BACCALAURÉAT
SESSION 2024

Durée : 4 h
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 **(2 points)**

Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

V **1.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et F une primitive de f sur K.
Les fonctions $x \mapsto F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur K .

F **2.** Le coefficient de corrélation linéaire r d'une série statistique double (X, Y) est tel que : $-1 < r < -0{,}87$. La corrélation linéaire entre les variables X et Y est forte.

V **3.** La fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, est la fonction : $x \longmapsto a^x$.

V **4.** Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ et ℓ un nombre réel tel que :
$\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[,\ |f(x) - \ell| < \frac{1}{x}$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

EXERCICE 2 **(2 points)**

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations *a*, *b*, *c* et *d* permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le module de z est égal à…
b *a*) $a^2 + b^2$; *b*) $\sqrt{a^2 + b^2}$; *c*) $a^2 - b^2$; *d*) $|a + b|$.

b **2.** Une primitive sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est la fonction F définie par :…
a) $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$; *b*) $F(x) = -\ln(\sin x)$; *c*) $F(x) = \ln(\sin x)$; *d*) $F(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x)^2}$.

a **3.** Soit Ω un point du plan. L'homothétie de centre Ω et de rapport -3 est une similitude directe de centre Ω, de …
a) rapport -3 *et* d'angle 0 ; *b*) rapport -3 *et* d'angle π ;
c) rapport 3 *et* d'angle π ; *d*) rapport 3 *et* d'angle 0.

4. Si A, B et C sont des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que :
a $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i\sqrt{3}$, alors…
a) ABC est un triangle rectangle en A ; *b*) ABC est un triangle isocèle en A
c) ABC est un triangle rectangle isocèle en A ; *d*) les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 3 (3 points)

Dans le cadre du programme jeunesse d'un gouvernement, une enquête a été menée en 2023 sur l'ensemble des élèves issus d'un centre de formation professionnelle.
Cette enquête a révélé que 40% de ces élèves sont des bacheliers. Parmi ces bacheliers, 90% ont obtenu un emploi et parmi les non bacheliers, 70% ont obtenu un emploi.

1. On choisit au hasard un élève issu de ce centre.
Démontre que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78.

2. On admet que le centre a formé suffisamment d'élèves.
On choisit au hasard 5 élèves issus du centre et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves ayant obtenu un emploi.
a) On admet que X suit une loi binomiale de paramètres *5* et 0,78.
Calcule l'espérance mathématique E(X) de X et interprète le résultat.
b) Calcule la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi.

EXERCICE 4 (3 points)

On se propose de chercher la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -4x - 4$ telle que $f(0) = 1$, puis de déterminer une valeur approchée de l'équation $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = -1$.

1. Démontre que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x + 3$ est une solution de (E).

2. Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E').

3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Démontre que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est une solution de (E').
b) Déduis des questions précédentes les solutions de (E).
c) Justifie que la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$.

4. *a*) Justifie que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
b) Démontrer que l'équation $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = -1$, admet une solution unique α telle que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

EXERCICE 5 (5 points)

Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction est bijective et d'effectuer un calcul d'aire.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction numérique h, continue sur $]1\,;+\infty[$ et définie par : $h(x) = \frac{x+1}{x\ln x}$.
On note ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. Démontre que : $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $1 + x + \ln x > 0$.

2. *a*) Calcule la limite de h à droite en 1, puis interprète graphiquement le résultat.
b) Démontre que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) de h en $+\infty$.

3. *a*) Démontre que : $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$.
b) Justifie que : $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $h'(x) < 0$.

4. Démontre que h est une bijection de $]1;+\infty[$ dans un intervalle K à préciser.

5. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{lnx}$.
Démontre que ($\mathscr{C}$) est au-dessus de (Γ) sur $]1\,;+\infty[$.

6. *a*) Justifie que : $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{xlnx} dx = ln2$.

b) Détermine l'aire $\mathscr{A}$ en cm² de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$), (Γ) et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

EXERCICE 6 **(5 points)**

Monsieur Zahui, un entrepreneur, vient d'acquérir avec la mairie de sa ville natale un terrain qu'il doit mettre en valeur. Il souhaite construire sur ce terrain un marché de produits vivriers pour aider les femmes à écouler facilement leurs marchandises. Il dispose de 20 000 000 F CFA et voudrait doubler cette somme avant de commencer à réaliser son projet. Il sollicite une institution financière qui lui propose d'épargner cette somme à un taux d'intérêt annuel de 6,9%.

Monsieur Zahui voudrait savoir le nombre minimum d'années qu'il lui faut pour commencer le projet. Ne sachant pas comment s'y prendre, il te sollicite.

À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Zahui.

Proposition de correction du bac D 2024

Exercice 01

1 - Vrai 2 - Vrai

3 - Faux 4 - Vrai

Exercice 02

1 - B 2 - C 3 - C 4 - A

Exercice 03

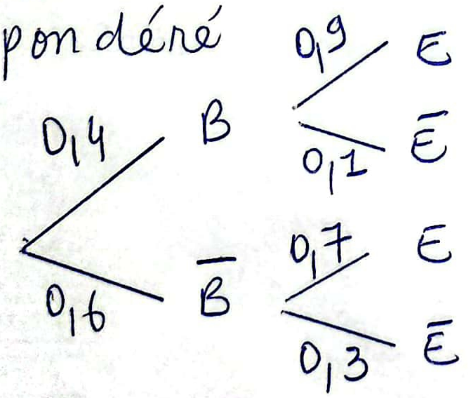
1 - Démontrons

Soit les évènements suivant :

B : « l'élève est un bachelier »

E : « l'élève a obtenu un emploi »

Construisons un arbre pondéré



alors on a :

$P(E) = P(B\cap E) + P(\bar{B}\cap E)$

$= P(B)\times P_B(E) + P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(E)$

$= 0,4\times 0,9 + 0,6\times 0,7$

$P(E) = 0,78$

2-a) Calculons $E(X)$ et interprétons le résultat

$E(X) = 5\times 0,78$

$E(X) = 3,9$

Interprétation

Sur les 5 élèves, 4 ont en moyenne obtenu un emploi

2-b) Calcule la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi

Cette probabilité est $P(X\geq 3)$.

on a $P(X=k) = C_5^k (0,78)^k (1-0,78)^{5-k}$

d'où $P(X\geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$P(X=3) = C_5^3 (0,78)^3 (1-0,78)^2 \simeq 0,230$

$P(X=4) = C_5^4 (0,78)^4 (1-0,78) \simeq 0,407$

$P(X=5) \simeq (0,78)^5 \approx 0,289$

alors $P(X\geq 3) = 0,230 + 0,407 + 0,289$.

$P(X\geq 3) = 0,926$

Exercice 04

1/ Démontrons que h est une solution de (E).

h est dérivable sur $[0;+\infty[$

$\forall x\geq 0$ on a :

$h'(x) - 2h(x) = (2x+3)' - 2(2x+3)$

$= 2 - 4x - 6$

$h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$

d'où h est solution de (E).

2- les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$

(E') : $y' - 2y = 0$

Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = ke^{2x}$, $k\in\mathbb{R}$.

3-a) Démontrons que g est solution de (E) si et seulement si g-h est solution de (E').

g-h solution de (E')

$\Rightarrow (g-h)' - 2(g-h) = 0$

$\Rightarrow g' - h' - 2g + 2h = 0$

$\Rightarrow g' - 2g = h' - 2h$

$\Rightarrow g'(x) - 2g(x) = -4x - 4$

car $\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$

$\Rightarrow$ g est solution de (E).

d'où g est solution de (E) si et seulement si g-h est solution de (E').

3-b) Déduisons les solutions de (E).

g-h étant solution de (E') alors $\forall x\in\mathbb{R}$, on a :

$g(x) - h(x) = ke^{2x}$, $k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x) = ke^{2x} + h(x)$

$g(x) = ke^{2x} + 2x + 3$, $k\in\mathbb{R}$

les solutions de (E) sont donc les fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ke^{2x} + 2x + 3$, $k\in\mathbb{R}$.

3-c) Justifions que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$

$f(0) = 1 \Rightarrow ke^{2\times 0} + 2\times 0 + 3 = 1$

$\Rightarrow k + 3 = 1$

$\Rightarrow k = -2$

d'où $\forall x\in\mathbb{R}$, on a :

$f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$.

4-a) Justifions que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[$ on a :

$f'(x) = \left(-2e^{2x}+2x+3\right)'$

$f'(x) = -4e^{2x}+2$

$\forall x \in [0;+\infty[$, on a ;

$\cdot\ 2x \geq 0$

$\Rightarrow e^{2x} \geq 1$

$\Rightarrow -4e^{2x} \leq -4$

$\Rightarrow -4e^{2x}+2 \leq -2$

$\Rightarrow f'(x) \leq 0$ car $-2 \leq 0$

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) \leq 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

4-b) Demonstration

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-\frac{2e^{2x}}{x}+2+\frac{3}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\cdot$ f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. de plus $f([0;+\infty[) =]-\infty; 1]$ or $-1 \in]-\infty; 1]$ donc l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$.

Verifions que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

$f(0{,}4) \approx -0{,}65$

$f(0{,}5) \approx -1{,}44$

$-1 \in [-1{,}44 ; -0{,}65]$

d'où $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

Exercice 05

1) Demontrons que $\forall x \in]1;+\infty[$, $1+x+\ln x > 0$

$\forall x > 1$, $1+x > 0$ et $\ln x > 0$

donc $\forall x \in]1;+\infty[$, $1+x+\ln x > 0$

2-a) calculons la limite de h à droite en 1.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x+1}{x\ln x}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\ln x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} h(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x+1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} h(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à $(\mathcal{E})$.

Scanné avec CamScanner

2-b) Démontrons que l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ alors la droite d'équation $y=0$ c'est à dire l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

3-a) Démontrons

$\forall x \in]1;+\infty[$ on a:

$$h'(x) = \left(\frac{x+1}{x\ln x}\right)'$$

$$= \frac{(x+1)'(x\ln x) - (x\ln x)'(x+1)}{(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{x\ln x - (x'\ln x + (\ln x)'x)(x+1)}{(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{x\ln x - (\ln x + 1)(x+1)}{(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{x\ln x - x\ln x - \ln x - x - 1}{(x\ln x)^2}$$

$$= \frac{-1-x-\ln x}{(x\ln x)^2}$$

d'où $h'(x) = -\dfrac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$

3-b) justifions que $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) < 0$

$\forall x > 1$, on a $1+x+\ln x > 0$ et $\dfrac{1}{(x\ln x)^2} > 0$ donc $\dfrac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2} > 0$

alors $-\dfrac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2} < 0$

d'où $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) < 0$

4- Démonstration.

$\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) < 0$ donc h est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ alors h est une bijection de $]1;+\infty[$ dans l'intervalle $K = h(]1;+\infty[) =]0;+\infty[$

5) Démontrons

$\forall x \in]1;+\infty[$ on a:

$$h(x) - g(x) = \frac{x+1}{x\ln x} - \frac{1}{\ln x}$$

$$= \frac{x+1}{x\ln x} - \frac{x}{x\ln x}$$

$$= \frac{x+1-x}{x\ln x}$$

$$h(x) - g(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

$\forall x \in]1;+\infty[, \frac{1}{x\ln x} > 0$

donc $h(x) - g(x) > 0$ alors $(\mathcal{E})$ est au-dessus de (Γ) sur $]1;+\infty[$.

6-a) justifions que $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx = \ln 2$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= [\ln(\ln x)]_e^{e^2}$$

$$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e)$$

$$= \ln(2) - \ln(1)$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx = \ln 2$$

6-b) Determinons l'aire A

$\forall x \in [e; e^2], h(x) - g(x) > 0$ donc

$$A = \int_e^{e^2} (h(x) - g(x)) dx \cdot Ua$$

$$Ua = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A = 4 \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx$$

$$\boxed{A = 4 \ln 2 \text{ cm}^2}$$

Exercice 06

Pour repondre à la préoccupation de Monsieur Zahui, je vais utiliser les notions de suite numerique pour cela je vais :

- Determiner le montant V_n génerée par son épargne en fonction du nombre n d'année.
- Resoudre l'inéquation $V_n \geq 40.000.000$ afin de determiner la valeur minimale de n.

$V_0 = 20.000.000$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = V_n + 0{,}069 V_n$

$$V_{n+1} = 1{,}069 V_n$$

(V_n) est donc une suite géometrique de raison $q = 1{,}069$ et de 1er terme $V_0 = 20.000.000$. alors

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = 20.000.000 (1{,}069)^n$$

$$V_n \geq 40.000.000$$

$$\Rightarrow (1{,}069)^n \geq 2$$

$\Rightarrow \ln(1{,}069)^n \geq \ln 2$

$\Rightarrow n \ln(1{,}069) \geq \ln 2$

$\Rightarrow n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}069)}$

$\Rightarrow n \geq 10{,}39$

la valeur minimale de n est donc $n_0 = 11$

Monsieur Zahui devra attendre au moins 11 ans pour commencer son projet.