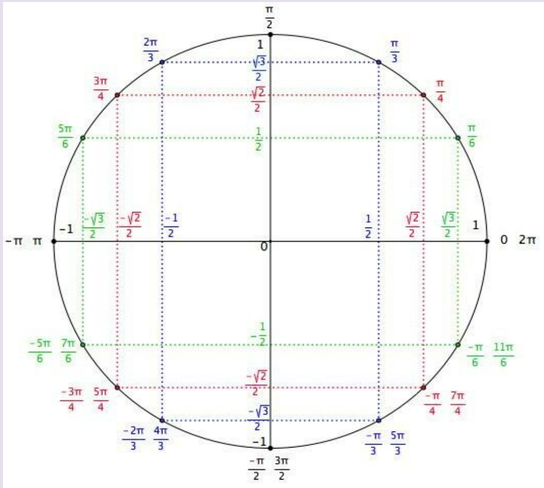
TRIGONOMETRIE

♦ *Valeurs remarquables :*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



♦ *Les élémentaires:*

$\forall\, x \in \mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

♦ Angles associés à x :

	Tour	
	$\cos(x+2\pi)=\cos x$ $\sin(x+2\pi)=\sin x$ $\tan(x+2\pi)=\tan x$	
Angle opposé	**Demi-tour**	**Quart de tour direct**
$\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\tan(-x)=-\tan x$	$\cos(x+\pi)=-\cos x$ $\sin(x+\pi)=-\sin x$ $\tan(x+\pi)=-\tan x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan x}$
Quart de tour indirect	**Angle supplémentaire**	**Angle complémentaire**
$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$ $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan x}$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin(\pi-x)=\sin x$ $\tan(\pi-x)=-\tan x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

♦ Formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

♦ Formules de duplication :

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$		$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

♦ Transformation de Produits en Sommes :

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$	$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$
$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\cos a \sin b = -\dfrac{1}{2}[\sin(a-b) - \sin(a+b)]$

♦ Transformation de Sommes en Produits :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

♦ Equations trigonométriques :

$\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}$	$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ u = -v + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
	$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ u = \pi - v + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\forall u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

♦ Equations particulières :

$\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$	$\cos t = -1 \Leftrightarrow t = \pi + 2k\pi$ $\sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi$ $\sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

♦ *Factorisation de* $a\cos\omega x + b\sin\omega x$ *:*

Mettre $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur
$a\cos\omega x + b\sin\omega x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega x\right)$
Factorisation en cosinus
Chercher $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi] \Big/ \begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ On a alors : $a\cos\omega x + b\sin\omega x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\omega x + \sin\alpha\sin\omega x)$ $a\cos\omega x + b\sin\omega x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega x - \alpha)$
Factorisation en sinus
Chercher $\beta \in]-\pi\,;\,\pi] \Big/ \begin{cases} \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$ On a alors : $a\cos\omega x + b\sin\omega x = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\beta\cos\omega x + \cos\beta\sin\omega x)$ $a\cos\omega x + b\sin\omega x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x + \beta)$

♦ Quelques résultats utiles :

$\forall\, k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \cos(k\pi) = (-1)^k \\ \sin(k\pi) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \end{cases}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x \\ \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \end{cases}$	$\begin{cases} \cos(k\pi - x) = (-1)^k \cos x \\ \sin(k\pi - x) = -(-1)^k \sin x \end{cases}$

NOMBRES COMPLEXES

♦ Les différentes formes d'un nombre complexe :

Soient $(a\,,b\,,\theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$		
Forme algébrique	**Forme trigonométrique**	**Forme exponentielle**
$z = a + ib$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$
$a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta = arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta = \frac{a}{r}\\ \sin\theta = \frac{b}{r}\end{cases}$	

♦ Egalité de deux nombres complexes :

Avec les formes algébriques $\boldsymbol{z = a + ib}$ **et** $\boldsymbol{z' = a' + ib'}$	**Avec les formes exponentielles** $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ **et** $\boldsymbol{z' = r'e^{i\theta'}}$
$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases}a = a'\\ b = b'\end{cases}$ **En particulier :** $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}a = 0\\ b = 0\end{cases}$	$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases}r = r'\\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

♦ Conjugué d'un nombre complexe :

	Propriétés	
	Soit $z \in \mathbb{C}$	**Soient Soit z et$z' \in \mathbb{C}$**
• $z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$ • $z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = \ re^{-\ i\theta}$	• $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$ • $z - \bar{z} = 2\Im m(z)$ • $z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$ • $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$si $z \neq 0$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^{\,n}\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$	• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ • $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$ • $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ si $z' \neq 0$

♦ Module d'un nombre complexe :

Propriétés		
• $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	• $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$ et $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$ • $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	• $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}\ avec\ z' \neq 0$ • $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$

♦ Arguments :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :	
• $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$ • $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$	• $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$ • $arg(z^n) = narg(z)$

♦ Formules d'Euler et Formule de Moivre :

Formules d'Euler	$\forall\ \theta \in \mathbb{R}$: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre	$\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{Z}$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ou $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

♦ *Equation du second degré* $az^2 + bz + c = 0$:

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	
Δ est un réel	Si $\Delta \geq 0$ alors $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Si $\Delta < 0$ alors $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Δ n'est pas un réel	Pour $\delta = x + iy, \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$ Et alors $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

♦ Interprétation géométrique :

Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'
• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est z ; la distance $OM = \lvert z\rvert$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = arg(z)$ • M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow \lvert z\rvert = 1$ • M appartient à l'axe des réels $(O, \vec{u}) \Leftrightarrow arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$ • M appartient à l'axe des imaginaires $(O, \vec{v}) \Leftrightarrow arg(z) = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ • L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$ et la distance $MM' = \lvert z' - z\rvert$ • L'affixe du milieu de $[MM']$ est $\frac{z + z'}{2}$
Soient A, B, C et D des points du plan complexe
• L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ • L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ • $\lvert z_B - z_A\rvert = AB$ et $arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ • $\left\lvert\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right\rvert = \frac{CD}{AB}$ et $arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

♦ Caractérisation de configurations et de figures :

- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0 \; ou \; \pi \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A
- $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow ABC$ est isocèle de sommet A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle isocèle en A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ABC$ est équilatéral

♦ Caractérisation d'ensemble de points :

L'ensemble des points M d'affixe z tel que
• $\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$ est la médiatrice du segment$[AB]$ • $\lvert z - z_A \rvert = r$ est le cercle de centre A et de rayon r • $arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur $\vec{\omega}$ tel que $(\vec{u}\,, \vec{\omega}) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel est la droite(AB) privée de A • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soitun réel strictement négatif est le segment$[AB]$ privée de A et B • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soitun réel strictement positif est la droite (AB) privée du segment $[AB]$ • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

♦ Transformations du plan :

M est le point d'affixe z et M' est le point d'affixe z'
• **Translation :** M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{\omega}$ si et seulement si $z' = z + z_{\vec{\omega}}$ • **Rotation de centre A :** M' est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$ • **Rotation de centre O :** M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ si et seulement $z' = e^{i\theta}z$ • **Homothétie :** M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement $z' - z_A = k(z - z_A)$ • **Similitude :** M' est l'image de M par la similitude de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement $z' - z_A = ke^{i\theta}(z - z_A)$

CALCUL DE LIMITES ET CONTINUITE

CALCUL DE LIMITES

♦ ***Formes indéterminées :***

$\infty - \infty$	$\mathbf{0} \times \infty$
$\left.\begin{array}{l} f(x) = u(x) + v(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$	$\left.\begin{array}{l} f(x) = u(x)v(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$
$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \pm\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$	$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$

♦ Limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle :

- **Règle 1 :** en $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré

- **Règle 2 :** en $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

♦ Limite de la composée de deux fonctions :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ f(x) = v \circ u(x) \\ \circ\ \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x) = b \\ \circ\ \lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$$

♦ Limite des fonctions trigonométriques :

NB : En $\pm\infty$, les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite	
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$	$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$	$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

♦ Théorèmes de comparaison :

- **Théorème 1 :** au voisinage de $+\infty$
  Si $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  Si $f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = -\infty$, alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Théorème 2 :** au voisinage de $+\infty$,
  Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- **Théorème 3 :** Théorème des gendarmes : au voisinage de $+\infty$,
  Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

♦ Asymptotes et Branches infinies :

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$,alors,$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta): y = ax$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

♦ Les éléments de symétrie d'une fonction :

- f est paire si et seulement si $\forall\ x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f\ (x)$
- f est impaire si et seulement si $\forall\ x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- (Δ): $x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si
  $\forall\ x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$
- $I(a\ , b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si
  $\forall\ x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

CONTINUITE

♦ Etude de la continuité en un point :

f est continue en x_0,

Si $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ou si $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

♦ Théorème de continuité :

- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0
- Toute fonction dérivable sur I est continue sur I

  NB : La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas toujours dérivable

♦ Exemples de fonctions continues :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction racine carrées est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue

♦ Bijection continue :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ f \text{ continue sur } I \\ \circ\ f \text{ strictement monotone sur } I \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J$$

♦ Solution de l'équation $f(x) = k$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ f \text{ continue sur } I \\ \circ\ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \circ\ k \in J = f(I) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution } \alpha \in I$$

♦ Théorème des valeurs intermédiaires :

Résolution de l'équation $f(x) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ f \text{ est continue sur } [a\,,b] \\ \circ\ f \text{ strictement monotone sur } [a\,,b] \\ \circ\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \,]a, b[$$

DERIVATION ET NOTION DE PRIMITIVES

DERIVATION

♦ *Etude de la dérivabilité en un point :*

<table>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{f}$ est dérivable en un point $\boldsymbol{x_0}$, s'il existe un réel $\boldsymbol{\ell}$ tel que :</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$</td><td>ou
$$\lim_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$</td></tr>
<tr><td>ou encore $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{\ell = f'(x_0)}$ est alors appelé nombre dérivé de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\left.\begin{array}{l} \circ \ \lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1 \\ \circ \ \lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_2 \\ \circ \qquad \ell_1 \neq \ell_2 \end{array}\right\} \text{ou} \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \Longrightarrow f \ n'estpas \ dérivable \ en \ x_0$$</td></tr>
</table>

♦ Fonctions dérivées usuelles :

f' désigne la fonction dérivée de f sur I		
Fonction	**Dérivée**	I
$f(x) = k \ \ (k\ réel)$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} (n \geq 2)$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

♦ *Opérations et dérivées :*

Opérations et dérivées		Dérivées successives
• $(u+v)' = u' + v'$ • $(ku)' = ku'(k \text{ réel})$ • $(uv)' = u'v + v'u$ • $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}(u \neq 0)$ • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}(v \neq 0)$ • $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ • $(u^n)' = nu'u^{n-1}\ (n \geq 2)$	• $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}(n \geq 1)$ • $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}(u > 0)$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}(u > 0)$ • $(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}(u \neq 0)$ • $(e^u)' = u'e^u$	$\begin{cases} \circ\ f^{(0)} = f \\ \circ\ f^{(1)} = f' \\ \circ\ f^{(2)} = f'' \\ \circ\ f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]' \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

Dérivée d'une bijection réciproque

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ f \textit{ est bijective de } I \textit{ sur } J \\ \circ\ f \textit{ est dérivable sur } I \\ \circ\ \forall\, x \in I, f'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \circ\ f^{-1} \textit{ est dérivable sur } J \\ \circ\ \forall\, y \in J, (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \end{array}\right.$$

♦ ***Dérivée et sens de variation :***

Soit f' la fonction dérivée de f sur I :

- Si $\forall\, x \in I, f'(x) > 0$, alors, f est strictement croissante sur I
- Si $\forall\, x \in I, f'(x) < 0$, alors, f est strictement décroissante sur I
- Si $\forall\, x \in I, f'(x) = 0$, alors, f est constante sur I

♦ Dérivée et extrémum relatif :

Si f' s'annule x_0 et change de signe alors f admet un extrémum relatif en x_0	
Plus précisément	$\left.\begin{array}{l} \circ\ \forall\ x \in\ ]a\ ;\ x_0[, f'(x) < 0 \\ \circ\ \forall\ x \in\ ]x_0\ ; b[, f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)\ \ (minimum)$
	$\left.\begin{array}{l} \circ\ \forall\ x \in\ ]a\ ;\ x_0[, f'(x) > 0 \\ \circ\ \forall\ x \in\ ]x_0\ ; b[, f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)\ \ (maximum)$

PRIMITIVES

♦ ***Primitives des fonctions usuelles :***

F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$		
Fonction	**Primitives**	I
$f(x) = 0$	$F(x) = k\ \ (k\ réel)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k\ \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\,;\ 0[$ ou $]0\,;\ +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}\,(n \geq 2)$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k\ (n \geq 2)$	$]-\infty\,;\ 0[$ ou $]0\,;\ +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0\,;\ +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitives	I
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + k$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$

♦ ***Primitives et opérations :***

On suppose que u est une fonction dérivable sur I				
$f = u'u^n$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$		$f = u' \cos u$	$F = \sin u$
$f = \dfrac{u'}{u^2}$	$F = -\dfrac{1}{u} (u \neq 0\ sur\ I)$		$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$
$f = \dfrac{u'}{u^n}$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ $(u \neq 0\ sur\ I\ et\ n \geq 2)$		$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\|u\| (u \neq 0\ sur\ I)$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} (u > 0\ sur\ I)$		$f = u'e^u$	$F = e^u$

FONCTIONS
LOGARITHME NEPERIEN ET
EXPONENTIELLE

♦ Définition et première propriétés :

Logarithme népérien		Exponentielle
• ln est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en1 • $D_{\ln} =]0\,;\,+\infty[$ • $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ • $\forall\, x \in]0\,;\,1[, \ln x < 0$ et $\forall\, x \in]1\,;\,+\infty[, \ln x > 0$ • $\forall\, x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$		• exp ou $x \longmapsto e^x$ est la bijection réciproque de ln • $D_{exp} = \mathbb{R}$ • $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ • $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ • $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[, e^{\ln x} = x$

♦ Propriétés algébriques :

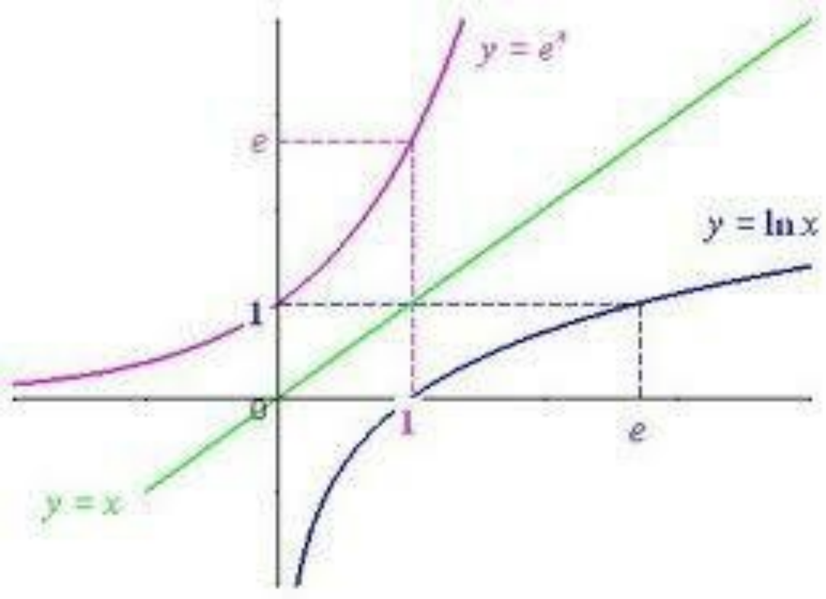
Logarithme népérien		Exponentielle
$\forall\, a \in]0\,;\,+\infty[$ et $\forall\, b \in]0\,;\,+\infty[$ on a : • $\ln ab = \ln a + \ln b$ • $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ • $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ • $\forall\, r \in \mathbb{R}, \ln a^r = r \ln a$ • $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ • $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$		$\forall\, a \in \mathbb{R}$ et $\forall\, b \in \mathbb{R}$ on a : • $e^{a+b} = e^a e^b$ • $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ • $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ • $\forall\, r \in \mathbb{R}, (e^a)^r = e^{ar}$ • $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ • $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

♦ Limites utiles :

Logarithme népérien		Exponentielle
• $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$		• $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$
• $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$		• $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$
• $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$		• $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
• $\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$		• $\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$
• $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x \ln x = 0$		• $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x e^x = 0$
• $\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$		• $\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \lvert x \rvert^r e^x = 0$
• $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$		• $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

♦ Dérivées et représentations graphiques :

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\forall\, x \in \,]0\,;\,+\infty[\,, \ln' x = \frac{1}{x}$ • $[\ln u(x)]' = [\ln\|u(x)\|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$	• $\forall\, x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$ • $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$



Problème de Synthèse (2h)

On considère la fonction numérique f de la variable x, définie par : $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$

On désigne $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)\ \ si\ x < 0 \\ g(x) = x^2 + 1 - \ln x\ \ si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations
2. Calculer $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $g(-1)$
3. Etudier le signe de $g(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$

PARTIE B

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.

En déduire une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

2. Montrer que la droite (Δ): $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f et étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ)
3. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation sur D_f
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
   Justifier l'encadrement $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.
5. Tracer (Δ)et $(\mathcal{C})$
6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, du nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

PARTIE C

1. On désigne par φ la restriction de f à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
   a. Montrer que φ définie une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser
   b. Dresser le tableau de variation de la réciproque φ^{-1} de φ puis tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2du domaine plan limité par la courbe$(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = e$.
   Prouver que $\mathcal{A} = 2(1 - \alpha^4)$

On donne : $\ln(0{,}6) = -\,0{,}51$ et $\ln(0{,}7) = -\,0{,}35$

CALCUL INTEGRAL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

CALCUL INTEGRAL

♦ ***Intégrale et Primitives :***

- Si F est une primitive de f sur I alors $\forall\ a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

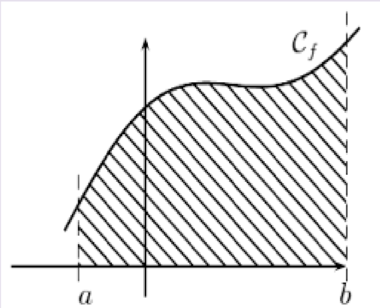
- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors, $g'(x) = f(x)$ et donc g est la primitive de f qui s'annule en a

♦ Propriétés de l'intégrale :

- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Antisymétrie :** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- **Linéarité :** $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- **Positivité :** $f \geq 0\ sur\ [a\,;b], a \leq b \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Conservation de l'ordre :** $f \geq g\ sur\ [a\,;b], a \leq b \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- **Inégalité de la moyenne :** $\begin{cases} m \leq f \leq M \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ |f| \leq M \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a| \end{cases}$
- **Valeur moyenne : la valeur moyenne de $\boldsymbol{f}$ sur $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$:** $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
- **Intégration par parties :** $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

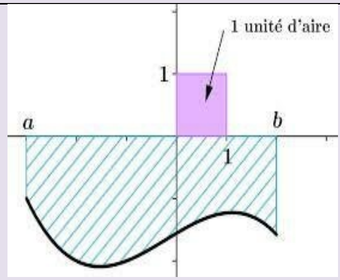
♦ Calcul d'aires :

f est positive



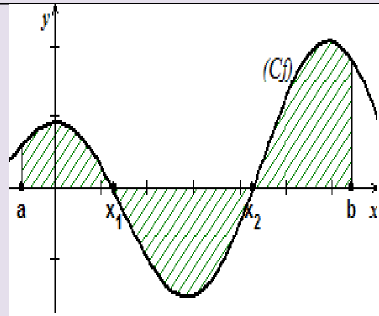
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \times ua$$

f est négative



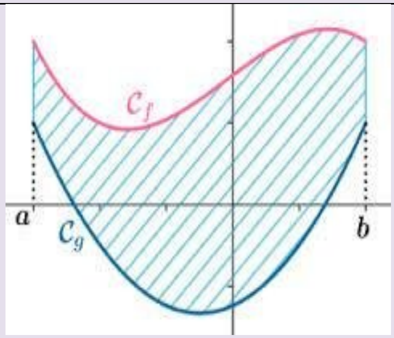
$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx \times ua$$

f est de signe quelconque



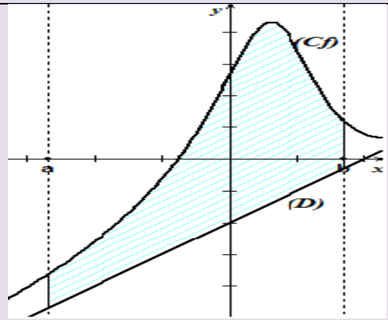
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

Aire entre deux courbes

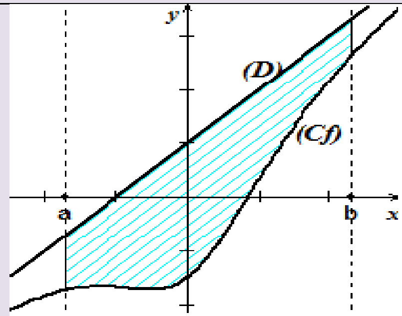


$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times ua$$

Aires entre une courbe et une droite

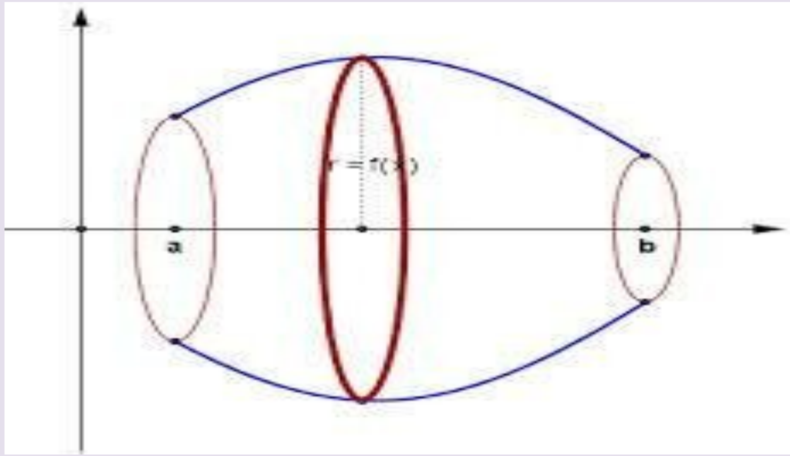


$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y]dx \times ua$$



$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)]dx \times ua$$

♦ Calcul de Volumes :

Volume du solide de révolution engendré par rotation autour de l’axe des abscisses	
L’espace étant rapporté à un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ ,\vec{k}\right)$, la rotation de la partie du plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$ délimité par la courbe$\left(\mathcal{C}_f\right)$, l’axe des abscisses et les droites d’équations $x = a$ et $x = b$ autour de l’axe des abscisses engendre un solide de révolution.	 $\mathcal{V} = \pi \displaystyle\int_a^b f^2(x)\, dx \times uv$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Au programme		
Equations différentielles	**Solution générale**	**Solution particulière**
$y' = ay \ (a \ réel)$	$y = ke^{ax} \ avec \ k \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant à la condition initiale$y(x_0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec $A \in \mathbb{R} \ et \ B \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0 \ et \ y'(x_0) = y'_0$

Hors programme	
Equation différentielle	**Solution**
$ay'' + by' + c = 0$	Elle s'exprime à l'aide des racines r_1 et r_2 de son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. • Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors r_1 et r_2 sont réels et $$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $r_1 = r_2 = r_0$ est réel et $$y = (Ax + B)e^{r_0 x}$$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $r_1 = \alpha + i\beta \; et \; r_2 = \alpha - i\beta$ sont complexes conjugués et $$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$ Dans tous les cas, Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0 \; et \; y'(x_0) = y'_0$

SUITES NUMERIQUES

♦ Généralités sur les suites numériques :

- La suite (u_n) est croissante si pour tout $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite (u_n) est décroissante si pour tout $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite (u_n) est p- périodique, p entier positif, si pour tout $n, u_{n+p} = u_n$
- Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :

✓ Comparaison de $u_{n+1} - u_n$ à 0

$$Soit\ (u_n)\ est\ une\ suite:$$

$$\begin{cases} Si\ u_{n+1} - u_n \geq 0\ alors\ (u_n)\ est\ croissante \\ Si\ u_{n+1} - u_n \leq 0\ alors\ (u_n)\ est\ décroissante \end{cases}$$

✓ Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

$Soit\ (u_n)\ est\ une\ suite$ à $termes\ strictement\ positifs$:

$$\begin{cases} Si\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1\ alors\ (u_n)\ est\ croissante \\ Si\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1\ alors\ (u_n)\ est\ décroissante \end{cases}$$

- La suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

Suites majorées – suites minorées – suites bornées

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n, u_n \leq M$
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n, u_n \geq m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée
- La suite (u_n) est bornée $\begin{cases} \circ\ Si \text{ pour tout } n, m \leq u_n \leq M \\ \circ\ Si \text{ pour tout } n, |u_n| \leq M \end{cases}$

♦ Suites arithmétiques :

La suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$

- Définition :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ ; } r \text{ étant la raison de la suite arithmétique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 + nr \\ u_n = u_1 + (n-1)r \\ u_n = u_p + (n-p)r \quad en\ général \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs :

$$\begin{cases} \circ\ u_P + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right) \ en\ général \\ \\ \circ\ 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ en\ particulier \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite arithmétique (u_n) converge si et seulement si sa raison $r = 0$

♦ Suites géométriques :

La suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n, u_{n+1} = qu_n$

- Définition :

$$u_{n+1} = qu_n \text{ ; } q \text{ étant la raison de la suite géométrique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ u_n = u_p \times q^{n-p} \quad en\ général \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs : $(q \neq 1)$

$$\begin{cases} \circ\ u_P + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad en\ général \\ \circ\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad en\ particulier \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite géométrique(u_n) converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$

♦ Démonstration par récurrence :

Pour démontrer que pour tout entier $n \geq n_0$, une propriété P_n est vraie, il faut :

- **Initialisation :** vérifier que P_{n_0} est vraie
- **Hérédité :** supposer que P_n est vraie pour un certain $n \geq n_0$ et démontrer que P_{n+1} est vraie
- **Conclusion :** pour tout $n \geq n_0, P_n$ est vraie

♦ Limite de suites : suites convergentes – suites divergentes :

- Une suite convergente vers un réel ℓ est une suite qui admet une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
- Une suite divergente vers $\pm\infty$ est une suite qui admet une limite $\pm\infty$ quand n tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} = \pm\infty$
- Une suite divergente tout court est une suite qui n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$

♦ Convergence des suites monotones :

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

♦ Théorèmes de comparaison :

Théorème 1 :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \circ\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell \\ \circ\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$$

Théorème 1 (bis) :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ |u_n - \ell| \leq v_n \\ \circ\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$$

Théorème 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ u_n \geq v_n \\ \circ\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ u_n \leq w_n \\ \circ\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$$

COURBES PARAMETREES DU PLAN

Le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j})$.Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On veut étudier la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ \\ y(t) = g(t) \end{cases} ; t \in I$$

- ***Equation cartésienne :***

En posant $x = x(t)$ et $y = y(t)$; l'équation obtenue en éliminant (si possible) la variable t entre x et y est appelée équation cartésienne de la courbe (Γ)

♦ Comparaison de $M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$:

On note $M(t)\ \big(x(t)\ ;\ y(t)\big)$ et donc $M\big(u(t)\big)\ \Big(x\big(u(t)\big)\ ;\ y\big(u(t)\big)\Big)$

$t \longmapsto u(t)$ étant une fonction de t ; comparons $M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$	
Résultat	**Conclusion**
$\begin{cases} x\big(u(t)\big) = x(t) \\ y\big(u(t)\big) = y(t) \end{cases}$	$M(t) = M\big(u(t)\big)$
$\begin{cases} x\big(u(t)\big) = x(t) \\ y\big(u(t)\big) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
$\begin{cases} x\big(u(t)\big) = -x(t) \\ y\big(u(t)\big) = y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
$\begin{cases} x\big(u(t)\big) = -x(t) \\ y\big(u(t)\big) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère
$\begin{cases} x\big(u(t)\big) = y(t) \\ y\big(u(t)\big) = x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
$\begin{cases} x\big(u(t)\big) = -y(t) \\ y\big(u(t)\big) = -x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M\big(u(t)\big)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$

♦ Réduction de l'intervalle d'étude :

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M(t+p)}$:**

$\begin{cases} x(t+p) = x(t) \\ y(t+p) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t) = M(t+p) \;\; \Leftrightarrow x$ et y sont de période commune p

Une étude sur un intervalle de longueur p permet de tracer complètement (Γ)

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M(-t)}$:**

✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{2}\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ est de longueur p

✓ $\left[-\frac{p}{2}\ ;\ \frac{p}{2}\right] = \left[-\frac{p}{2}\ ;\ 0\right] \cup \left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ et $\forall\, t \in \left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right], -t \in \left[-\frac{p}{2}\ ;\ 0\right]$

✓ $M(-t) = S_{(?)}\big(M(t)\big)$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M\left(\frac{p}{2}+t\right)}$:**
  - ✓ L'intervalle $[0\ ;\ p]$ est de longueur p
  - ✓ $[0\ ;\ p] = \left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right] \cup \left[\frac{p}{2}\ ; p\right]$ et $\forall\, t \in \left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$, $\left(\frac{p}{2}+t\right) \in \left[\frac{p}{2}\ ;\ p\right]$
  - ✓ $M\left(\frac{p}{2}+t\right) = S_{(?)}\big(M(t)\big)$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M\left(\frac{p}{2}-t\right)}$:**
  - ✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{4}\ ;\ \frac{3p}{4}\right]$ est de longueur p
  - ✓ $\left[-\frac{p}{4}\ ;\ \frac{3p}{4}\right] = \left[-\frac{p}{4}\ ;\ \frac{p}{4}\right] \cup \left[\frac{p}{4}\ ;\ \frac{3p}{4}\right]$ et $\forall\, t \in \left[-\frac{p}{4}\ ;\ \frac{p}{4}\right]$, $\left(\frac{p}{2}-t\right) \in \left[\frac{p}{4}\ ;\ \frac{3p}{4}\right]$
  - ✓ $M\left(\frac{p}{2}-t\right) = S_{(?)}\big(M(t)\big)$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[-\frac{p}{4}\ ;\ \frac{p}{4}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[-\frac{p}{4}\ ;\ \frac{p}{4}\right]$

♦ Tableau conjoint des variations :

Supposons que l'intervalle d'étude réduit trouvé est $[a\,;\ b]$

- Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$
- Etudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle $[a\,; b]$
- Pour chaque valeur particulière t_0 de t trouvée, calculer les quatre quantités $x'(t_0)$; $y'(t_0)$; $x(t_0)$ et $y(t_0)$
- Compléter le tableau ci-dessous par les signes $x'(t)$ et $y'(t)$ainsi que les flèches indiquant les variations de x et y

t	a	t_0	t_1	…	b
$x'(t)$	$x'(a)$	$x'(t_0)$	$x'(t_1)$		$x'(b)$
$y'(t)$	$y'(a)$	$y'(t_0)$	$y'(t_1)$		$y'(b)$
$x(t)$	$x(a)$	$x(t_0)$	$x(t_1)$		$x(b)$
$y(t)$	$y(a)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$		$y(b)$

♦ *Notion de tangentes au point $M(t_0)$:*

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors $(T): x = x(t_0)$ (verticale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors $(T): y = y(t_0)$ (horizontale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors $(T): y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}\big(x - x(t_0)\big) + y(t_0)$ (oblique)
- Le cas $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ est hors programme

♦ *Points d'intersection avec les axes du repère :*

- **Avec l'axe des abscisses :** Chercher $M(t)\big(x(t)\,;y(t)\big)$ tel que $y(t) = 0$
- **Avec l'axe des ordonnées :** Chercher $M(t)\big(x(t)\,;y(t)\big)$ tel que $x(t) = 0$

♦ *Les étapes du tracé de la courbe* (Γ) :

- Tracer un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$ (respecter l'unité graphique si elle est donnée)
- Placer les points $M(a)$; $M(t_0)$; $M(t_1)$; $\cdots$; $M(b)$ et tracer en chacun de ces points la tangente à la courbe
- Respecter l'évolution du tracer selon le tableau conjoint

  De $M(a)\ vers\ M(t_0)$; de $M(t_0)\ vers\ M(t_1)$; $de\ M(t_1)\ vers \cdots vers\ M(b)$

1^er^ cas

t	
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$

On se déplace vers la droite et vers le haut

2^ème^ cas

t	
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\searrow$

On se déplace vers la droite et vers le bas

3^ième^ cas

t	
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\nearrow$

On se déplace vers la gauche et vers le haut

4^ième^ cas

t	
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\searrow$

On se déplace vers la gauche et vers le bas

PROBABILITE

♦ Dénombrement :

• Ordre et répétition

Ordre important	Répétitions possibles	Résultat possible	Nombre de résultats possibles
oui	oui	$p - liste$	n^p
oui	non	$p - arrangement$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
non	non	$p - combinaison$	$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$

- *Problèmes de tirages*

Types de tirages	**ordre**	**Répétition**	**Résultat possible**	**Nombre de résultats possibles**
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$p - liste$	n^p
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - arrangement$	A_n^p
simultané	On ne tient pas compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - combinaison$	C_n^p

- ***Problèmes de lancés ou de jets***

Objets lancés ou jetés	Nombre de faces	Nombre de lancés effectués	Calcul
Jeton ou pièce de monnaie	$2\ faces$	n	2^n
Dé cubique	$6\ faces$	n	6^n
Dé tétraédrique	$4\ faces$	n	4^n

- ***Problèmes de cartes***

Dans un jeu de cartes, les mains sont composées de p cartes pris parmi 32 cartes ou 52 cartes et donc l'outil de calcul est la combinaisonC_n^p.

Voici la composition de chaque jeu :

Jeu de 32 $Cartes$	As	K	Q	J	**10**	**9**	**8**	**7**	**Total**
$Carreau$	1	1	1	1	1	1	1	1	8
$Coeur$	1	1	1	1	1	1	1	1	8
$Trêfle$	1	1	1	1	1	1	1	1	8
$Pique$	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Total	4	4	4	4	4	4	4	4	32

Jeu de 52 $Cartes$	As	K	Q	J	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**Total**
$Carreau$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
$Coeur$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
$Trêfle$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
$Pique$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Total	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	52

- **Règles de calcul sur les combinaisons**

✓ On multiplie les combinaisons si les différentes étapes sont reliées par un « et »

✓ On additionne les combinaisons si les différents cas sont reliés par un «ou»

♦ **Calcul des probabilités :**

- **Définition**

Soit $\Omega = \{\omega_1\ ;\ \omega_2\ ;\ \cdots ; \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire
Une probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités $p_i = P(\omega_i)$des évènements élémentaires ω_i telles que :

✓ Pour tout $i, 0 \leq p_i \leq 1$

✓ $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

✓ Pour tout évènement $\mathrm{A} \subset \Omega,\ \mathrm{P}(A) =$
$somme\ des\ probbabilités\ des\ évènements\ élémentaires\ qui\ réalisent\ A$

- **Propriétés des probabilités**

Ensembles	Vocabulaire	Propriété
Ω	Evènement certain	$P(\Omega) = 1$
$\emptyset$	Evènement impossible	$P(\emptyset) = 0$
$\{\omega_i\}$	Evènement élémentaire	$P(\omega_i) = p_i$
$\mathrm{A} \subseteq \Omega$	Evènement quelconque	$0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1$
$\overline{\mathrm{A}}$	Evènement contraire de A	$P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	Evènement A ou B	$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$	Evènement A et B	

- **Calcul dans le cas d'équiprobabilité**

$$P(\mathrm{A}) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

♦ Probabilité conditionnelle :

- **La formule pour calculer la probabilité de B sachant A**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Indépendance**

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- **Calcul de $P(A \cap B)$**

  ✓ **Quand A et B sont indépendants :** $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

  ✓ **Quand A et B ne sont pas indépendants :** $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

- **Calcul de $P(B)$ quand B est lié à un évènement A**

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

♦ Variables aléatoires :

- **Loi de probabilité**

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

- **Espérance mathématique ; Variance et Ecart – type**

✓ $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$

✓ $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec

$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n$$

✓ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

♦ Schéma de Bernoulli de paramètres n et p - Loi binomiale

- ***Calcul des probabilités dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p***

✓ Pour tout $k, 0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir exactement k succès est

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

✓ La probabilité d'obtenir uniquement que des succès est p^n

✓ La probabilité de n'obtenir aucun succès est $(1-p)^n$

✓ La probabilité d'obtenir au moins un succès est $1-(1-p)^n$

- ***Loi binomiale de paramètres n et p***

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n ***et*** p

✓ Pour tout $k, 0 \leq k \leq n,\ P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

✓ $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-p)^n$

✓ $E(X) = np$

✓ $V(X) = np(1-p)$

STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

♦ Série statistique double :

- ***Définition***

Une série statistique double $(x\ ;\ y)$ est constituée de n couples de nombres

$$(x_1\ ;\ y_1), (x_2\ ;\ y_2), \dots, (x_n\ ;\ y_n)$$

Valeurs du caractère X	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs du caractère Y	y_1	y_2	...	y_n

- ***Exemple***

On mesure en fonction de la masse suspendue l'allongement d'un ressort
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Masse suspendue $x_i$en Kg	2	2,5	4	4,5	6 ,5	7	8	10
Allongement $y_i$en cm	19	20	21	22	26	32	36	40

♦ Nuage de points et point moyen :

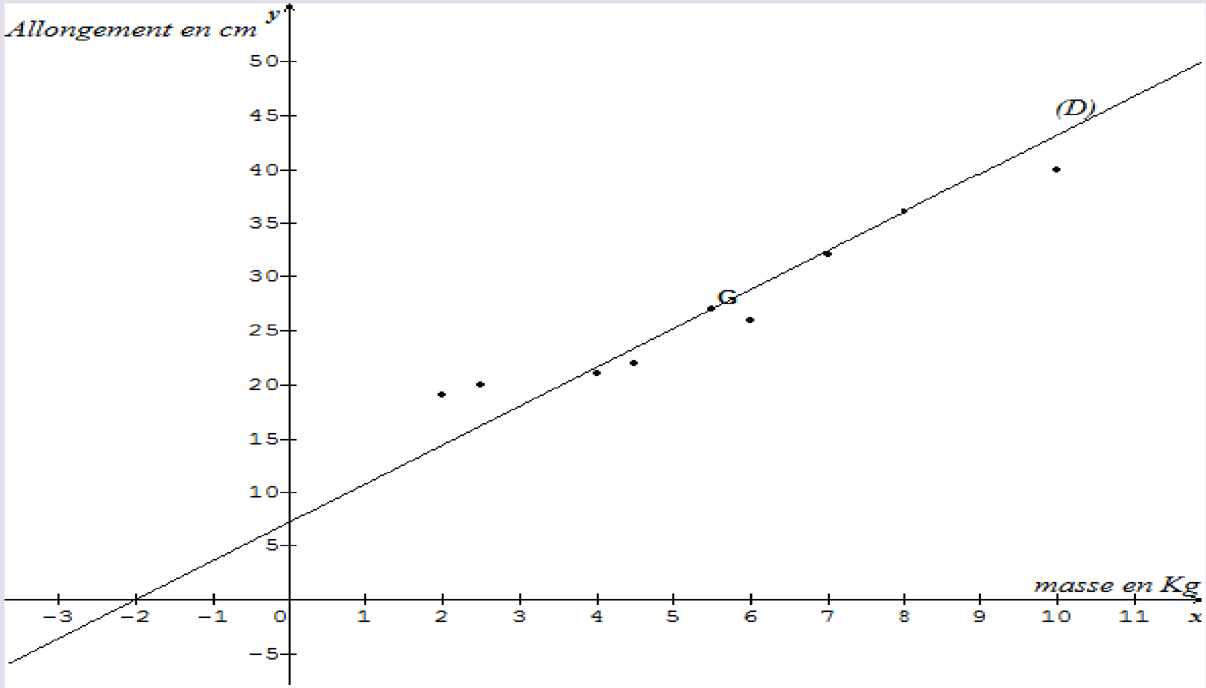
- ***Définitions***

✓ Le nuage de points associé est l'ensemble des n points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$

✓ Le point moyen G associé est le point de coordonnées

$$x_G = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad \text{et } y_G = \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

- ***Exemple***



$$x_G = \frac{44}{8} = 5{,}5 \quad \text{et } y_G = \frac{216}{8} = 27 \Leftrightarrow G(5{,}5\ ;27)$$

♦ Ajustement affine par la méthode graphique :

- **Définition**

  On trace une droite (D)passant par G et « assez proche des points du nuage » puis on détermine son équation sous la forme $y = mx + p$.

  En effet : (D) passe par $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B) \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = mx_A + p \\ y_B = mx_B + p \end{cases}$

- **Exemple**

Masse suspendue $x_i$en Kg	2	2,5	4	4,5	6 ,5	7	8	10
Allongement $y_i$en cm	19	20	21	22	26	32	36	40

Déterminons l'équation de la droite (D) passant par $G(5{,}5\ ; 27)$ et le septième point du nuage de points

$$\begin{cases} 27 = 5{,}5m + p \\ 36 = \ \ 8m + p \end{cases} \Leftrightarrow m = 3{,}6\ \ et\ p = 7{,}2 \Leftrightarrow (D)\!: y = 3{,}6x + 7{,}2$$

♦ *Ajustement affine par la méthode de* MAYER :

- ***Définition***

On fractionne le nuage de points en deux sous-nuages de même effectif de points moyens respectifs G_1 et G_2 (ou différent à une unité près si l'effectif est impair) alors puis on détermine l'équation de la droite (G_1G_2) appelée droite de MAYER.

- ***Exemple***

Déterminons la droite de Mayer du nuage de points

✓ Soit G_1 le point moyen des quatre premiers points

$$G_1\left(\frac{13}{4}\ ;\ \frac{82}{4}\right) \Leftrightarrow G_1(3{,}25\ ;20{,}5)$$

✓ Soit G_2 le point moyen des quatre derniers points

$$G_2\left(\frac{31{,}5}{4}\ ;\ \frac{134}{4}\right) \Leftrightarrow G_2(7{,}875\ ;33{,}5)$$

✓ Equation de la droite (G_1G_2)

$$(G_1G_2): y = mx + p \Leftrightarrow \begin{cases} 20{,}5 = 3{,}25m + p \\ 33{,}5 = 7{,}875m + p \end{cases} \Leftrightarrow m = 2{,}8 \text{ et } p = 11{,}4$$

Donc $(G_1G_2) : y = 2{,}8x + 11{,}4$

♦ Extrapolation et interpolation :

- ***Définition***

  C'est faire des prévisions ou retrouver des résultats manquants sur la série statistique double à partir de l'équation $y = mx + p$

- ***Exemple***

  En utilisant la droite (D): $y = 3{,}6x + 7{,}2$

✓ Déterminons l'allongement prévisible pour une masse suspendue de $18\ kg$

$$x = 18 \iff y = 3{,}6 \times 18 + 7{,}2 = 72$$

Pour une masse suspendue de $\boldsymbol{18\ Kg}$, l'allongement à prévoir est de $\boldsymbol{72\ cm}$

✓ Estimons la masse suspendue ayant produit un allongement du ressort de $27\ cm$.

$$y = 27 \iff 27 = 3{,}6x + 7{,}2 \iff x = 5{,}5$$

La masse de l'objet suspendu au ressort ayant produit un allongement du ressort de $\boldsymbol{27\ cm}$ est $\boldsymbol{5,5\ Kg}$

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

♦ Egalité de deux vecteurs et Relation de Chasles :

- **Egalité :** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme
- **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

♦ Colinéarité :

- **Définition**

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$
- **Parallélisme**

  $(AB) \mathbin{//} (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$
- **Appartenance à une droite et alignement**

  ✓ $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

  ✓ A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

♦ Plans de l'espace et coplanarité :

- **Définition**

  Trois points non alignés A , B , C définissent un plan noté (ABC)
- **Coplanarité**

  ✓ Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ou si et seulement si,$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$

  ✓ Les points A , B , C , D sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ou si et seulement si,$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD} = 0$

♦ Produit scalaire et orthogonalité :

- **Définition**

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u} , \vec{v})$$

- **Orthogonalité**

  ✓ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

  ✓ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

  ✓ ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

♦ Géométrie analytique :

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ un repère de l'espace

Soit $A(x_A\,,y_A\,,z_A)$ et $B(x_B\,,y_B\,,z_B)$ deux points

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
- Le milieu I de $[AB]$ est tel que $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,,\frac{y_A+y_B}{2}\,,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ et $k\vec{u}$ sont tels que $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=k$
- Si le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ est orthonormé alors :

✓ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

✓ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

♦ Produit Vectoriel :

- **Définition**

✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; et \;\; \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

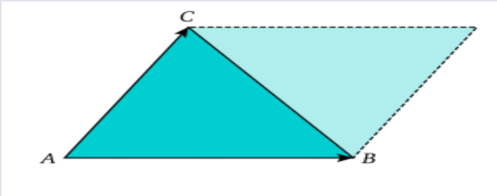
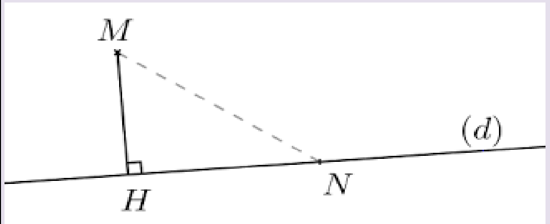
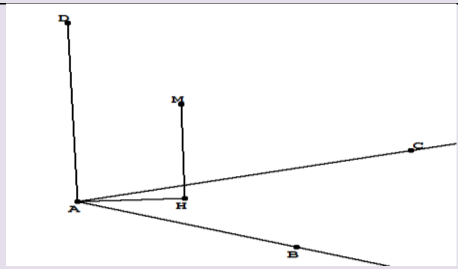
- **Propriétés**

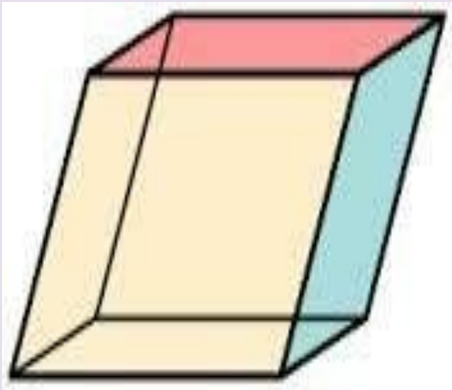
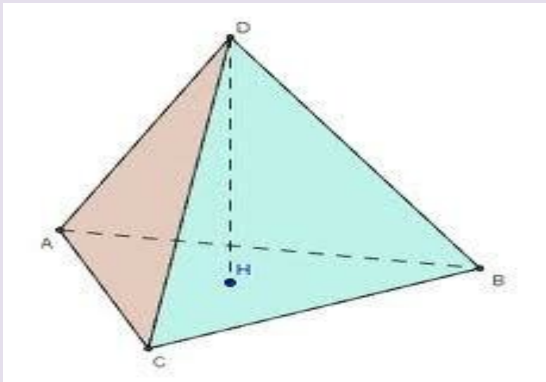
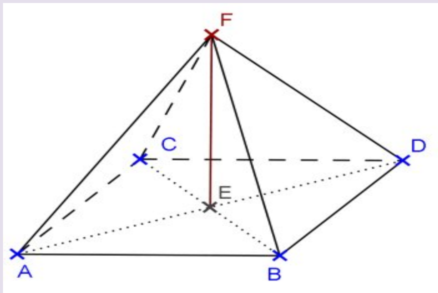
✓ $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

✓ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

✓ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

♦ Applications du produit vectoriel :
Aires – Distances- Volumes :

Aire d'un Parallélogramme		$\mathcal{A}_{ABCD} = \lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \rVert \times ua$
Aire d'un Triangle		$\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \rVert}{2} \times ua$
Distance d'un point à une droite		$d\big(M\,;(AB)\big) = MH = \dfrac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} \rVert}{\lVert \overrightarrow{AB} \rVert}$
Distance d'un point à un plan		$d\big(M\,;(ABC)\big) = MH = \dfrac{\lvert \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \rvert}{\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \rVert}$

Volume d'un parallélépipède	 $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \mathcal{A}_{ABCD} \times d\big(E\ ;\ (ABCD)\big) \times uv$ $= \Vert\overrightarrow{AE}.\big(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\big)\Vert \times uv$
Volume d'un tétraèdre	 $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d\big(D\ ;\ (ABC)\big) \times uv$ $= \frac{1}{6}\Vert\overrightarrow{AD}.\big(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\big)\Vert \times uv$
Volume d'une pyramide	 $\mathcal{V}_{ABCDE} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times d\big(E\ ;\ (ABCD)\big) \times$ $uv \qquad = \frac{1}{3}\Vert\overrightarrow{AE}.\big(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\big)\Vert \times uv$

LE RESOUTOUT

Question1 : **Déterminer l'ensemble de définition D_f de f**	**Ce qu'il faut savoir**
• Ecrire les conditions d'existence de $f(x)$ • Résoudre chacune des conditions • Conclure	Soient P et Q deux fonctions polynômes et soit u une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ • $f(x) = P(x) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}$ • $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ n'existe que si $Q(x) \neq 0$ • $f(x) = \sqrt{P(x)}$ n'existe que si $P(x) \geq 0$ • $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ n'existe que si $P(x) \geq 0\ et Q(x) \neq 0$ • $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$n'existe que si$Q(x) > 0$ • $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ n'existe que si$Q(x) \neq 0\ et\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ • $f(x) = \ln u(x)$n'existe que si$x \in D_u\ et\ u(x) > 0$ • $f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$n'existe que si$x \in D_u\ et\ u(x) \neq 0$ • $f(x) = e^{u(x)}$n'existe que si$x \in D_u \ \Leftrightarrow D_f = D_u$

Question 2 :

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus

Continuité de f en x_0

- Calculer $\lim_{x \longrightarrow {x_0}^-} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \longrightarrow {x_0}^+} f(x)$
- Calculer $f(x_0)$ si ce n'est pas donné
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

Si $\lim_{x \longrightarrow {x_0}^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow {x_0}^+} f(x) = f(x_0)$ alors f est continue en x_0

Dérivabilité de f en x_0

- Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ (et/ou) $\lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

✓ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$

✓ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ alors f n'est pas dérivable en x_0

✓ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ (et/ou) $\lim\limits_{x \longrightarrow {x_0}^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0

Interprétation graphique des résultats obtenus

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si f est dérivable en x_0 alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$ et d'équation $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point de coordonnées $(x_0\,; f(x_0))$ deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs ℓ_1 et ℓ_2 et d'équations

$$(T_1): y = \ell_1(x - x_0) + f(x_0) \text{ et } (T_2): y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$$

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ et/ou $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point de coordonnées $(x_0\,; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ et/ou $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point de coordonnées $(x_0\,; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers bas

Question 3 :

Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes éventuelles

- Calculer $\lim\limits_{x \to {x_0}^-} f(x)$ (et/ou) $\lim\limits_{x \to {x_0}^+} f(x)$(si x_0 est une borne de D_f)
- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (et/ou) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (si $-\infty$ et/ou $+\infty$ est une borne de D_f)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

⟶ Asymptote verticale

Si on a

$\lim\limits_{x \to {x_0}^\pm} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$

⟶ Asymptote horizontale

Si on a

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$

Question 4 :

Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $\pm\infty$

- Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$

Question 5 :

Etudier les positions relatives de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et d'une droite (Δ) d'équation $y = ax + b$

- Etudier le signe de $f(x) - y$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $\forall\, x \in I, f(x) - y > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ) sur I

$\longrightarrow$ Si $\forall\, x \in I, f(x) - y < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de (Δ) sur I

Question 6 :

Montrer que deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont asymptotes en $\pm\infty$

- Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont asymptotes en $\pm\infty$

Question 7 :

Etudier les positions relatives de deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

- Etudier le signe de $f(x) - g(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $\forall\, x \in I, f(x) - g(x) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$ sur I

$\longrightarrow$ Si $\forall\, x \in I, f(x) - g(x) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de $(\mathcal{C}_g)$ sur I

Question 8 : étudier les branches infinies de f

- Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et au cas où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$;
- Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b \ (b \in \mathbb{R})$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

Question 9 : *Montrer que le point $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$*

- Calculer $f(2a-x)+f(x)$ (sous réserve que $\forall\, x \in D_f, 2a-x \in D_f$)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $f(2a-x)+f(x)=2b$ alors $\Omega(a\,;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

Question 10 : *Montrer que la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$*

- Calculer $f(2a-x)$ (sous réserve que $\forall\, x \in D_f, 2a-x \in D_f$)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $f(2a-x)=f(x)$ alors la droite d'équation $x=a$est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

Question 11 : Etudier le sens de variation de f

- Calculer $f'(x)$
- Etudier le signe de $f'(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $\forall\ x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I
$\longrightarrow$ Si $\forall\ x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I
$\longrightarrow$ Si $\forall\ x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Question 12 : Etudier les variations de f

- Calculer $f'(x)$; étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- Dresser le tableau de variations de f

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Il faut vérifier l'harmonie entre les différents résultats portés dans le tableau de variations

Question 13 :

Montrer que f définie une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à préciser

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissantesur I (ou strictement décroissante sur I)
- Conclure alors que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ l'intervalle $J = f(I)$ doit être calculé ou doit être lu dans le tableau de variation et que J est de la même nature que I

Question 14 :

Montrer que f admet une bijection réciproque dont on donnera l'ensemble de définition

- Montrer d'abord que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Conclure alors que, f admet une bijection réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ sur I

Question 15 : Donner les variations de la réciproque f^{-1} de f

- Dire que f^{-1} a sur J le même sens de variation que f sur I
- Dresser le tableau de variation de f^{-1} à partir de celui de f

Question 16 :
Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J (ou donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J)

- Résoudre l'équation $f(x) = y$
- On trouve $x = f^{-1}(y)$
- Conclure en remplaçant le y dans $f^{-1}(y)$ par x

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longmapsto f(x) = 2x - 1$

$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} = f^{-1}(y)$

Conclusion : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

Question 17 :

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur un intervalle I (ou Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$) et que $\alpha \in]a\,;b[$

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissantesur I (ou strictement décroissantesur I)
- En déduire que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Vérifier que $0 \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Pour montrer que $\alpha \in]a\,;b[$

- Calculer $f(a)$ et $f(b)$ puis $f(a) \times f(b)$
- Conclure :

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors $\alpha \in]a\,;b[$

Question 18 :

Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α sur un intervalle I (ou Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = k$) et que $\alpha \in]a\,;b[$

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissantesur I (ou strictement décroissantesur I)
- En déduire que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Vérifier que $k \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Pour montrer que $\alpha \in]a\,;b[$

- Calculer $f(]a\,;b[)$ (intervalle ouvert de bornes $f(a)$ et $f(b)$)
- Conclure :

Ce qu'il faut savoir

$\longrightarrow$ Si $k \in f(]a\,;b[)$ alors $\alpha \in]a\,;b[$

Question 19 : Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x_0

- Ecrire l'équation sous la forme (T): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Calculer $f'(x_0)$ et $f(x_0)$
- Conclure

Question 20 :

Déterminer le point A d'abscisse a de $(\mathcal{C}_f)$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ est parallèle à une droite d'équation $y = mx + p$

- Résoudre $f'(a) = m$ (puisque les deux coefficients directeurs sont égaux)
- Calculer $f(a)$
- Conclure que $A(a\,; f(a))$

Question 21 :

Déterminer le point A d'abscisse a de $(\mathcal{C}_f)$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ est perpendiculaire à une droite d'équation $y = mx + p$

- Résoudre $f'(a) = -\frac{1}{m}$ (puisque le produit des coefficients directeurs est -1)
- Calculer $f(a)$
- Conclure $A(a\,;f(a))$

Question 22 :

Démontrer qu'au point d'abscisse a la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente (T') à $(\mathcal{C}_g)$ sont perpendiculaires

- Calculer $f'(a) \times g'(a)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

Si $f'(a) \times g'(a) = -1$, alors (T) et (T') sont perpendiculaires

Question 23 :

Déterminer le ou les points d'intersection de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et $\left(\mathcal{C}_g\right)$

Déterminer le ou les points où $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et $\left(\mathcal{C}_g\right)$ se coupent (ou se rencontrent)

- Résoudre $f(x) = g(x)$
- Calculer $f(x_1)$; $f(x_2)$; $\cdots$ (si x_1 ; x_2 ; $\cdots$ sont les solutions trouvées)
- Conclure $M_1\left(x_1 ; f(x_1)\right)$; $M_2\left(x_2 ; f(x_2)\right)$; $\cdots$

Question 24 :

Déterminer le ou les points d'intersection de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et de la droite (D): $y = mx + p$

Déterminer le ou les points où $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et (D) se coupent (ou se rencontrent)

- Résoudre $f(x) = y$
- Calculer $f(x_1)$; $f(x_2)$; $\cdots$ (si x_1 ; x_2 ; $\cdots$ sont les solutions trouvées)
- Conclure
  $M_1\left(x_1 ; f(x_1)\right)$; $M_2\left(x_2 ; f(x_2)\right)$; $\cdots$

Question 25 :

Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère

Avec l'axe des abscisses

- Résoudre $f(x) = 0$ (puisque l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$)
- Conclure

$M_1(x_1\,;0)$; $M_2(x_2\,;0)$; $\cdots$ (si x_1 ; x_2 ; $\cdots$ sont les solutions trouvées)

Avec l'axe des ordonnées

- Calculer $f(0)$ (puisque l'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$)
- Conclure

$M_0\big(0\,;f(0)\big)$

Question 26 : Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$

- Construire le repère en respectant l'unité graphique
- Tracer les droites particulières (asymptotes ; tangentes ;⋯)
- Placer les points particuliers (extrémums relatifs ; intersection avec les axes ; ⋯)
- Tracer la courbe en conformité avec le tableau de variations

Question 27 : Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ à partir de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

- Ecrire que $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$

Question 28 : Soit $g(x) = -f(x)$; sans étudier la fonction g, tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$

- Ecrire : $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport à l' axe des abscisses
- Tracer $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$

***Question 29 :** Soit $g(x) = \|f(x)\|$; sans étudier la fonction g, tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$*
• Ecrire : Si $f(x) \geq 0$ alors $(\mathcal{C}_g) = (\mathcal{C}_f)$ Si $f(x) \leq 0$ alors $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport à l' axe des abscisses • Tracer $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$
***Question 30 :** Soit $g(x) = f(-x)$; sans étudier la fonction g, tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$*
• Ecrire : $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport à l' axe des ordonnées • Tracer $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$

Question 31 : Soit $g(x) = f(|x|)$; sans étudier la fonction g, tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$

- Ecrire :
  Si $x \geq 0$ alors $(\mathcal{C}_g) = (\mathcal{C}_f)$
  Si $x \leq 0$ alors $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sont symétriques par rapport à l' axe des odonnées
- Tracer $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$

Question 32 : Soit $g(x) = f(x - a) + b$; sans étudier la fonction g, tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$

- Ecrire : $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$
- Tracer $(\mathcal{C}_g)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$

Question 33 :

Calculer l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Cas où $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de l'axe des abscisses sur $[a\,;b]$ (c.-à-d $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$)

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx \times ua$$

- Cas où $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de l'axe des abscisses sur $[a\,;b]$ (c.-à-d $f \leq 0$ sur $[a\,;b]$)

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx \times ua$$

- Pour exprimer l'aire en cm^2, $ua = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Question 34 :

Calculer l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ): $y = mx + p$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Cas où $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (Δ) sur $[a\,;b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ mx + p \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y]\, dx \times ua$$

- Cas où $(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de (Δ) sur $[a\,;b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq mx + p \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)]\, dx \times ua$$

Question 35 :

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par $\left(\mathcal{C}_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a \; et \; x = b$

- Ecrire :

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \times uv$$

- Chercher $f^2(x)$avant de passer au calcul de l'intégrale
- Pour exprimer le volume en cm^3, $uv = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \left\|\vec{k}\right\|$ dans un repère orthogonal $\left(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,, \vec{k}\right)$

Question 36 :

Montrer que F est une primitive de f sur un intervalle I

- Calculer $F'(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

⟶ Si $F'(x) = f(x)$ alors F est une primitive de f

Question 37 :

Déterminer les réels a et b (ou les réel a , b et c) pour que F soit une primitive de f sur un intervalle I

- Calculer $F'(x)$ en fonction de a et b (ou en fonction de a , b et c)

- Ecrire l'égalité $F'(x) = f(x)$ et faire une identification des coefficients

Question 38 :   ***Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$; que représente F pour f ?***
Il suffit d'écrire que F est la primitive de f qui s'annule-en a
Question 39 :   ***Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$; montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée***
Il suffit d'écrire que F étant la primitive de f qui s'annules-en a, alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$
Question 40 :   ***Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$***
(sous réserve que $a < b$ et que $\forall\, x \in [a\,;b], f(x) \geq 0$)   Ecrire simplement que $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire en unité d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

LES PROBLEMES CLASSIQUES RESOLUS

Classique 1 :

Equation différentielle avec second membre $y' + ay = g(x)$

On considère l'équation différentielle (E): $\frac{1}{2}y' + y = e^{-2x}$

1) On pose $u(x) = axe^{-2x}$ où a est un réel.
2) Déterminer le nombre réel a pour que la fonction $u: x \longmapsto u(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (E)
3) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\frac{1}{2}y' + y = 0$
4) Démontrer qu'une fonction y définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si la fonction $y - u$ est solution de (E_0).
5) En déduire toutes les solutions de (E) puis la solution particulière f de (E), dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A(0\,; -1)$

Résolution

(1) **Déterminons le nombre** a

u est solution de (E) si $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$

$$\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x} \Longrightarrow \frac{1}{2}ae^{-2x} = e^{-2x}$$

Par identification $a = 2 \implies u(x) = 2xe^{-2x}$

(2) **Résolution de** (E_0) : $\frac{1}{2}y' + y = 0$

$$\frac{1}{2}y' + y = 0 \Longrightarrow y' = -2y \Longrightarrow y = ke^{-2x}; k \in \mathbb{R}$$

(3) **Démonstration**

***Supposons que** y **est solution de** (E) **et montrons que** $y - u$ **est solution de** (E_0)*

Si y est solution de (E), alors on a $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$;

or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(y-u)'(x) + (y-u)(x) = 0$ et donc $y - u$ est solution de (E_0)

Réciproquement, supposons que $y-u$ est solution de (E_0) et montrons que y est solution de (E)

Si $y-u$ est solution de(E_0), alors on a $\frac{1}{2}(y-u)'(x)+(y-u)(x)=0$ d'où

$\frac{1}{2}y'(x)-\frac{1}{2}u'(x)+y(x)-u(x)=0 \Longrightarrow \frac{1}{2}y'(x)+y(x)=\frac{1}{2}u'(x)+u(x)$

Or $\frac{1}{2}u'(x)+u(x)=e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x)+y(x)=e^{-2x}$ et donc y est solution de (E)

En conclusion y est solution de (E) si et seulement si $y-u$ est solution de (E_0)

(4) ***Déduction de toutes les solutions de (E)***

Soit y une solution de (E), on a d'après (3) et (2), $y(x)-u(x)=ke^{-2x}$;d'où

$$y(x)=\ ke^{-2x}+u(x) \Leftrightarrow y(x)=\ ke^{-2x}+2xe^{-2x}\ ;\ k\in\mathbb{R}$$

Solution particulière f de (E)

$f(x)=\ ke^{-2x}+2xe^{-2x}$ et $f(0)=-1 \Leftrightarrow k=-1 \Leftrightarrow f(x)=(2x-1)e^{-2x}$

Commentaires

- Ces quatre questions sont toutes liées
- Tout candidat sérieux doit être en mesure de reproduire à l'identique le raisonnement du ***classique 1***
- Attention !!!   La réciproque dans la **question (3)** n'est pas facultative

Classique 2 : Etude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$

(1) Etudier les variations de la fonction f

(2) Soit g la définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

(a) Montrer que pour tout élément$x$ de I , $f(x) \in I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(b) Montrer que pour tout élément x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

(4) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

(c) Montrer que la suite (u_n) converge vers α

(d) Déterminer le plus petit entiern_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0, |u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On donne : $\sqrt{e} \simeq 1{,}65$;$e \simeq 2{,}72$;$\ln 2 = 0{,}69$ et $\ln 10 = 2{,}30$

Résolution

(1) Variations de f

$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2}$; $\forall\, x \in [0\,;\,1], x-1 \leq 0$ et $\frac{e^x}{(e^x+x)^2} > 0$ d'où $\frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2} \leq 0$

$\forall\, x \in [0\,;\,1], f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante

(2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

$g'(x) = f'(x) - 1$; $\forall\, x \in [0\,;\,1], f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f'(x) - 1 < 0 \Longrightarrow g'(x) < 0$

La fonction g est continue car dérivable et est strictement décroissante sur$[0\,;\,1]$.

Alors réalise une bijection de $[0\,;\,1]$sur $g([0\,;\,1]) = [g(1)\,; g(0)] = \left[-\frac{1}{e+1}\,;\,1\right]$.

Or $0 \in \left[-\frac{1}{e+1}\,;\,1\right]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$

Montrons que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{e}-1}{2(\sqrt{e}+1)} \\ g(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} \end{cases} \Longrightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

(a) Montrons que pour tout élément x de I , $f(x) \in I$

$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ car f est décroissante sur I

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+\frac{1}{2}} = 0{,}76$ et $f(1) = \frac{e}{e+1} = 0{,}73$ d'où

$\frac{1}{2} \leq 0{,}73 \leq f(x) \leq 0{,}76 \leq 1$ et donc $f(x) \in I$

(b) Montrer que pour tout élément x de I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq e^x \leq e$ et $0 \leq -(x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1\ et\ \sqrt{e} \leq e^x \leq e \Leftrightarrow \sqrt{e} + \frac{1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (e^x + x)^2 \leq (e + 1)^2$

$\frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x+x)^2} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\right)^2}$ et $0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e}\right)^2}$

On a alors $0 \leq -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$

et donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(c) Montrer que pour tout élément x de I , $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

$\alpha \in I$ et $\forall\, x \in I,\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$\left|\int_{\alpha}^{x} f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$ d'où $|[f'(t)]_{\alpha}^{x}| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha| \Leftrightarrow |f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Or d'après (2), $f(\alpha)=\alpha$ d'où $\forall\, x \in I, |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

(4) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) Montrons que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$

Pour $n=0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} \in I = \left[\frac{1}{2}\ ; 1\right]$

Supposons que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$

Si $u_n \in I$, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in I$ car d'après (3a) : $\forall\, x \in I, f(x) \in I$

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel $n, u_n \in I$

(b) Démonstrations

✓ Montrons que pour tout entier naturel $n, |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$; posons $x = u_n$ dans (3c) : On a

$|f(u_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

Autre façon de faire

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$; $\alpha \in I$ et $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $\left|\int_{\alpha}^{u_n} f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ d'où $\left|[f'(t)]_{\alpha}^{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ et par définition

$f(u_n) = u_{n+1}$ d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

✓ Montrons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Raisonnement par récurrence

Pour $n = 0, |u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$; $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$

$$\Rightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

Supposons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et montrons que

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion : par récurrence, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Autre façon de faire

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$; d'où :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$$

$$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_2 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$

$\Longrightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Longrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$ et donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(c) Montrons que la suite (u_n) converge vers α

$\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$

La suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0 et donc la suite (u_n) converge vers α

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

(d) Déterminons le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc aura $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Longrightarrow -(n+1)\ln 2 \leq -3\ln 10 \Longrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1$

$\Longrightarrow n \geq 9$ et donc $n_0 = 9$.

Commentaires : Faire le même raisonnement pour les questions :

- ✓ Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près
- ✓ Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

Problème de Synthèse 2

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
3. a. Montrer la droite (Δ) la droite d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f
   b. Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ)
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et justifier que $\alpha \in \left[1\,;\,\frac{5}{4}\right]$
5. Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ)
6. Soit t un réel compris entre 0 et 1
   a. Calculer $\mathcal{A}(t)$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = \frac{e^2-1}{2}$.
   (On pourra s'aider d'une intégration par parties)

b. Déterminer $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \mathcal{A}(t)$

7. Montrer que α est solution de l'équation $(2x+1)e^{-x} = x$

PARTIE B

On nomme g la fonction définie sur $I = \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$ par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$

1. Etudier les variations de g
   En déduire que pour tout x élément de I, $g(x) \in I$
2. Monter pour tout x élément de I, $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$ et que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{5}|x - \alpha|$
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
   a. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$
   b. Montrer que pour tout entier naturel $n, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|u_n - \alpha|$
   c. Montrer que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$
   En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite
   d. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On donne : $\ln 2 = 0{,}70$; $\ln 3 = 1{,}09$; $\ln 5 = 1{,}60$; $\ln 7 = 1{,}94$;
$e^{-1} = 0{,}37$; $e^{-1{,}25} = 0{,}2$