FICHE DE TD N° 3 MATHS Premières C, D et E : trigonométrie, fonctions numériques, barycentre

I- Trigonométrie

Exercice 1

1. Déterminer le nombre réel a, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ tel que : $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos(x+a)$ **1 pt**
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$ **2 pts**
3. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique **1 pt**

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel x, $\cos x \sin x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\sin 16x$
2. En déduire que $\cos\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$.
3. On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :
   $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.
   (a) Calculer $P(-1)$; en déduire que $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
   (b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ et en déduire dans $]-\pi; \pi[$ les solution de l'équation : $2\sin^3 2x + 5\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$

Exercice 3

1. Donner les valeurs exactes du cosinus, sinus et de la tangente $\frac{\pi}{12}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$
2. On considère l'équation (E) : $\sin 3x = \sin 2x$.
3. Résoudre (E) dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$, puis représenter les points images des solutions sur le cercles trigonométrique (unité graphique : 2cm).
4. (a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$.
   (b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à (E') : $\sin x(4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = 0$
   (c) Quelle sont parmi les solutions de (E) trouvées à la question 1., celles qui sont solution de (E'') : $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.
5. (a) Résoudre dan $\mathbb{R}$ l'équation : $4t^2 - 2t - 1 = 0$
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$

Exercice 4

1. (a) Démontrer que pour tout réel α, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.
   (b) En remarquant que $\dfrac{\pi}{6} = 2\times\dfrac{\pi}{12}$ donner les valeurs exactes du cosinus ,du sinus et de la tangente $\dfrac{\pi}{12}$
2. (a) Écrire $(1-\sqrt{3})^2$, puis $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des réels.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-(3-\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}=0$

   (c) En déduire dans $[0;2\pi[$, les solutions de l'équation
   $\tan^2 2x-(3-\sqrt{3})\tan 2x+2-\sqrt{3}=0$.
   (d) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométriques.

Exercice 5

1. Déterminer la mesure principale de $\dfrac{11\pi}{6}$.
2. Déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\dfrac{11\pi}{6}$.
3. En déduire que $\cos^2\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ et que $\sin^2\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$
4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$ en justifiant les réponses.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x-\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x=-\sqrt{2}$
6. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x-\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos x\geq-\sqrt{2}$

Exercice 6

1. (a) Démontrer que $\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x$
   (b) Montrer que $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$
   (c) Soit (E) l'équation $\dfrac{2}{1+\tan^2 x}+(1-\sqrt{2})\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$
   Résoudre (E) dans $[0;2\pi]$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.
   (d) En déduire dans $[0;2\pi]$ les solutions de l'inéquation
   $\dfrac{2}{1+\tan^2 x}+(1-\sqrt{2})\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$
2. On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$
   (a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$
   (b) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $f(x)-1=0$

Exercice 7

1. (a) Vérifier que : $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2+2(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$
   (c) En déduire dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ les solutions de l'équation
   $4\sin^2 x+2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sin x-\sqrt{6}=0$
   (d) Placer les points A ; B ; C et D , images respectives des solutions x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que $x_1<x_2<x_3<x_4$
   (e) Quelle est la nature du polygone $ABCD$? Calculer la valeur exacte de son aire

2. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation $4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{6} \geq 0$

Exercice 8

1. Déterminer le nombre réel a, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ tel que : $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos(x + a)$
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$
3. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique

Exercice 9

1. Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2. En déduire que : $\tan 3x = \tan x \dfrac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

Exercice 10

On rappelle que $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Démontrer que pour tout élément x de $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})\}$
   $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.
2. On pose $t = \tan \dfrac{\pi}{12}$, montrer que t est une solution de l'équation (E) : $x^2\sqrt{3} + 6x - \sqrt{3} = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
4. En déduire que $\tan \dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.
5. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\tan x \geq 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 11

1. On considère l'équation (E) : $|\cos x| = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$. Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$.
2. En déduire que l'équation (E) peut s'écrire : $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y^2 + 2y - 1 = 0$.
2. Démontrer que pour tout élément a et b de $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$
   $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, puis en déduire l'expression de $\tan 2a$ en fonction de $\tan a$ pour a élément de $\mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})\}$.
3. Déduire de ce qui précède que $\tan \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
4. Soit l'équation (E) $\cos a - (\sqrt{2} + 1)\sin a = 0$.
   (a) Montrer que (E) est equivalent à (E') : $\tan a = \sqrt{2} - 1$.
   (b) Résoudre (E'), puis en déduire les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'équation (E).

(c) Représenter les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.

5. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\tan a \geq \sqrt{2} - 1$.

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$.
2. Déterminer deux nombres a et ϕ tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, on ait : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = a\cos(x - \phi)$.
3. (a) Utiliser les résultats des questions 1) et 2) pour résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation
   (E) : $(2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3)(\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0$.

   (b) Représenter les images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

Exercice 14

Soit A l'expression définie par $A(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$

1. Exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$. **(0,5pt)**
2. Exprimer $\sin 2x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. **(0,5pt)**
3. Montrons que $A(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où a et b sont à déterminer. **(0,5pt)**
4. Montrer que $A(x) = a_1\cos(2x + \alpha)$ où a_1 et α sont à déterminer. **(1pt)**
5. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $A(x) = 1$ et représenter les images des solutions dans le cercle trigonométrique. **(1pt)**
6. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $A(x) \geq 1$. **(0,5pt)**

Exercice 15

A, B et C sont trois points non alignés du plan et E le milieu du segment $[AC]$. Soit t un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. a. Vérifier que : $cos^2t + sin^2t + cos2t = 2cos^2t$. **0,5pt**

   b. Pour quelles valeurs de t, le système $\{(A, cos^2t) ; (B, sin^2t) ; (C, cos2t)\}$ possède un barycentre ? Lorsqu'il existe, ce barycentre est noté G_t.

2. On suppose que ABC est un triangle rectangle en C tel que CA=4 et CB=2.
On note G le barycentre obtenu pour $t = \frac{\pi}{3}$.

   a. Construire le point G.

   b. Démontrer que GA^2=GC^2.

c. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = 10.$$

Exercice 16

On considère le polynôme P défini par $P(x) = 2\sqrt{2}x^3 - (6 - \sqrt{2})x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3$

1. Vérifier que $P(x) = (x + 1)\left(2\sqrt{2}x^2 - (6 + \sqrt{2})x + 3\right)$
2. a. Calculer $(6 + \sqrt{2})^2$

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$
3. a. En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation
$$(E): 2\sqrt{2}sin^3x - (6 - \sqrt{2})sin^2x - (3 + \sqrt{2})sinx + 3 = 0$$
   b. En déduire dans $]-\pi; \pi]$ les solutions de l'équation
$$(E): 2\sqrt{2}sin^3x - (6 - \sqrt{2})sin^2x - (3 + \sqrt{2})sinx + 3 = 0$$

c. Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique

d. En déduire dans $]-\pi;\ \pi]$ les solutions de l'inéquation

$$(E): 2\sqrt{2}sin^3x - (6-\sqrt{2})sin^2x - (3+\sqrt{2})sinx + 3 \leq 0$$

Exercice 17

1) Vérifier que $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

3)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0$

4) Déduire de la question 2) la résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'équation
$2\sin^2 x + (1-\sqrt{2})\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

5) Placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions de
$2\sin^2 x + (1-\sqrt{2})\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

6) Déduire de la question 3) la résolution dans $]-\pi,\pi]$ de l'inéquation
$2\sin^2 x + (1-\sqrt{2})\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0$

Exercice 18

1) Soit x un nombre rèel.

a) Démontrer que $\sin(x)\cos(x)\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x) = \frac{1}{16}\sin(16x)$.

b) En déduire la valeur exacte de $A = \sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}$.

2) a) Démontrer que $\tan(x) = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$

b) En déduire la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{12})$ et $\tan(\frac{\pi}{8})$

c) Démontrer que $\tan(3x) = \tan x \times \frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$ et en déduire la valeur exacte de $\tan(\frac{3\pi}{8})$

II- Fonctions

exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1°) $f(x) = \sqrt{-x}$ 2°) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ 3°) $f(x) = \sqrt{1-x}$

4°) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$ 5°) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$

6°) $f(x) = \sqrt{|-x|}$ 7°) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{-x}}$

8°) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2x+1}$ 9°) $f(x) = \frac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$ 10°) $f(x) = \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$

11°) $f(x) = \frac{1+\sqrt{|-x|}}{1-\sqrt{|-x|}}$ 12°) $f(x) = \frac{2x-3}{6x^2-13x-5}$

13°) $f(x) = \frac{2x-3}{6x^2-|13x-5|}$ 14°) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$

16°) $\frac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$ 17°) $f(x) = \frac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$

18°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}}$ 19°) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-6x^2+13x+5}{2x-3}}$

20°) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$

21°) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2-14x-5} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+11x-15}} & si\ x > 1 \end{cases}$

22°) $f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{(1+x)(2-x)}}{x(2x-1)}$ 23°) $f(x) = \dfrac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1+x}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions numériques définies ci-dessous, préciser l'ensemble de définition suivant les valeurs du paramètre réel m .

1°) $f(x) = \dfrac{3}{|x|+m}$ 2°) $\sqrt{x^2+m}$ 3°) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-mx+1}$ 4°) $f(x) = \sqrt{x^2-mx+1}$

Exercice 3

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des **applications** :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sqrt{x}$

$h : [2 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x-2}$

$i : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

$j : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

$k : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$

$m : [0 ; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$n :]-\infty ; 0[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x-1}{x-3}$

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui définissent une **bijection** .Dans ce cas, déterminer la **bijection réciproque** .

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x^2$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$f_4 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{-x}$

$f_5 : [0\,;1] \to [0\,;1]$ $\quad x \mapsto 1 - x$

$f_6 : [\,4\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}_-$ $\quad x \mapsto -\sqrt{x-4}$

$f_7 : \mathbb{R}_- \to \,]-\infty\,;5]$ $\quad x \mapsto -x^2 + 5$

$f_8 : [\,2\,;+\infty\,[\to [\,3\,;+\infty\,[$ $\quad x \mapsto 3 + \sqrt{x-2}$

$f_9 : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier si l'application f de E vers F est injective, surjective ou bijective .

1°) $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$

2°) $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

3°) $E = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $F = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

4°) $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x^2 - 4$

5°) $E = \mathbb{R}$, $F = [\,-3\,;+\infty\,[$, $f(x) = 2x^2 - 3$

6°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = x - 1$, si x est impair : $f(x) = x + 1$

7°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = \dfrac{x}{2}$, si x est impair : $f(x) = \dfrac{x-1}{2}$

8°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = 2x$, si x est impair : $f(x) = 2x + 1$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$

1°) Déterminer son ensemble de définition D .

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$, où y est un paramètre réel .

L'application $f : D \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

3°) Déterminer deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandes possibles , pour que l'application $g : E \to F$, $x \mapsto f(x)$ soit bijective . Définir alors g^{-1} .

Exercice 7

Soit la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous, représentative de la fonction f : $x \to x^3 - 4x^2 + 3$, et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 3$.

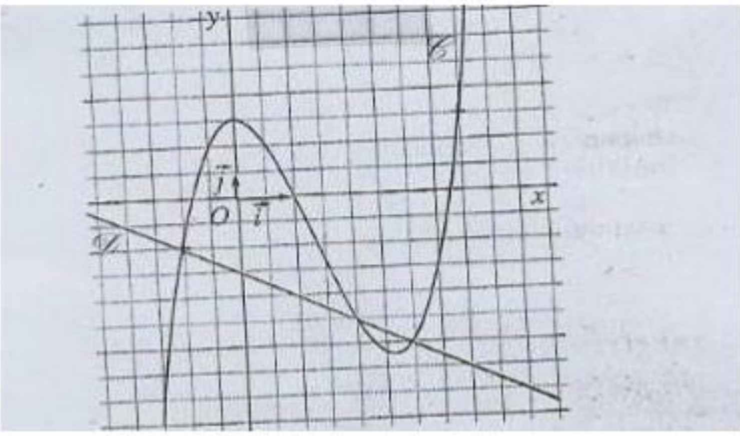
1°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$, puis l'inéquation $f(x) < 3$.

2°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) \geq 0$.

On donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} des solutions non entières .

3°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$, puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$.

4°) Retrouver algébriquement les résultats des questions 1°, 2° et 3° .



Exercice 8

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ si $x \neq -2$ et $f(-2) = 1$, et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to 2x + 3$

1°) Déterminer les fonctions $f + g$, fg , $\dfrac{f}{g}$, $3f - 2g$.

2°) Déterminer et comparer les fonctions $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$.

Exercice 9

Déterminer les ensembles de définition des fonctions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ et $g(x) = x^2 + x$

Exercice 10

Quel est l'ensemble de définition de $(f \circ f)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ b) $f(x) = \sqrt{1-x}$ c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

d) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2-x}$

Exercice 11

Ecrire f sous la forme d'une composée de deux (ou plusieurs) fonctions usuelles :

a) $f(x) = (5x+1)^2 + 2$ b) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ c) $f(x) = \left(1 - \dfrac{3}{x+1}\right)^2$.

d) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+\sqrt{x-3}\,)^2}$

Exercice 12

Soit les fonctions $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_4 : x \mapsto 3x - 2$,

$f_5 : x \mapsto x^3$.

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide de ces fonctions :

a) $f : x \mapsto 3\sqrt{x} - 2$ **b)** $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ **c)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{3x-2}$ **d)** $j : x \mapsto (3x-2)^3$

e) $k : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **f)** $l : x \mapsto \sqrt{3x-2}$

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions (f + g), (fg), (g o f) et (f o g) . Préciser d'abord l'ensemble de définition de chacun d'eux .

1°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - x^2$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

3°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ 4°) $f(x) = |\,x\,|$ et $g(x) = \sqrt{x}$

5°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{2x+3}$ 6°) $f(x) = x - 3$ et $g(x) = (2x+1)(2x+5)$

Exercice 14

1°) Soient f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $h(x) = x - 1$.

a) Déterminer les fonctions (g o f) et (h o g) .

b) Montrer que les fonctions [(h o g) o f] et [h o (g o f)] ont même ensemble de définition D puis que pour tout x de D, on a : [(h o g) o f] (x) = [h o (g o f)] (x) .

N.B. On peut donc écrire sans ambiguïté : (h o g o f) (x) .

2°) Soient f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = 3x$; $g(x) = 1 + x^2$; $h(x) = \sqrt{x}$. Déterminer et comparer les fonctions (f o g o h) et (h o g o f) .

Exercice 15

On donne les fonctions f, g, h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$f(x) = \frac{x^3}{|x|} + 1$; $g(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$; $h(x) = |2x+1| - |x-3| + 4$.

Déterminer les restrictions :

1°) de f à $\mathbb{R}^{*+}$, à $\mathbb{R}^{*-}$, à $[-1 ; 1] \setminus \{0\}$.

2°) de g à $\mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}$, à $\mathbb{R}^{-} \setminus \{1\}$.

3°) de h à $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ à $[-\frac{1}{2} ; 3]$ et à $[3 ; +\infty[$.

Exercice 16

On considère les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3x - 5$; $x \to \frac{2x^2+1}{x^2+1}$

1°) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq g(x) < 2$.

2°) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

3°) Démontrer que la fonction $(g \circ f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4°) Démontrer que la fonction $(f \circ g)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq (f \circ g)(x) < 1$$

Exercice 17

Après avoir précisé leur ensemble de définition, étudier la parité des fonctions suivantes :

(1) $x \to x^3 - x + 1$ **(2)** $x \to x^2 - 3x + 1$ **(3)** $x \to x^2 - 1$ **(4)** $x \to x^3 - 7x$

(5) $x \to 2x^4 + x^2 - 1$ **(6)** $x \to \sqrt{x^2 - 1}$ **(7)** $x \to x^2 - 3|x| + 1$ **(8)** $x \to \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

(9) $x \to \frac{3x}{|x^4 - x^2 + 1|}$ **(10)** $x \to \frac{x^5 - x^3 + 2x}{\sqrt{x^3 - x}}$ **(11)** $x \to \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $x \to \frac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$ **(13)** $x \to \sqrt{|x-1| + |x+1|}$ **(14)** $x \to \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$

(15) $x \to \frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{4-x^2}}$ **(16)** $x \to \sqrt{\frac{x^2-16}{4-x^2}}$ **(17)** $x \to \frac{5x^3 + 3x|x| - 2x}{x^3 - 9x}$

(18) $x \to \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

(19) $x \to$
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{x} & \text{si } -6 \leq x \leq -1 \\ f(x) = \frac{-3x^2+9}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{3}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Exercice 18

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-a ; +a]$ avec $a > 0$.

Soient g et h les fonctions telles que :

$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$; $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

1°) Démontrer que g est une fonction paire et que h est une fonction impaire .

2°) Vérifier que $f = g + h$.

3°) Déterminer g et h lorsque $f(x) = x^2 + x + 1$; lorsque $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$;

lorsque $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^2+x+1}$.

Exercice 19

Dans chacun des cas suivants, décomposer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles et en déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles donnés .

1°) $f(x) = x^2 + 4$; $I_1 = \mathbb{R}_+$; $I_2 = \mathbb{R}_-$; 2°) $f(x) = 2 - x^2$; $I_1 = \mathbb{R}_+$; $I_2 = \mathbb{R}_-$;

3°) $f(x) = (x-2)^2 + 1$; $I_1 = [2 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 2]$;

4°) $f(x) = x^2 - 4x$; $I_1 = [2 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 2]$;

5°) $f(x) = (x-1)^3$; $I_1 = [1 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 1]$; $I_3 = \mathbb{R}$

6°) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $I_1 = [1 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 1]$;

7°) $f(x) = \sqrt{5-x}$; $I = D_f$; 8°) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $I_1 = [0 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 0]$;

8°) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$; $I_1 =]0 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 0[$;

Exercice 20

Trouver le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné .

a) $x \to x\sqrt{x+3}$ $I = [1 ; +\infty[$; b) $x \to \frac{1}{x^2+1}$ $I = [0 ; +\infty[$; c) $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ $I =]0 ; +\infty[$;

d) $x \to |x|(x^2+1)$ $I =]-\infty ; 0]$ puis $I = [0 ; +\infty[$

III- Lignes de niveaux

Exercices 1

Soient A, B, C points du plan $\mathscr{P}$.

1°) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$\| 3\,\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \| = \| -\vec{MA} + 3\,\vec{MB} - \vec{MC} \|$.

2°) Existe-t-il un point M de $\mathscr{P}$ tel que :

$\| 3\,\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \| = \| -\vec{MA} + 3\,\vec{MB} - \vec{MC} \| = \| -\vec{MA} - \vec{MB} + 3\,\vec{MC} \|$?

3°) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \| = \| 2\,\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \|$.

Exercice 2

Soit A et B des points du plan tels que $AB = 4$ cm

1. Construire le barycentre G de $(A;3)$ et $(B;1)$.
2. Construire le point G' tels que $\overrightarrow{BG'} = 5\overrightarrow{AG'}$.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\pounds$ des points M du plan tels que : $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

Exercice 3

ABC est un triangle. G est le barycentre de $(A;-1), (B;2)$ et $(C;1)$.

1. a) Établir que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et construire G.
   b) Donner une autre construction de G à l'aide du barycentre partiel H de $(A;-1)$ et $(B;2)$.
2. a) Déterminer l'ensemble $\pounds$ des points M du plan tels que : $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$
   b) Vérifier que $B \in \pounds$ et construire $\pounds$.

Exercice 4

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.

1. Construire le barycentre C de $(A;-1)$ et $(B;5)$.
2. Déterminer des réels x et y tels que B soit le barycentre de $(A;x)$ et $(C;y)$.
3. Déterminer et construire l'ensemble $\pounds$ des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MC}\| = 10$

Exercice 5

Soit ABC un triangle.

1. Construire le barycentre G de $(A;1), (B;3)$ et $(C;-2)$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points P du plan tels que : $\|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\|$. Représenter $\mathcal{D}$.

Exercice 6

Soit ABC un triangle, I et J les points définis par $\overrightarrow{AI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB}$.
On note G le symétrique de B par rapport à I.
On veut établir que les G, C et J sont alignés.

1. Première méthode : utiliser un barycentre partiel.
   (a) Démontrer que G est le barycentre de $(A;2), (B;-3)$ et $(C;4)$.
   (b) En déduire que G, C et J sont alignés.

2. Deuxième méthode : utiliser un repère.
   (a) Calculer les coordonnées de G, C et J dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   (b) Retrouver que G, C et J sont alignés.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les points $A(1; -3)$ et $B(1; 3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G du plan milieu du segment $[AB]$.
2. a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MG^2 - \frac{AB^2}{4}$.
   b) En déduire la nature de Γ, ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$
   c) Construire Γ dans $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
4. Γ rencontre l'axe (Ox) en deux points C et D et la parallèle à l'axe (Oy) passant par G en deux points E et F.
   a) Déterminer les coordonnées des points C, D, E et F.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $CDEF$
   c) Calculer son aire.

Exercice 8

1. ABC est un triangle équilatéral de coté a ; A' le milieu de $[BC]$ et G est le barycentre des points $(A; -4), (B; 1)$ et $(C; 1)$. La droite (BG) coupe la droite (AC) en I.
   a) Démontrer que A est le milieu du segment $[A'G]$.
   b) Faire la figure.
   c) Écrire I comme barycentre des points A et C.
2. Déterminer en fonction de k (k réel) la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points M du plan tels que : $-4MA^2 + 2MA'^2 = k$

Exercice 9

ABC est un triangle rectangle en C ; m est un réel différent de -2. I désigne le milieu de $[AB]$ et G désigne le barycentre de $\{(A; 1); (B; 1) ; (C; m)\}$.

1. a) Que représente le point G pour le triangle ABC lorsque $m = 1$?
   b) Déterminer le lieu des points G lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction g définie pour tout M du plan par : $g(M) = MA^2 + MB^2 + mMC^2$
   a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $g(M) = (m + 2)MG^2 + g(G)$
   b) Démontrer que $g(G) = \frac{m+1}{m+2} AB^2$
3. Déterminer l'ensemble (E_m) des points M du plan tels que $g(M) = AB^2$
4. Montrer que pour tout réel $m \neq -2$, le point C appartient à (E_m) en déduire une construction de (E_3).

Exercice 10

partie A

Dans le plan (P), on considère un triangle équilatéral ABC. On pose $AB = a$. Soit I le milieu de $[BC]$ et O le centre du triangle ABC

1. a) Démontrer que le système de points pondérés $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$ admet un barycentre G. Placer les points A, B, C, I, O et G sur une même figure

   b) Démontrer que le triangle ACG est rectangle en C

2. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG} = a$ (1)

   a) Démontrer que la relation (1) équivaut à $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG} = \frac{a^2}{3}$ (2)

   b) Démontrer que A appartient à (D)

   c) Démontrer que la relation (2) équivaut à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG} = 0$

   d) En déduire l'ensemble (D)

3. Soit (E) l'ensemble défini par : $-MA^2+2MB^2+2MC^2 = \frac{110}{9}a^2$ Déterminer (E)

partie B

On donne les coordonnées de A, B et C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ tels que $A(2\sqrt{3};1-3\sqrt{3}); B(-3;-4); C(3;2)$ et $a = 6\sqrt{2}$

a) Déterminer les coordonnées de G

b) Écrire l'équation cartésienne et l'équation paramétrique de (E)

c) Écrire l'équation cartésienne de (D) puis étudier la position relative de $(D)\cap(E)$

Exercice 11

ABC est un triangle équilatéral de côté 4. D est le point du plan tel que : $3\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

1. Démontrer que D est le barycentre des points A, B et C affecter des coefficients que l'on déterminera.
2. I étant le milieu de $[AC]$, démontrer que D est le barycentre des points B et I affecter des coefficients que l'on déterminera.
   En déduire que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.
3. Calculer AD, BD et CD.
   Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :
   $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 16$.
   Vérifier que le centre de gravité O de ABC appartient à E.

Exercice 12

ABC est un triangle équilatéral de côté 3 cm. B' est le milieu de $[AC]$ et D est le point du plan tel que : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que D est le barycentre des points pondérés $\{(A;3);(B;-2);(C;3)\}$.
   En déduire que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$
3. Calculer : DA^2 et DB^2
4. Déterminer l'ensemble E des points M vérifiant :
   $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Exercice 13

L'unité est le cm. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB = AC = 5$, $BC = 6$ et G=bar{(A ;2),(B ;3),(C ;3)}.

1. a) Faire une figure **(0,5pt)**

   b) Utiliser la propriété d'Al kashi pour déterminer $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

   (On rappelle que d'apres Al kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$).
   (0,5pt)

   c) En déduire donc le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. **(0,25pt)**

   d) Soit I le milieu du segment [BC]. **(1,5pt)**
   Ecrire G comme barycentre des points A et I et en déduire que $AG = 3$. **(0,75pt)**

2. Soit g une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe :
   $g(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.

   a) Calculer $g(A)$. **(0,5pt)**

   b) Montrer que : $g(M) = 4MG^2 + g(G)$. **(1pt)**

3. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $g(M) = g(A)$.

   a) Déterminer en discutant suivant les valeurs de $g(G)$ la nature de (Γ). **(0,75pt)**

   b) Représenter (Γ) sur la figure précédente sachant que $g(G) = 5$. **(0,75pt)**

<<la connaissance s'acquière avec l'expérience le reste n'est qu'information>>
Albert EINSTEIN

<u>Par</u> : M. Bernard ELONG BANGA
******Leaders préparations examens et concours : Aujourd'hui mieux qu'hier et demain plus qu'aujourd'hui******

LEADERS PREPARATIONS