$ est stable par σ alors $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$.

On a alors

$$\forall x \notin \{i, j\}, (\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$$

Pour $x = i$ alors $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(j) = (\tau \circ \sigma)(i)$ et pour $x = j$, $(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(i) = (\tau \circ \sigma)(j)$.

Par suite

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

Inversement, si $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ alors $\sigma(i) = (\sigma \circ \tau)(j) = (\tau \circ \sigma)(j) = \tau(\sigma(j))$.

Puisque $\tau(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$ on a $\sigma(j) \in \{i, j\}$.

De même $\sigma(i) \in \{i, j\}$ et donc $\{i, j\}$ stable par σ .

Exercice 4 : [énoncé]

$H \subset \mathcal{S}_n$, $\text{Id} \in H$. Remarquons, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(k) = n + 1 - \sigma(n + 1 - k)$.

Soient $\sigma, \sigma' \in H$,

$$(\sigma' \circ \sigma)(k) = \sigma'(\sigma(k)) = n + 1 - \sigma'(n + 1 - \sigma(k)) = n + 1 - \sigma' \circ \sigma(n + 1 - k)$$

donc $\sigma' \circ \sigma \in H$.

Soit $\sigma \in H$. Posons $\ell = \sigma^{-1}(k)$. On a

$$\sigma(n + 1 - \ell) = n + 1 - \sigma(\ell) = n + 1 - k$$

donc $\sigma^{-1}(n + 1 - k) = n + 1 - \ell$ puis

$$\sigma^{-1}(k) + \sigma^{-1}(n + 1 - k) = \ell + (n + 1 - \ell) = n + 1$$

Exercice 5 : [énoncé]

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ :

$$I(\sigma) = \text{Card}(\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\})$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

(a) $I(\sigma) = 2 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 17$ donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(b) $I(\sigma) = 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 2 + 0 + 0 = 6$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Exercice 6 : [énoncé]

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ :

$$I(\sigma) = \text{Card}(\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\})$$

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ et $I(\sigma)$ se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

(a) $I(\sigma) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(b) $I(\sigma) = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) + 0 + \dots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$ donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exercice 7 : [énoncé]

- (a) L'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est involutive, donc bijective.
- (b) L'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ transforme $\mathcal{A}_n$ en $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ donc $\text{Card } \mathcal{A}_n = \text{Card } \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$.
Or $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe de $\mathcal{A}_n$ et de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ donc

$$\text{Card } \mathcal{A}_n = \frac{1}{2} \text{Card } \mathcal{S}_n = \frac{n!}{2}$$

Exercice 8 : [énoncé]

Notons que

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$$

Soit $\sigma: \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$ une permutation définie par :

$$\sigma(a) = a', \sigma(b) = b' \text{ et } \sigma(c) = c'$$

Si σ est paire alors le problème est résolu.

Si σ est impaire alors soit $c \neq d \in \mathbb{N}_n \setminus \{a, b, c\}$ et $\tau = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$.
 $\sigma \circ \tau$ est une permutation paire satisfaisante.

Exercice 9 : [énoncé]

Pour x, y, x' et y' réels tels que $x \leq y$ et $x' \leq y'$, on a

$$xy' + x'y \leq xx' + yy'$$

En effet, la différence des deux membres est positive

$$xx' + yy' - (xy' + x'y) = \underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \underbrace{(y'-x')}_{\geq 0} \geq 0$$

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la quantité $\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$ semble alors maximale lorsque les plus grandes quantités sont multipliées entre elles et, à l'inverse, elle semble minimale lorsque les grandes quantités multiplient les petites. Montrons alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{n-i} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

On établit la majoration en raisonnant par récurrence.

La propriété est immédiate pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie à un rang $n - 1 \geq 1$. Au rang suivant, on introduit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels triés par ordre croissant et σ une permutation des entiers allant de 1 à n .

Si $\sigma(n) = n$, σ définit par restriction une permutation des entiers allant de 1 à $n - 1$ et il suffit d'appliquer directement l'hypothèse de récurrence à partir des sous-familles des réels $a_1, \dots, a_{n-1}$ et $b_1, \dots, b_{n-1}$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{\sigma(i)} + a_n b_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Si $\sigma(n) \neq n$, introduisons l'indice k tel que $\sigma(k) = n$ et isolons dans la somme les termes d'indices n et k

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} &= \sum_{i \neq k, n} a_i b_{\sigma(i)} + a_k b_n + a_n b_{\sigma(n)} \\ &\leq \sum_{i \neq k, n} a_i b_{\sigma(i)} + a_k b_{\sigma(n)} + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_{\varphi(i)} \end{aligned}$$

avec φ la permutation de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ définie par la composition $\varphi = \begin{pmatrix} n & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \sigma$. Puisque $\varphi(n) = n$, on est ramené à l'étude précédente et on peut conclure

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_{\varphi(i)} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

La récurrence est établie.

La minoration se déduit de la majoration par passage à l'opposé.

La famille $-b_n, \dots, -b_1$ étant croissante, on peut affirmer que pour toute permutation σ

$$\sum_{i=1}^n a_i (-b_{\sigma(i)}) \leq \sum_{i=1}^n -a_i b_{n-i}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i}$$

Finalement,

$$\min_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i} \quad \text{et} \quad \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Exercice 10 : [énoncé]

$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$.

$\varphi(y, x) = f(p(y))f(q(x)) - f(p(x))f(q(x)) = -\varphi(x, y)$. Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x'))f(q(y)) - f(p(y))f(q(\lambda x + \mu x'))$ or f, p et q sont linéaires donc

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = (\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x'))) f(q(y)) - f(p(y)) (\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x')))$ puis en développant et en réorganisant : $\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x', y)$.

φ est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

Exercice 11 : [énoncé]

L'application $\varphi: E^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n)$$

est une forme n -linéaire alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}$.

On a $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \lambda$ et par suite

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, f(e_j), \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j} = \text{tr } f$$

avec $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

Exercice 12 : [énoncé]

Posons $n = \dim E$. Comme $\det(f^2) = \det(-I_n)$ on a $\det(f^2) = (-1)^n \geq 0$, donc n est pair.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k e^x$.

$\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ forme une base de V , donc $\dim V = n + 1$.

(b) Pour $f(x) = P(x)e^x$ on a $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))e^x$.

D est bien une application de V dans V .

De plus la linéarité de D découle de la linéarité de la dérivation et on peut donc conclure $D \in \mathcal{L}(V)$.

Puisque $(x^k e^x)' = (x^k + kx^{k-1})e^x$ on a $D(f_k) = f_k + kf_{k-1}$ donc a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & n & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite $\det D = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$.

Exercice 14 : [énoncé]

(a) La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b}: z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire et sa matrice dans la base $(1, i)$ est

$$\begin{pmatrix} \text{Re } a + \text{Re } b & \text{Im } b - \text{Im } a \\ \text{Im } a + \text{Im } b & \text{Re } a - \text{Re } b \end{pmatrix}$$

Pour f endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

dans la base $(1, i)$, on a $f = \varphi_{a,b}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \text{Re } a + \text{Re } b = \alpha \\ \text{Im } a + \text{Im } b = \beta \\ \text{Im } b - \text{Im } a = \gamma \\ \text{Re } a - \text{Re } b = \delta \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution qui est

$$a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\beta - \gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2}$$

(b) Le déterminant de f vaut

$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2$$

Exercice 15 : [énoncé]

Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On observe

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

Par suite dans la base $(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est diagonale par blocs avec n blocs diagonaux tous égaux à A . On en déduit

$$\text{tr } \varphi_A = n \text{tr } A \text{ et } \det \varphi_A = (\det A)^n$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$$

Si $m = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leq \frac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j| |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leq m \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de m .

Par suite, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre et donc A inversible.

(b) Considérons l'application $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n)$.

La fonction f est clairement polynomiale de monôme dominant x^n , elle est donc continue et de limite $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice $A + xI_n$ pour tout $x \geq 0$ et donc $f(x) \neq 0$ sur $[0; +\infty[$.

Par continuité, la fonction f ne peut prendre de valeurs ≤ 0 et donc

$$\forall x \geq 0, f(x) > 0$$

En particulier $\det A = f(0) > 0$.

Exercice 17 : [énoncé]

Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

Exercice 18 : [énoncé]

Ici ${}^t A = \bar{A}$, donc $\det(A) = \det({}^t A) = \det \bar{A}$.

Comme

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 : [énoncé]

Comme ${}^t A = -A$ on a

$$\det A = \det {}^t A = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

donc $\det A = 0$.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un contre-exemple au second problème posé.

Exercice 20 : [énoncé]

Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})$. On a

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (-1)^{\sigma(i)+i} a_{\sigma(i),i}$$

en regroupant les puissance de (-1)

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{i=1}^n \sigma(i)+i} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

puis

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{n(n+1)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi

$$\det B = (-1)^{n(n+1)} \det A = \det A$$

car $n(n+1)$ est pair.

Exercice 21 : [énoncé]

En ajoutant la première colonne de A à chacune des suivantes, on obtient une matrice dont les colonnes d'indices 2 jusqu'à n ont pour coefficients 0, 2 ou -2 . On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes et l'on obtient

$$\det A = 2^{n-1} \det B$$

avec B une matrice dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 de sorte que $\det B \in \mathbb{Z}$

Exercice 22 : [énoncé]

La somme des colonnes de B est nulle donc $\det B = 0$.

Exercice 23 : [énoncé]

On a

$$\det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$$

car A et B commutent.

Or $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$ donc $\det(A^2 + B^2) = z\bar{z} \geq 0$.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) $AA^{-1} = I_n$ donne $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ or $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ donc $\det A = \pm 1$.

(b) Posons $P(x) = \det(A + xB)$. P est une fonction polynomiale de degré inférieur à n .

Pour tout $x \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, on a $P(x) = \pm 1$ donc $P(x)^2 - 1 = 0$.

Le polynôme $P^2 - 1$ possède au moins $2n + 1$ racines et est de degré inférieur à $2n$, c'est donc le polynôme nul.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \pm 1$.

Pour $x = 0$, on obtient $\det A = \pm 1$.

Pour $x \rightarrow +\infty$,

$$\det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \frac{P(x)}{x^n} \rightarrow 0$$

donne $\det B = 0$.

Exercice 25 : [énoncé]

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de l'espace des colonnes,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(A_1, \dots, A_n)$$

et

$$\det B = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n B_i, B_2, \dots, B_n\right)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n B_i = (n-1) \sum_{i=1}^n A_i$$

Par suite

$$\det B = (n-1) \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2 - \sum_{i=1}^n A_i, \dots, B_n - \sum_{i=1}^n A_i\right)$$

Ce qui donne

$$\det B = (n-1) \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, -A_2, \dots, -A_n\right) = (-1)^{n-1} (n-1) \det(A_1, \dots, A_n)$$

Finalement

$$\det B = (-1)^{n-1} (n-1) \det A$$

Exercice 26 : [énoncé]

Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X .

On suppose dans la suite $n \geq 2$.

Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2 \det A$ et donc $\det A = 0$.

La matrice A n'est donc pas inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_r P$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_r P$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_n P = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.

On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 27 : [énoncé]

La matrice H est équivalente à la matrice J_1 dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position $(1, 1)$. Notons $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$H = QJ_1 P$$

et introduisons $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ déterminée par

$$A = QBP$$

La relation

$$\det(A + H) \det(A - H) \leq \det A^2$$

équivalent alors à la relation

$$\det(B + J_1) \det(B - J_1) \leq \det B^2$$

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de B et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\det(B + J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 + E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B - J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 - E_1, C_2, \dots, C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B + J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B - J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B + J_1) \det(B - J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)^2 \leq \det B^2$$

Exercice 28 : [énoncé]

En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice $A + xJ$ apparaît comme le déterminant d'une matrice où figure des x seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que $\det(A + xJ)$ est une fonction affine de la variable x .

De plus

$$\det(A - xJ) = \det(-{}^tA - xJ) = (-1)^{2n} \det({}^tA + xJ)$$

et puisque la matrice J est symétrique

$$\det(A - xJ) = \det({}^tA + x{}^tJ) = \det(A + xJ)$$

La fonction affine $x \mapsto \det(A - xJ)$ est donc une fonction paire et par conséquent c est une fonction constante. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det(A + 0.J) = \det A$$

Exercice 29 : [énoncé]

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

La propriété est immédiate pour $n = 1$.

Supposons la propriété vérifiée pour $n \geq 1$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés énoncées. En développant le déterminant de A selon la première ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1,j} \Delta_{1,j}$$

avec $\Delta_{1,j}$ mineur d'indice $(1, j)$ de la matrice A .

Puisque la matrice définissant le mineur $\Delta_{1,j}$ est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne est inférieure à 1, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer $|\Delta_{1,j}| \leq 1$.

On en déduit

$$|\det A| \leq \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j} \leq 1$$

Récurrence établie.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) En développant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

(b) En sommant les colonnes sur la première et en factorisant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

En retirant la première ligne aux suivantes et en développant sur la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca))$$

(c) En retranchant la première colonne aux suivantes puis en sommant les colonnes sur la première

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix}$$

En factorisant par 2 puis en retranchant la première colonne aux suivantes

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

Enfin en factorisant on se ramène à un déterminant de Vandermonde

$$D = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D = 2abc(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

(d) En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

(e) En sommant toutes les colonnes sur la première et en factorisant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux suivantes et en factorisant

$$D = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc

$$D = (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)((a-c)^2 - (b-c)^2)$$

puis

$$D = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$$

(f) En retirant la première colonne aux suivantes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$$

Par la formule de factorisation

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$D = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{b+a}{2} & \sin \frac{c+a}{2} \\ \cos \frac{b+a}{2} & \cos \frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$

puis

$$D = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{b-c}{2}$$

Exercice 31 : [énoncé]

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque colonne la précédente (en commençant par la première)

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & a_2 - a_3 & & a_{n-1} - a_n & a_n \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ (0) & & & & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n)a_n$$

Pour $a_i = i$,

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (-1)^{n-1}n$$

Pour $a_i = n + 1 - i$,

$$\det(a_{\min(i,j)}) = 1$$

Exercice 32 : [énoncé]

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & a_1 - a_2 & \\ (0) & & & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1 - a_2)^{n-1} \text{ via } \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ \vdots \\ C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n \end{matrix}$$

Exercice 33 : [énoncé]

Via $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (dans cet ordre)

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & (0) & & & n \end{vmatrix} = n!$$

Exercice 34 : [énoncé]

- (a) ${}^tAA = \text{diag}(\delta, \delta, \delta, \delta)$ avec $\delta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Par suite $\det A = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Or b, c, d fixés, par développement de déterminant, l'expression de $\det A$ est un polynôme en a unitaire de degré 4 donc

$$\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

- (b) Avec des notations immédiates : $AA' = A''$ avec :

$$\begin{cases} a'' = aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' = ab' + b'a + cd' - dc' \\ c'' = ac' - bd' + ca' + db' \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da' \end{cases}$$

Par égalité des déterminants et considération de signes

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2)^2$$

et les quantités suivantes étant positives

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

avec $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ par opérations.

Exercice 35 : [énoncé]

- (a) En factorisant les colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne a fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

- (b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

Exercice 36 : [énoncé]

En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec $a = 1 - n$ et $b = 1$. La poursuite du calcul donne alors

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \cdots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & & (a - b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b + x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme.

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$$

(b) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b - a} \text{ et } \beta = \frac{b \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b - a}$$

Exercice 38 : [énoncé]

En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des x que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable x .

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

Il reste à déterminer les réels α, β exprimant cette fonction affine.

D'une part

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0}'$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & (0) \\ & \vdots & \\ (0) & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position j . Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} a_i$$

Exercice 39 : [énoncé]

$$D_n = \det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Via $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \dots (b_{n-1} - b_n)}{(a_1 + b_n) \dots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Via $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \dots (b_{n-1} - b_n)(a_1 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n) \dots (a_n + b_n)(a_n + b_1) \dots (a_n + b_{n-1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Puisque

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = 1!2! \dots (n - 1)!$$

et

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = \frac{(n + 1)!}{1!} \frac{(n + 2)!}{2!} \dots \frac{(2n)!}{n!}$$

on obtient dans le cas particulier

$$D_n = \frac{(1!2! \dots (n - 1)!)^3 n!}{(n + 1)!(n + 2)! \dots (2n)!}$$

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Par l'absurde, supposons que P_n possède une racine multiple z . Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P'_n(z) = 0$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0(1) \text{ et } nz^{n-1} = 1(2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n - 1)z = n(3)$$

(2) impose $|z| \leq 1$ alors que (3) impose $|z| > 1$. C'est absurde.

(b) Posons $\chi(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1 + z_1 - z_i & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \\ & & & \vdots & \\ (1) & & & 1 & 1 + z_n - z_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la i -ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la i ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i)$$

Cependant les polynômes χ et P' ne sont pas de même degré... En revanche, les polynômes χ et $(-1)^n(P - P')$ ont même degré n , même coefficient dominant $(-1)^n$ et prennent les mêmes valeurs en les n points distincts $z_1, \dots, z_n$. On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n (P(0) - P'(0)) = 2(-1)^n$$

Exercice 41 : [énoncé]

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a + \lambda_1 \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1 + aC$$

avec E_1 colonne élémentaire et C colonne constituée de 1.

On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + aC, \dots, \lambda_n E_n + aC)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne C apparaît deux fois. On obtient

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n) + \sum_{i=1}^n \det(\lambda_1 E_1, \dots, aC, \dots, \lambda_n E_n)$$

et donc

$$\det H = \prod_{i=1}^n \lambda_i + a \sum_{i=1}^n \prod_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k$$

Exercice 42 : [énoncé]

Notons D_n le déterminant recherché.

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 E_1 + b_1 C$$

avec E_1 colonne élémentaire et C colonne constituée de 1.

On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$D_n = \det(a_1 E_1 + b_1 C, \dots, a_n E_n + b_n C)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne C apparaît deux fois. On obtient

$$D_n = \det(a_1 E_1 + \dots + a_n E_n) + \sum_{i=1}^n \det(a_1 E_1, \dots, b_i C, \dots, a_n E_n)$$

et donc

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \prod_{k=1, k \neq i}^n a_k$$

Exercice 43 : [énoncé]

- (a) $\cos(0.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 0.
 $\cos(1.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 1.
 Par récurrence double, on montre que $\cos(j.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré j en exploitant la relation :

$$\cos((j+1)x_i) + \cos((j-1)x_i) = 2 \cos(x_i) \cos(jx_i)$$

On peut aussi par récurrence affirmer que le coefficient dominant de $\cos(jx_i)$ est 2^{j-1} pour $j \geq 1$.

On peut même être plus précis et affirmer que $\cos((j-1)x_i)$ est une expression polynomiale de degré $j-1$ en $\cos(x_i)$.

- (b) $\det M_n$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus $n-1$.
 Puisque $\cos(x_2), \dots, \cos(x_n)$ sont $n-1$ racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M_n = \lambda(x_2, \dots, x_n) \prod_{j=2}^n (\cos x_j - \cos x_1)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2, \dots, x_n)$ est polynomiale en $\cos(x_2)$ de degré au plus $n-2$ (car il y a déjà le facteur $\cos(x_2) - \cos(x_1)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3), \dots, \cos(x_n)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = \mu(x_3, \dots, x_n) \prod_{j=3}^n (\cos x_j - \cos x_2)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M_n = \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_j - \cos x_i) = \alpha_n P$$

Il reste à déterminer la valeur de $\alpha_n \dots$

Un calcul immédiat donne $\alpha_2 = 1$.

En développant selon la dernière ligne

$$\det M_n = \cos((n-1)x_n) \det M_{n-1} + \dots$$

où les points de suspensions contiennent une expression polynomiale en $\cos(x_n)$ de degré $< n-1$.

En identifiant les coefficients dominant des expressions polynomiale en $\cos(x_n)$ dans cette égalité, on obtient

$$\alpha_n = 2^{n-2} \alpha_{n-1}$$

Cette relation permet de conclure

$$\alpha_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

Exercice 44 : [énoncé]

- (a) Il y a autant de facteurs que de paires $\{i, j\}$ i.e.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- (b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) \\ 1 & \cos x_4 & \cos(2x_4) & \cos(3x_4) \end{pmatrix}$$

- (c) La propriété est immédiate pour $j=1$ ou $j=2$.

Pour $j=3$, $\cos(2x_i) = 2 \cos^2 x_i - 1$.

Pour $j=4$, $\cos(3x_i) = 4 \cos^3 x_i - 3 \cos x_i$.

- (d) $\det M$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus 3.

Puisque $\cos(x_2), \cos(x_3), \cos(x_4)$ sont 3 racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M = \lambda(x_2, x_3, x_4) \prod_{j=2}^4 (\cos x_1 - \cos x_j)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2, x_3, x_4)$ est polynomiale $\cos(x_2)$ de degré au plus 2 (car il y a déjà le facteur $\cos(x_1) - \cos(x_2)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3), \cos(x_4)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = \mu(x_3, x_4) \prod_{j=3}^4 (\cos x_2 - \cos x_j)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M = \alpha \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\cos x_i - \cos x_j) = \alpha P_4$$

Il reste à déterminer la valeur de $\alpha \dots$

Une démarche analogue à la précédente aurait donné

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) \end{vmatrix} = \beta P_3$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 \\ 1 & \cos x_2 \end{vmatrix} = \gamma P_2 \text{ avec } \gamma = -1$$

En développant $\det M$ selon la dernière ligne et en considérant le coefficient dominant de $\det M$ vu comme polynôme en $\cos(x_3)$ on obtient

$$4\beta P_3 = (-1)^3 \alpha P_3$$

et de façon analogue on a aussi

$$2\gamma P_2 = (-1)^2 \beta P_2$$

On en déduit

$$\alpha = 8$$

Puisque $\text{Card } \mathfrak{S}_4 = 24$, $\det M$ peut se voir comme la somme de 24 termes qui sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue. On en déduit

$$|\det M| \leq 24$$

Certains des termes (par exemple $1 \times \cos(x_1) \times \cos(2x_2) \times \cos(3x_3)$) étant strictement inférieurs à 1 en valeur absolue, on a aussi

$$|\det M| < 24$$

Exercice 45 : [énoncé]

Par les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = D_{n-2}$$

Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on a

$$D_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Exercice 46 : [énoncé]

Par les opérations élémentaires : $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & (1) \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & (1) & & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1 .

Sachant $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 47 : [énoncé]

En développant selon la deuxième ligne

$$D_n = - \begin{vmatrix} 1 & * \\ \vdots & \vdots \\ (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + D_{n-1} = -1 + D_{n-1}$$

Puisque $D_1 = 1$ on obtient

$$D_n = 2 - n$$

Exercice 48 : [énoncé]

En décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la dernière colonne à chacune des autres

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & (0) & 1 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & n-1 & & 1 \\ (0) & & & & 1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

En développant selon la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]} = nD_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$$

Par suite

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}$$

donc

$$\frac{D_n}{n!} = D_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

puis

$$D_n = (1 + H_n)n!$$

Exercice 49 : [énoncé]

En décomposant la première ligne en somme de deux lignes

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a & a & & a+b \end{vmatrix}_{[n]} + \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ a & a+b & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a & a & & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la première colonne à toutes les autres dans le second déterminant, on obtient

$$D_n = aD_{n-1} + b^n$$

Par récurrence, on en déduit

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \text{ si } a \neq b$$

et

$$D_n = (n+1)a^n \text{ si } a = b$$

Exercice 50 : [énoncé]

En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_1^0 & C_1^1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-2}^{n-2} \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$D_n = D_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = D_1 = 1$$

Exercice 51 : [énoncé]

En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \dots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \dots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \dots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \dots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \dots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

Finalement

$$D_n = 1$$

Exercice 52 : [énoncé]

Cas $b = c$:

C'est un calcul classique, on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1 (i = 2, \dots, n)$ pour triangulariser le déterminant et obtenir

$$\det A_n = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Cas $b \neq c$:

Posons $D_n = \det A_n$. À chaque ligne on retranche la précédente

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c-a & a-b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & c-a & a-b \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière colonne

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \text{ avec } n \geq 2$$

Ainsi

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + b(a-b)(a-c)^{n-2} + \dots + b(a-b)^{n-2}(a-c)^1 + (a-b)^{n-1}D_1$$

Par sommation géométrique des premiers termes

$$D_n = b(a-c)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1 - \frac{a-b}{a-c}} + a(a-b)^{n-1}$$

puis après simplification

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$$

Exercice 53 : [énoncé]

Par développement d'un déterminant tridiagonal,

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ de racines a et b .

Si $a \neq b$ alors on peut écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et compte tenu des valeurs initiales, on obtient

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Si $a = b$ alors on peut écrire $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ et on parvient cette fois-ci à

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 54 : [énoncé]

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant, on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0$$

de racines distinctes a et b .

On peut donc écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Les valeurs initiales $D_0 = 1$ et $D_1 = a + b$ déterminent λ et μ et donc

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Exercice 55 : [énoncé]

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = (1 + x^2)D_{n-1} - x^2D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - (1 + x^2)r + x^2 = 0 \text{ de racines } 1 \text{ et } x^2.$$

Si $x^2 \neq 1$ alors $D_n = \lambda + \mu x^{2n}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$D_0 = 1$ et $D_1 = 1 + x^2$ donnent

$$D_n = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

Si $x^2 = 1$ alors $D_n = \lambda n + \mu$.

$D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Exercice 56 : [énoncé]

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0 \text{ de racines } e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}.$$

Si $\theta \neq 0$ $[\pi]$ alors $D_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2 \cos \theta$ donnent

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta = 2 \cos \theta \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1/\tan \theta \end{cases}$$

Ainsi

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

Si $\theta = 0$ $[2\pi]$ alors $D_n = \lambda n + \mu$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = n + 1$$

Si $\theta = \pi$ $[2\pi]$ alors $D_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$. $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$ donnent

$$D_n = (-1)^n(n + 1)$$

Exercice 57 : [énoncé]

En développant selon la première colonne, puis la première ligne et en recommençant :

$$D_n = (-n) \times 1 \times (2 - n) \times 3 \text{ etc...}$$

Si n est pair le développement s'arrête sur le calcul de

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si n est impair le développement s'arrête par l'étape

$$\begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3(n-2) \begin{vmatrix} 0 & n \\ 1 & n \end{vmatrix} = 3n(n-2)$$

En écrivant $n = 2p + 1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{p+1}(1 \times 3 \times \dots \times 2p + 1)^2$$

Exercice 58 : [énoncé]

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$$

(D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2ar + a^2 = 0 \text{ de racines double } a.$$

On a alors $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$ donnent

$$D_n = (n + 1)a^n$$

Exercice 59 : [énoncé]

D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{vmatrix} = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Après calculs

$$\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda)$$

On a donc

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \iff \lambda = 1, 2 \text{ ou } 4$$

(b) Après résolution de l'équation $f(x) = \lambda x$ pour $\lambda = 1, 2$ ou 4 , on obtient

$$\varepsilon_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, \varepsilon_2 = e_1 - e_2 + e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

convenables.

Exercice 61 : [énoncé]

Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On sait

$$\det(A + xB) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + xb_{\sigma(i),i})$$

La fonction $x \mapsto \det(A + xB)$ est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas en 0 (car $\det(A) \neq 0$), donc elle ne s'annule pas sur un voisinage de 0 ce qui résout le problème posé.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) En écrivant la première colonne comme somme de deux colonnes on obtient

$$\det M = 1 - (-1)^n \alpha^n$$

(b) Si $\det M \neq 0$ alors M est inversible et $\text{rg } M = n$.

Si $\det M = 0$ alors M n'est pas inversible donc $\text{rg } M < n$.

Or M possède une matrice extraite de rang $n - 1$ donc $\text{rg } M = n - 1$.

Finalement

$$\text{rg } M = \begin{cases} n - 1 & \text{si } -\alpha \in U_n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) En sommant toutes les colonnes sur la première colonne

$$\det M(a, b) = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$$

puis en retirant la première ligne au suivante

$$\det M(a, b) = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a - b & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a - b \end{vmatrix} = (a + (n - 1)b)(b - a)^{n-1}$$

(b) Si $a = b = 0$ alors

$$\text{rg } M(a, b) = 0$$

Si $a = b \neq 0$ alors

$$\text{rg}(M(a, b)) = 1$$

Si $a \neq b$ et $a + (n - 1)b \neq 0$ alors

$$\text{rg } M(a, b) = n$$

Si $a \neq b$ et $a + (n - 1)b = 0$ alors

$$\text{rg } M(a, b) = n - 1$$

car $M(a, b)$ possède une matrice de rang $n - 1$ inversible puisque $a \neq b$ et $a + (n - 2)b \neq 0$.

Exercice 64 : [énoncé]

Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$. Le déterminant de A ainsi que celui de son inverse sont des entiers. Puisque

$$\det A \times \det A^{-1} = 1$$

on en déduit $\det A = \pm 1$. Inversement, si une matrice $A \in M_n(\mathbb{Z})$ est de déterminant ± 1 alors son inverse, qui s'exprime à l'aide de la comatrice de A , est à coefficients entiers. Ainsi les matrices de $GL_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1 . Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{Z})$ dont la première ligne est formée par les entiers $a_1, \dots, a_n$. En développant le calcul de $\det A$ selon la première ligne de la matrice, on obtient une relation de la forme

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 1$$

avec les u_k égaux, au signe près, à des mineurs de la matrice A . Ces u_k sont donc des entiers et la relation qui précède assure que les entiers $a_1, \dots, a_n$ sont premiers dans leur ensemble.

Pour établir la réciproque, raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$ pour établir qu'il existe une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de déterminant 1, dont la première ligne est $a_1, \dots, a_n$ premiers dans leur ensemble.

Pour $n = 2$. Soient a, b deux entiers premiers entre eux. Par l'égalité de Bézout, on peut écrire

$$au + bv = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}$$

Considérons alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -v & u \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

Celle-ci étant de déterminant 1, elle appartient à $GL_2(\mathbb{Z})$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.

Soient $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ des entiers premiers dans leur ensemble. Posons

$$d = \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$$

Les entiers d et a_{n+1} étant premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$du + a_{n+1}v = 1$$

De plus, on peut écrire

$$a_1 = da'_1, \dots, a_n = da'_n$$

avec $a'_1, \dots, a'_n$ premiers dans leur ensemble.

Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$$

de déterminant 1.

Considérons alors la matrice

$$\begin{pmatrix} da'_1 & da'_2 & \dots & da'_n & a_{n+1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} & 0 \\ -va'_1 & -va'_2 & \dots & -va'_n & u \end{pmatrix}$$

Celle-ci est à coefficients entiers et en développant son déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient 1.

Récurrence établie.

Exercice 65 : [énoncé]

On a $H^{-1} = \frac{1}{\det H} {}^t \text{Com } H$ avec $\text{Com } H = (H_{i,j})$.

Par opérations élémentaires,

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

En simplifiant les facteurs communs, on obtient

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = \frac{(-1)^{k+\ell} (n+k-1)!(n+\ell-1)!}{(k+\ell-1)(k-1)!^2(\ell-1)!^2(n-k)!(n-\ell)!}$$

puis

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = (-1)^{k+\ell} (k+\ell-1) \binom{n+k-1}{k+\ell-1} \binom{n+\ell-1}{k+\ell-1} \binom{k+\ell-2}{k-1} \in \mathbb{Z}$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \frac{(d-a)(c-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \frac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \end{cases}$$

(b) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)(d+b+c)}{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$

et y, z par symétrie.

Exercice 67 : [énoncé]

Le système est de Cramer via déterminant de Vandermonde.

(1) + (2) + (3) donne

$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

(1) + $j^2(2)$ + $j(3)$ donne

$$y = \frac{a+bj^2+cj}{3}$$

et (1) + $j(2)$ + $j^2(3)$ donne

$$z = \frac{a+bj+cj^2}{3}$$

Exercice 68 : [énoncé]

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \bar{a} & 1 & a \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & \bar{a}(1-|a|^2) & 1-|a|^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & 0 & 1-|a|^2 \end{vmatrix}$$

Si $|a| \neq 1$ alors est le système est de Cramer et homogène

$$\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$$

Si $|a| = 1$ alors le système équivaut à une seule équation

$$x + ay + a^2z = 0$$

car les deux autres lui sont proportionnelles. On en déduit

$$\mathcal{S} = \{(-ay - a^2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{C}\}$$

Exercice 69 : [énoncé]

Les deux systèmes proposés sont de Cramer via déterminant de Vandermonde.

(a) Si x, y, z est sa solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)$$

On en déduit

$$x = abc, y = -(ab+bc+ca) \text{ et } z = a+b+c$$

(b) Introduisons

$$P = X^4 - (x+yX+zX^2)$$

Si x, y, z est solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$$

Puisque le coefficient de X^3 dans P est nul, la somme des racines de P est nulle et donc

$$a+b+c+d=0$$

puis

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X+(a+b+c))$$

En développant, on obtient

$$x = \sigma_3\sigma_1, y = \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 \text{ et } z = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les expressions symétriques élémentaires en a, b, c .

Exercice 70 : [énoncé]

(a) Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

Par suite si tous les $a_{i,j}$ sont entiers, $\det A$ l'est aussi.

(b) ($\implies$) Si A et A^{-1} sont à coefficients entiers alors $\det A \in \mathbb{Z}$ et $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$.

Or $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$

Donc $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$.

($\impliedby$) Si $\det A = \pm 1$ alors A est inversible car de déterminant non nul

Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com} A = \pm {}^t \text{Com} A$$

Or la comatrice de A est formée des cofacteurs de A qui sont des entiers car égaux à des déterminants de matrices à coefficients entiers (car extraites de A).

Ainsi A^{-1} est une matrice à coefficients entiers

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Si $\text{rg}(A) = n$ alors A est inversible et sa comatrice l'est alors aussi donc

$$\text{rg}(\text{Com}(A)) = n$$

Si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n - 1$ non nul.
Par suite $\text{Com}(A) = O_n$ et donc

$$\text{rg}(\text{Com}(A)) = 0$$

Si $\text{rg}(A) = n - 1$, exploitons la relation $A^t \text{Com}(A) = \det(A) \cdot I_n = O_n$.

Soient f et g les endomorphismes de K^n canoniquement associés aux matrices A et ${}^t \text{Com}(A)$.

On a $f \circ g = 0$ donc $\text{Im } g \subset \ker f$. Comme $\text{rg}(f) = n - 1$, $\dim \ker f = 1$ et par suite $\text{rg}(g) \leq 1$.

Ainsi $\text{rg}(\text{Com}(A)) \leq 1$.

Comme $\text{rg}(A) = n - 1$, il existe un déterminant extrait non nul d'ordre $n - 1$ et par suite $\text{Com}(A) \neq O_n$.

Finalement

$$\text{rg}(\text{Com}(A)) = 1$$

(b) Comme $A^t \text{Com}(A) = \det(A) \cdot I_n$ on a

$$\det(A) \det \text{Com}(A) = (\det A)^n$$

Si $\det A \neq 0$ alors

$$\det \text{Com}(A) = (\det A)^{n-1}$$

Si $\det A = 0$ alors $\text{rg}(\text{Com}(A)) \leq 1 < n$ donc

$$\det(\text{Com}(A)) = 0$$

(c) Si $\text{rg}(A) = n$ alors

$${}^t \text{Com}(\text{Com}(A)) \cdot \text{Com}(A) = \det(\text{Com}(A)) \cdot I_n = \det(A)^{n-1} \cdot I_n$$

Donc

$${}^t \text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-1} \text{Com}(A)^{-1}$$

Or ${}^t \text{Com}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ donc

$${}^t \text{Com}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$$

puis sachant ${}^t(B)^{-1} = ({}^t B)^{-1}$ on a :

$$\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$$

Si $\text{rg}(A) \leq n - 1$ et $n \geq 3$ alors $\text{rg}(\text{Com } A) \leq 1 \leq n - 2$ donc

$$\text{Com}(\text{Com}(A)) = O_n$$

Si $n = 2$ alors pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \text{Com}(\text{Com}(A)) = A$$

Exercice 72 : [énoncé]

Cas A et B inversibles

Puisque A et B commutent, leurs inverses commutent aussi

On en déduit

$$\frac{1}{\det A} {}^t(\text{Com } A) \frac{1}{\det B} {}^t(\text{Com } B) = \frac{1}{\det B} {}^t(\text{Com } B) \frac{1}{\det A} {}^t(\text{Com } A)$$

En simplifiant et en transposant on obtient

$$\text{Com}(A) \text{Com}(B) = \text{Com}(B) \text{Com}(A)$$

Cas général

Pour p assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p} I_n \text{ et } B + \frac{1}{p} I_n$$

sont inversibles et commutent donc

$$\text{Com}\left(A + \frac{1}{p} I_n\right) \text{Com}\left(B + \frac{1}{p} I_n\right) = \text{Com}\left(B + \frac{1}{p} I_n\right) \text{Com}\left(A + \frac{1}{p} I_n\right)$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\text{Com}(A) \text{Com}(B) = \text{Com}(B) \text{Com}(A)$$

Exercice 73 : [énoncé]

Soit M solution de l'équation étudiée.

Puisque

$${}^t(\text{Com } M)M = \det(M)I_n$$

on obtient

$${}^t M M = \det(M)I_n$$

et donc

$$\text{tr}({}^tMM) = n \det M$$

Or

$$\text{tr}({}^tMM) = \sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2$$

donc $\det M \geq 0$.

De plus, en passant la relation ${}^tMM = \det(M)I_n$ au déterminant, on obtient

$$(\det M)^2 = (\det M)^n$$

Cas $n \neq 2$

On obtient $\det M = 0$ ou 1 .

Dans le cas $\det M = 0$, on obtient $\text{tr}({}^tMM) = 0$ et donc $M = O_n$.

Dans le cas $\det M = 1$, on obtient ${}^tMM = I_n$ et donc M est une matrice orthogonale de déterminant 1 .

Inversement, la matrice nulle est solution de l'équation étudiée et si M est une matrice orthogonale de déterminant 1 alors

$${}^t(\text{Com } M)M = I_n = {}^tMM$$

ce qui donne $\text{Com } M = M$ sachant M inversible.

Cas $n = 2$

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\text{Com } M = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc $\text{Com } M = M$ si, et seulement si, M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 74 : [énoncé]

- (a) On sait $AB = BA = \det(A)I_n$.
 Si $\text{rg } A = n$ alors A est inversible donc B aussi et $\text{rg } B = n$.
 Si $\text{rg } A = n - 1$ alors $\dim \ker A = 1$ et puisque $AB = O_n$, $\text{Im } B \subset \ker A$ puis $\text{rg } B \leq 1$.
 De plus, la matrice A étant de rang exactement $n - 1$, elle possède un mineur non nul et donc $B \neq O_n$. Finalement $\text{rg } B = 1$.
 Si $\text{rg } A \leq n - 2$ alors tous les mineurs de A sont nuls et donc $B = O_n$ puis $\text{rg } B = 0$.
- (b) Puisque $\text{rg } A = n - 1$, $\dim \ker A = 1$ et $\dim \ker {}^tA = 1$.
 Il existe donc deux colonnes X et Y non nulles telles que

$$\ker A = \text{Vect } X \text{ et } \ker {}^tA = \text{Vect } Y$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AM = MA = O_n$.

Puisque $AM = O_n$, $\text{Im } M \subset \ker A = \text{Vect } X$ et donc on peut écrire par blocs

$$M = (\lambda_1 X \mid \dots \mid \lambda_n X) = XL$$

avec $L = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$.

La relation $MA = O_n$ donne alors $XLA = O_n$ et puisque $X \neq 0$, on obtient $LA = 0$ puis ${}^tA^tL = 0$. Ceci permet alors d'écrire L sous la forme $L = \lambda^t Y$ puis M sous la forme

$$M = \lambda X^t Y$$

Inversement une telle matrice vérifie $AM = MA = O_n$ et donc

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA = O_n\} = \text{Vect}(X^t Y)$$

Cet espace de solution étant une droite et la matrice B étant un élément non nul de celle-ci, il est dès lors immédiat d'affirmer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AC = CA = O_n$ est nécessairement colinéaire à B .

Exercice 75 : [énoncé]

Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. $U = u^t(\text{Com } A)$ et $V = v^t(\text{Com } B)$ conviennent alors.

Exercice 76 : [énoncé]

Le coefficient d'indice (i, j) de la comatrice de S est

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

avec $\Delta_{i,j}$ le mineur d'indice (i, j) de la matrice S i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de S . Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée et puisque la matrice S est symétrique, le mineur d'indice (i, j) est égal à celui d'indice (j, i) . On en déduit que la comatrice de S est symétrique.

Exercice 77 : [énoncé]

On réalise les opérations élémentaires $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$, $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}, \dots$, $C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$:

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne et on factorise par ligne :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

On réitère

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \prod_{j=3}^n (x_j - x_2) \dots \prod_{j=n}^n (x_j - x_{n-1}) V_1(x_n)$$

avec $V_1(x_n) = 1$.

Ainsi

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Exercice 78 : [énoncé]

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_{n-1} = -(a_1 + \dots + a_n)$.

En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k C_{k+1}$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$a_i^n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k a_i^k = P(a_i) - \alpha_{n-1} a_i^{n-1} = -\alpha_{n-1} a_i^{n-1} \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{pmatrix} = -\alpha_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_n = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Exercice 79 : [énoncé]

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k = (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1, \dots, a_n$.

En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j C_{j+1} + \sum_{j=n}^{n-1} \alpha_j C_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$D_k = (-1)^{n+1-k} \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \dots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \dots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}$$

En permutant de façon circulaire les $n - k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Exercice 80 : [énoncé]

En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n - 1$.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1} \prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i) V_{n-1}(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_k, \dots, \lambda_n) = (-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $V_n(a_1, \dots, a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1, \dots, a_n)$.

Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Exercice 81 : [énoncé]

On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det D = \det(AD - BC) \det D$$

On peut alors conclure sachant $\det D \neq 0$.

Exercice 82 : [énoncé]

On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C) \det D = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

Exercice 83 : [énoncé]

Supposons pour commencer la matrice A inversible.

Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(D - BA^{-1}C) \det A = \det(DA - BA^{-1}CA)$$

Or les matrices A et C commutent donc A^{-1} et C commutent aussi et

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(DA - BC)$$

Supposons A non inversible.

Pour p assez grand, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc

$$\det \begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, la continuité du déterminant donne

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 84 : [énoncé]

(a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A \end{pmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & iB \\ A - iB & -A + iB \end{pmatrix}$$

et par opérations sur les colonnes

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A + iB & iB \\ 0 & -A + iB \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A + iB) \det(-A + iB)$$

et enfin

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB)$$

Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$.

(b) $\det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

(d) Si A est inversible, on remarque

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

donc $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - CB)$ car A et C commutent.

On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :

Les applications $A \mapsto \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD - CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C . Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A + \lambda I_n$ est inversible et commute avec C . Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Exercice 85 : [énoncé]

(a) Par opération sur les colonnes puis sur les lignes

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

(b) De façon analogue

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} = |A+iB|^2 \geq 0$$

Exercice 86 : [énoncé]

(a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} + L_n,$

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B + I_n & I_n + B \end{vmatrix}$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n},$

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B) \det(I_n + B)$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $I_n - B$ et $I_n + B$ le sont (i.e. $1, -1 \notin \text{Sp } B$).
On aurait aussi pu étudier le noyau de A .

(b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M + BN = I_n \\ BM + N = O_n \end{cases} \iff \begin{cases} M = (I_n - B^2)^{-1} \\ N = -B(I_n - B^2)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n - B^2)^{-1} & -B(I_n - B^2)^{-1} \\ -B(I_n - B^2)^{-1} & (I_n - B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On aurait pu aussi inverser l'équation $AX = Y$

Exercice 87 : [énoncé]

On introduit

$$N = \begin{pmatrix} {}^t A' & O_{p,n-p} \\ {}^t B' & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^t A' + B^t B' & B \\ C^t A' + D^t B' & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^t(\text{Com } M) = \begin{pmatrix} A^t A' + B^t B' & A^t C' + B^t D' \\ C^t A' + D^t B' & C^t C' + D^t D' \end{pmatrix} = (\det M)^n I_p$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} \det(M) I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on obtient

$$\det M \times \det {}^t A' = \det(M)^p \det D$$

puis facilement la relation proposée sachant $\det M \neq 0$.

Exercice 88 : [énoncé]

(a) Cas D inversible

Sachant $C^t D = D^t C$, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t D & O_n \\ -{}^t C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t D - B^t C & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant on obtient la relation

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det {}^t D = \det(A^t D - B^t C) \det D$$

puis la relation voulue sachant $\det D = \det {}^t D \neq 0$

(b) Cas D non inversible

Posons $r = \text{rg } C$. On peut écrire $C = P J_r Q$ avec P, Q inversibles et J_r la matrice (symétrique) dont tous les coefficients sont nuls sauf les r premiers de la diagonale qui sont égaux à 1. Considérons alors $D' = D + \lambda P^t Q^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut écrire

$$D' = P(P^{-1} D^t Q + \lambda I_n)^t Q^{-1}$$

Si $-\lambda$ n'est pas valeur propre de $P^{-1} D^t Q$, la matrice D' est inversible.

Puisqu'une matrice n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, la matrice D' est assurément inversible quand $\lambda \rightarrow 0^+$ avec λ assez petit.

De plus, $C'D'$ est symétrique car

$$C'D' - D'^tC = C'D + \lambda P J_r Q Q^{-1t} P - D'^tC - \lambda P^t Q^{-1t} Q^t J_r^t P = 0$$

Par l'étude qui précède, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D' \end{pmatrix} = \det(A'D' - B^tC)$$

et en passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A'D - B^tC)$$

Exercice 89 : [énoncé]

Cas où la matrice A inversible :

Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice C commute avec les matrices A et B .

On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices A_p, B, C, D commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_p D - BC)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de M équivaut à celle de $AD - BC$.