TEST DE NIVEAU

SESSION 2023

Coefficient : 4

NIVEAU : T^{le} D

Durée : 4h

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois pages numérotés 1/3 à 3/3
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisée

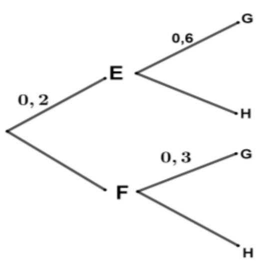
EXERCICE 1 (2pts)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivie de **V** si l'affirmation est vraie ou de **F** si l'affirmation est fausse.

1. f étant une fonction dérivable sur I, s'il existe un nombre réel tel que $\forall x \epsilon I$, $|f'(x)| \leq m$ alors pour tous nombres réels a et b de I, on a : $|f(a) - f(b)| \leq |b - a|$.
2. $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative d'une fonction f telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ Alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ).
3. Si B et $\bar{B}$ sont deux événements contraires, alors $P(\bar{B}) = -P(B) + 1$.
4. Toute fonction numérique f dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle.

EXERCICE 2 (2pts)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule affirmation est juste. Ecris sur ta copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation correcte.

N°	Enoncé	AFFIMATIONS	
1	f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) = 2x - 2$ Sa courbe représentative admet un point d'inflexion en	A	$(1\ ; f(1))$
		B	$(2\ ; f(2))$
		C	$(0\ ; f(0))$
2	f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2(3x+1)^3$ a pour dérivée $f'(x) =$	A	$2x(3x+1)^2(15x+2)$
		B	$x(3x+1)^2(15x+2)$
		C	$x(3x+1)(15x+2)$
3	On considère l'arbre pondéré ci-dessous  $P_G(F)$ égale à	A	0,7
		B	0,58
		C	0,87
4	$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\pi \tan x}{2x}\right)$	A	$\frac{2}{\pi}$
		B	$\frac{\pi}{2}$
		C	π

EXERCICE3 *(3pts)*

A. Soit la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \epsilon]1\,;+\infty[\; g(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la primitive G de g qui s'annule en 0

B. Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{6x-4}{(2x-1)^3}$

1. Détermine les nombres réels a et b tel que $\forall x \epsilon \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{(2x-1)^3}$.
2. Détermine la primitive F de f sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ qui prend la valeur 0 en 1.

EXERCICE 4 *(4pts)*

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.

Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population.

On note :

B L'évènement : « l'élève est bachelier »

T L'évènement : « l'élève est admis au test »

A L'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test ».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
   a) La probabilité $P(B)$ de l'évènement B ;
   b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;
   c) La probabilité $P_{\overline{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé ;
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3.
3. Calculer la probabilité de l'évènement T.
4. Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiant bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera ses paramètres.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 3 étudiants bacheliers et admis au test
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

EXERCICE5 *(5pts)*

Soit la fonction h définie sur $[-1;+\infty[$ par $h(x)=\frac{x^2\sqrt{x+1}}{|x|}$ si $x\neq 0$ et $h(0)=0$, de représentation graphique (C_h) dans le plan muni d'un repère $(0, I, J$I). Unité graphique : 3 cm.

1.a) Démontrer que $\begin{cases} h(x)=-x\sqrt{x+1}, \forall x\epsilon[-1;0[\\ h(x)=x\sqrt{x+1}, \forall x\epsilon[0;+\infty[\end{cases}$

b) Etudier la continuité de h en 0.

c) Etudier la dérivabilité de h à gauche et à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

d) Etudier la dérivabilité de h à droite en -1 et donner une interprétation graphique du résultat.

2. Calculer les limites de $h(x)$ et $\frac{h(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ Puis donner une interprétation graphique du résultat.

3.a) Calculer $h'(x)$ $\forall x\epsilon[-1;0[$ et $\forall x\epsilon[0;+\infty[$.

b) Etudier le signe de $h'(x)$.

c) Donner le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

4. Soit g la restriction de h à $[0;+\infty[$.

a) Démontrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note g^{-1} sa bijection réciproque et $(C_{g^{-1}})$, la représentation graphique de g^{-1}.

b) Calculer $g(1)$ et justifier que g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$, puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

c) Donner une équation de la tangente (T) à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

5. Construire (T),(C_h) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

EXERCICE 6 *(4pts)*

A la veille des congés de noël, les élèves de terminale D du Collège Sainte Foi d'Abobo décident d'organiser une journée récréative. A cette journée, ils veulent organiser des jeux dont l'un se présente sous la forme suivante : Dans une urne se trouve 10 jetons indiscernable au toucher dont 4 sont rouges,2sont verts,3sont blancs et 1 noir.

Le jeu consistera à miser 200fr, puis à tirer au Hazard 1 jeton de l'urne.

- Si le joueur tire 1 jeton vert, il gagne 1000fr et une enveloppe contenant un montant **S**
- Si le joueur tire un jeton blanc, il gagne une enveloppe contenant une somme **S**.
- Si le joueur tire 1 jeton rouge, il paie 1000fr aux organisateurs du jeu.
- Si le joueur tire le jeton noir, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage.
  - Si le nouveau jeton tiré est noir, il paie 300fr aux organisateurs du jeu
  - Dans les autres cas il gagne 200fr.

Le président du conseil scolaire veut déterminer la valeur de la somme **S** à mettre dans les enveloppes pour que le gain moyen d'un joueur soit 2500fr.

Ne sachant pas comment déterminer ce montant **S,** il te sollicite.

En utilisant tes connaissances mathématiques, trouve une solution à la préoccupation du président du conseil scolaire.