



PROPOSITION DE CORRIGÉ

Epreuve de sciences mathématiques baccalauréat Marocain

Session Juin 2024

PAR GILDAS MBA OBIANG

Exercice 1. Fonctions et calcul intégral.. / 7,5 points

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} = \ln'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(1)$ donc f est continue en 1 à droite.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x^2 - 1} = 0$ par produit.

3. a) La fonction $x \mapsto (x - 1)^2$ est une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$ de bijection réciproque $x \mapsto \sqrt{x} + 1$. Soit $x \in]1; +\infty[$. Le réel $\sqrt{x} + 1$ est l'unique antécédent de t par la fonction $x \mapsto (x - 1)^2$ donc : $\frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = \frac{1 - (\sqrt{t} + 1) + \ln(\sqrt{t} + 1)}{t} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(\sqrt{t} + 1)}{t}$

b) Soit $h : t \mapsto -\sqrt{t} + \ln(\sqrt{t} + 1)$ pour $t > 0$. h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $t > 0$, $h'(t) = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_t \in]0; t[$ tel que $\frac{-\sqrt{t} + \ln(\sqrt{t} + 1)}{t} = h'(c_t) = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{c_t})}$. Or $c_t \in]0; t[$ donc $-\frac{1}{2} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{c_t})} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$ par suite on obtient la double inégalité : $-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(\sqrt{t} + 1)}{t} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$ pour tout $t > 0$.

c) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})} = -\frac{1}{2}$ donc par le théorème d'encadrement de limite on en déduit

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{t} + \ln(\sqrt{t} + 1)}{t} = -\frac{1}{2}$ par suite, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{t} + \ln(\sqrt{t} + 1)}{t} = -\frac{1}{2}$.

4. a) Soit $x \in]1; +\infty[$.

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2\ln(x) - x^2 + 1}{2(x - 1)(x^2 - 1)} = \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x^2 - 1)} - \frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x + 1)}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\ln(x) - x + 1}{2(x^2 - 1)} - \frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x + 1)} \right] = -\frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ donc f est dérivable en 1 à droite et $f'_d(1) = -\frac{3}{4}$. Ainsi, f admet une tangente en 1 à droite de coefficient directeur $f'_d(1) = -\frac{3}{4}$.

5. a) Pour tout $t \in [1; x]$, $0 \leq \frac{t^2 - 1}{t^3} \leq \frac{t^2 - 1}{t^2}$ donc $0 \leq \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt \leq \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$ par suite, $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

$$b) I(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \left[\ln(t) + \frac{1}{2t^2} \right]_1^x = \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2x^2}$$

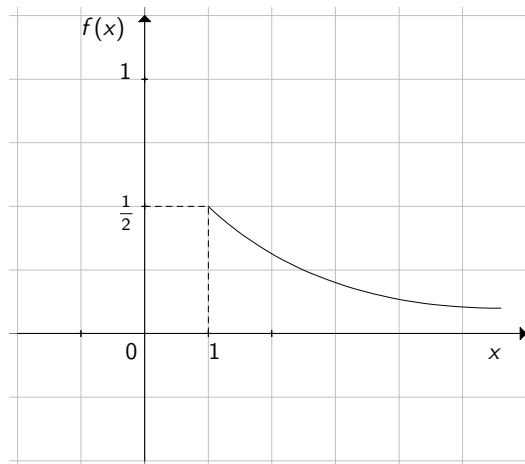
$$J(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[t + \frac{1}{t} \right]_1^x = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x - 1)^2}{x}$$

c) f est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme quotient de fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^2 - 1$ dérivables et pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 - 1) - 2x \ln(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{\ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{l(x)}{J(x)}$$

d) D'après la question 5a, $0 \leq \frac{l(x)}{J(x)} \leq 1$ donc $\frac{-2}{(x+1)^2} \leq \frac{l(x)}{J(x)} \leq 0$ mais $\frac{-1}{2} \leq \frac{-2}{(x+1)^2}$ pour tout $x > 1$, ainsi il en découle que $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ pour tout $x > 1$.

6. a) D'après la question 5d, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
b) Tracer de la courbe.



Tracer de la courbe..

7. Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x + 1$.
 g est dérivable sur $]1; +\infty[$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$ donc g est strictement décroissante, de plus $g(1) = f(1) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{x-1}{x} \right) = -\infty$ par suite, g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$, plus précisément $\alpha \in]1; 2[$ car $g(1) \times g(2) < 0$.

8. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \phi(a_n)$ où ϕ est la fonction définie par $\phi(x) = f(x) + 1$. Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\phi'(x) = f'(x)$ donc $-\frac{1}{2} \leq \phi'(x) \leq 0$.

Si $u_n = \alpha$ alors l'inégalité est triviale.

Si $u_n \neq \alpha$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction ϕ entre u_n et α on en déduit que $|\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) On peut procéder par une récurrence immédiate que je laisse à l'appréciation du lecteur cependant, je propose une démarche itérative : On en déduit par itérations puis par simplification que :

$$\begin{aligned} |u_1 - \alpha| &\leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha| \\ |u_2 - \alpha| &\leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha| \\ &\vdots \\ |u_n - \alpha| &\leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha| \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

c) On a $\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ par suite par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$. Ainsi, on en déduit que la suite (u_n) converge vers α .