



DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Année scolaire : 2021-2022

Niveau : Tle D

Durée : 2 heures

Lycée Classique d'Abidjan

Exercice 1 : (2 points)

Réponds par vrai ou faux en écrivant par exemple sur ta copie : 5 – vrai.

| N° | Affirmations |
|----|--|
| 1 | Une suite numérique est une application définie de \mathbb{N} vers \mathbb{R} . |
| 2 | La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme U_0 se note $S = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ |
| 3 | L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$ est $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}\right)z$ |
| 4 | Les racines cinquièmes de l'unité sont de la forme $z_k = e^{\left(\frac{2k\pi}{5}\right)i}$ ou $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ |

Exercice 2 : (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous quatre réponses sont données et une seule est exacte. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| N° | Affirmations | Réponses | | | |
|----|--|---------------------------|---|--|--|
| | | A | B | C | D |
| 1 | Soit une suite géométrique (V_n) à termes positifs tel que (V_n) soit décroissante alors. | $\frac{V_{n+1}}{V_n} > 1$ | $\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$ | $\frac{V_{n+1}}{V_n} < 0$ | $\frac{V_n}{V_{n+1}} > 0$ |
| 2 | $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 5^n) =$ | $-\infty$ | $+\infty$ | -1 | 0 |
| 3 | Le rapport de la similitude directe dont une écriture complexe est : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)z - i\sqrt{3}$ est égal à | 2 | 1 | -1 | -2 |
| 4 | $Z_P, Z_Q, Z_R,$ et Z_S sont les affixes respectives de P, q, R et S Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS})$ est égale | $\arg(Z_{RS} + Z_{PC})$ | $\arg\left(\frac{Z_Q}{Z_P}\right) - \arg\left(\frac{Z_C}{Z_R}\right)$ | $\arg\left(\frac{Z_S - Z_R}{Z_C - Z_P}\right)$ | $\arg\left(\frac{Z_Q - Z_P}{Z_S - Z_R}\right)$ |

Exercice 3 : (4 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1. a) Calcule $u_1, u_2,$ et u_3
 b) Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n)
2. a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + 3$
 b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$
 c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
3. On considère la suite numérique (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$
 a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le Premier terme.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

a) Exprimer S_n en fonction n

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Exercice 4 : (7 points)

On considère la fonction f dérivable sur \mathbb{R} et définie par $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité graphique est 2 cm.

1.a) Justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu

2.a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Donne une interprétation graphique de ces résultats.

3. On note f' la fonction dérivée de f .

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

b) Justifie que :

❖ $\forall x \in]-\infty; 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}; +\infty[, f'(x) > 0$

❖ $\forall x \in]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[, f'(x) < 0$

c) Etudie les variations de f .

d) Dresse le tableau de variation de f . On ne calculera pas $f(1 + \sqrt{2})$ et $f(1 - \sqrt{2})$.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5. Soit h la fonction dérivable sur \mathbb{R} et définie pour tout

x de \mathbb{R} par $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$. h' désigne la dérivée de h .

a) Calcule $h'(x)$.

b) Etudier les variations de h

c) Calculer $h(0)$ puis dresser le tableau de variation de h .

(On ne calculera pas les limites de h)

d) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq 0$.

e) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1 - x)h(x)$

f) Déduire que questions précédentes la position relative de (C) et de la tangente (T)

6. Tracer la tangente (T) et la courbe (C). On prendra

$f(1 + \sqrt{2}) = -0,4$ et $f(1 - \sqrt{2}) = 1,3$

Exercice 5 : (5 points)

Monsieur Xavier, Fondateur d'un établissement secondaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 700.000 CFA.

Après quelque mois de travail, il fait face à une grève des enseignants qui souhaitent une revalorisation de leurs salaires.

Monsieur Xavier leur propose deux types de contrats :

-Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de 5% du salaire de l'année précédente.

-Le deuxième contrat consiste à faire une augmentation forfaitaire de 35000FCFA.

Monsieur Ouattara professeur de français veut s'engager pour 8 ans mais hésite à faire un choix de contrat. En utilisant tes connaissances mathématiques aide le professeur à faire un choix avantageux

LYCÉE CLASSIQUE ABIDJAN



01 BP 33 ABIDJAN 08

23 44 38 17

Cherche, trouve et jamais n'abandonne

**DEVOIR DE NIVEAU DE
 MATHÉMATIQUES n°2**

Prof : CE MATH

Classe : T¹e D Durée : 2 h Date : Lundi 16 janvier 2023

Ce devoir comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (2 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro suivi de Vrai si elle est correcte ou le numéro suivi de Faux si elle ne l'est pas.

- La fonction $H: \mapsto 2x^2\sqrt{x}$ est une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction $h: \mapsto 5x\sqrt{x}$.
- On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où pile apparaît.

Alors $p(X = 2) = \frac{3}{8}$.

- Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

| | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $p(X = x_i)$ | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,3 |

Alors :

- $E(X) = 2$
- $V(X) = \frac{5}{2}$
- $\sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- F étant la fonction de répartition de la variable aléatoire X , on a : $F(3,5) = 0,6$.

EXERCICE 2 (2 pts)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une, et une seule est exacte. Indique-la en notant par exemple : 1. a ou 1. b ou 1. c.

| Questions | Réponses | | |
|--|------------------------------|-------------------------|---------------------|
| | a | b | c |
| 1. L'égalité $\ln x^2 = 2 \ln x$ est vraie pour tout x de ... | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $]0; +\infty[$ | \mathbb{R} |
| 2. $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \ln 4 + \ln(2e) = \dots$ | $-3 \ln e$ | $1 + 6 \ln 2$ | 4 |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \dots$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| 4. Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$. Alors, $\forall x \in] -1; +\infty[, g'(x) = \dots$ | $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ | $\frac{-1}{(x+1)(x+2)}$ | $\frac{1}{(x+2)^2}$ |

EXERCICE 3 (pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-3)^2}$.

- Détermine trois nombres a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$.
- Déduis-en la primitive F de f sur $] -\infty; 3[$ qui s'annule en 2.

EXERCICE 4 (pts)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = x(\ln x)^2 + x - 1 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de g dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 5 cm

1. Etudie la continuité de g en 0.
2. a. Justifie que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+1}{x} = +\infty$.
 b. g est-elle dérivable en 0 ?
 c. Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.
3. a. Calcule la limite de g en $+\infty$.
 b. Justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.
 c. Donne une interprétation graphique des résultats précédents.
4. On admet que g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 a. Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[\quad g'(x) = (1 + \ln x)^2$.
 b. Déduis-en les variations de g puis dresse son tableau de variation.
5. Justifie que le point $A\left(\frac{1}{e}; \frac{2}{e} - 1\right)$ est un point d'inflexion de (\mathcal{C}) .
6. a. Détermine une équation de la tangente (\mathcal{T}) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1.
 b. Etudie la position relative de (\mathcal{C}) et de (\mathcal{T}) .
7. Construis (\mathcal{T}) et (\mathcal{C}) sur $[0; 3]$.

EXERCICE 5 (pts)

Au cours d'une kermesse, le jeu suivant est proposé aux élèves.

Le joueur pioche trois boules en prenant successivement une dans chacune des urnes suivantes :

- L'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire ;
- L'urne 2 contenant une boule rouge et deux boules noires ;
- L'urne 3 contenant une boule rouge et trois boules noires.

Voulant participer à la partie, un élève affirme qu'il a plus de chance de tirer un nombre impair de boules rouges.

En te basant sur tes connaissances mathématiques, donne ton point de vue sur ses affirmations.

| | | |
|---|---------------------------------------|---|
| LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN CLASSE : TD11 | DEVOIR DE MATHÉMATIQUES Durée : 2h | Année scolaire 2020-2021 10/02/2022 |
|---|---------------------------------------|---|

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

| N° | Affirmations |
|----|--|
| 1 | Pour tout nombre réel θ , $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + i\sin^5\theta$ |
| 2 | Pour tout nombre réel strictement positif a , $\ln a > 0$ |
| 3 | Pour tout nombre entier naturel n , $\ln(\sqrt{2}-1)^n + \ln(\sqrt{2}+1)^n = 0$ |
| 4 | L'équation, $z^2 - z + 1 = 0$, n'admet pas de solution dans \mathbb{C} |

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque affirmation du tableau, choisis la bonne réponse.

| N° | Affirmation | Réponses | | |
|----|--|--|-----------------------|---------------------------------|
| | | a | b | c |
| 1 | L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie si et seulement si x appartient à : | $]-\infty; -1[$ $\cup]1; +\infty[$ | $]1; +\infty[$ | $]-1; +\infty[$ |
| 2 | Le plus petit nombre entier naturel n tel que $1 - (0,75)^n > 0,999$ est : | 24 | 23 | 25 |
| 3 | i^{983} est égal à : | i | -1 | $-i$ |
| 4 | Une primitive sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ de $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ est | $f'(x) = \ln(2x - 3)$ | $F(x) = 2\ln(2x - 3)$ | $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x - 3)$ |

EXERCICE 3 (3 points)

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (3 + 6i)z - 6 + 10i = 0$
- On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (3 + 7i)z^2 + (-12 + 13i)z + 10 + 6i = 0$
 - Vérifie que i est une solution de (E).
 - Détermine les nombres complexes a , b et c tels que pour tout nombre complexe z ,
 $z^3 - (3 + 7i)z^2 + (-12 + 13i)z + 10 + 6i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
 - En déduire les solutions de l'équation (E).

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = 5 - 4i$; $z_C = 1 + 4i$; $z_D = 1$ et $z_E = 3$.

1. Placer les points A, B, C, D et E.

2. a) Ecris sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique le nombre complexe $u = \frac{z_A - z_E}{z_C - z_E}$

b) En déduire la mesure principale de l'angle orienté (\vec{EC}, \vec{EA})

2. Démontre que les points B, C, et E sont alignés.

3. a) Démontre que le triangle ACE est rectangle en A.

b) Démontre que le triangle CDE est rectangle et isocèle en D.

c) En déduire que les points A, E, C, et D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon



DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Classe : 1^{ère} D6

Année scolaire : 2022-2023

Durée : 2 heures

Exercice 1

Ecris le numéro de chaque affirmation suivie de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si l'affirmation est fautive. Exemple : 5 - Faux.

| N° | Affirmations |
|----|---|
| 1 | L'affixe du point $M(-5; -2)$ est : $-2 - 5i$ <input type="checkbox"/> |
| 2 | Les racines carrées du nombre complexe $-8 - 6i$ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$ <input type="checkbox"/> |
| 3 | Pour tout nombre réel, $\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^2 = 1$ <input checked="" type="checkbox"/> |
| 4 | M est un point d'affixe $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Une forme trigonométrique de z est $2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. <input checked="" type="checkbox"/> |
| 5 | $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ <input type="checkbox"/> |
| 6 | M est le point d'affixe $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Une forme trigonométrique de z est $2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ <input type="checkbox"/> |

Exercice 2

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une réponse est vraie. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie.

| N° | Affirmations | Réponses | | |
|----|--|---------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| | | A | B | C |
| 1 | z_1 et z_2 étant des nombres complexes non nuls. On pose : $z = z_1 + iz_2$, le conjugué de z est | $\bar{z} = z_1 - z_2$ | $\bar{z} = z_1 - \bar{z}_2$ | $\bar{z} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ |
| 2 | Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne $E(-2 + 1)$ et $F(-4)$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $ z + 2 - i = z + 4 $ est | Le cercle de centre E et de rayon 4 | Le cercle de diamètre $[EF]$ | La médiatrice du segment $[EF]$ |
| 3 | Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors | $ z ^2 = -y^2$ | $ z ^2 = +y^2$ | $ z ^2 = z^2$ |
| 4 | On donne les nombres complexes suivants : $A = 2 + i$ et $B = 4 - 3i$ La forme algébrique du quotient $\frac{A}{B}$ est | $\frac{11}{25} + \frac{13}{25}i$ | $\frac{11}{7} + \frac{13}{7}i$ | $\frac{15}{-7} + \frac{13}{-7}i$ |

Exercice 3

- On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 - 7z^2 + (13 + 16i)z + 9 - 12i = 0$.
 - Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.
 - Résoudre l'équation (E).
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $i; 1 + 2i$ et $6 - 3i$.
 - Placer les points A, B et C puis démontrer que $\triangle ABC$ est un triangle rectangle.
 - Démontrer que l'affixe du point D , image de B par la translation de vecteur \vec{u} d'affixe 4 est : $5 + 2i$.
 - Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x(1 - x^2) + 1 - 2\ln x$.

- Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
- Démontrer que pour tout réel strictement positif, $g'(x) = \frac{(x+1)(-3x^2+3x-2)}{x}$.
- Démontrer que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a dans $]1; +\infty[$.
- Démontrer que $\forall x \in]0; a[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]a; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{\ln x}{x} - (x-1)^2 \right)$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

- Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
- Vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x - x}{x^2}$.
- Démontrer que la droite (Δ) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
- Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Calculer $f(1)$ puis justifier que $f(a)$.
- Démontrer l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a; +\infty[$.

Partie C

Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln x - x$.

- Dresser le tableau de variation de h .
- Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif, on a $h(x) < 0$.
- Déterminer les positions relatives de (C_f) et (Δ) .
- Construire (C_f) et (Δ) .

Exercice 5

Une entreprise fabrique des savons.

Une étude a révélé que le résultat mensuel, exprimé en milliers de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x centaines de savons, est modélisé par la fonction B définie sur

$$[1,5; 10] \text{ par : } B(x) = -\frac{2x}{x-1} + 3 + 4 \ln(x-1).$$

Le directeur de l'entreprise ne veut pas réaliser une perte. Il te demande le nombre minimal de savon à produire, arrondi au dixième, pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

Détermine le nombre minimal de savons à produire, pour réaliser un bénéfice.

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES TD

EXERCICE N°1

Réponds par vrai si l'affirmation est vraie ou par faux sinon

| | | |
|---|--|--|
| 1 | $\ln 2 + \ln \frac{1}{2} - \ln(e^{-2}) = 2$ | |
| 2 | $\ln(3^2) + \ln 3 - \ln \sqrt{3} = 2 \ln 3$ | |
| 3 | $\frac{\ln e^{-2}}{\ln e^{-1}} - \ln 2e = 1 - \ln 2$ | |
| 4 | $\ln[(\sqrt{2}-1)] + \ln[(\sqrt{2}+1)] = 0$ | |

EXERCICE N°2

Pour chacune des affirmations, trois réponses sont proposées. Une seule est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation ainsi que la lettre qui correspond à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

| N° | AFFIRMATIONS | Réponse A | Réponse B | Réponse C |
|----|--|----------------------|------------------|----------------|
| 1 | On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 - x^2)$. L'ensemble de définition de f est | $]0; +\infty[$ | $] -1; 1[$ | $]1; +\infty[$ |
| 2 | On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x^2)$. L'ensemble de définition de g est: | \mathbb{R} | $]0; +\infty[$ | \mathbb{R}^+ |
| 3 | La fonction $h(x) = \ln(3-x)$ est définie sur | $\mathbb{R} - \{3\}$ | $] -\infty; 3[$ | $]3; +\infty[$ |
| 4 | La fonction $f(x) = \ln(-x)$ est définie sur | $] -\infty; 0[$ | $] -\infty; -1[$ | $]0; +\infty[$ |
| 5 | L'expression de la fonction h qui est définie sur $] -2; 2[$ est | $\ln(x^2-2)$ | $\ln 4-x^2 $ | $\ln(4-x^2)$ |

EXERCICE N°3

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f dans chaque cas ci-dessous

1) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$ 2) $f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{4-x}\right)$ 3) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}$ 4) $f(x) = \sqrt{1 - |\ln x|}$

EXERCICE N°4

Résous les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R}

1) $2 \ln x \geq \ln(2-x)$ 2) $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$ 3) $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 1$
 4) $(1 - \ln x)(3 + \ln x) \leq 0$ 5) $\ln(\ln x) \geq 0$

EXERCICE N°5

- 1) a) Démontre la propriété suivante $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
 b) Déduis les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- 2) Calcule les limites suivantes
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^3$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - (\ln x)^2)$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$
- 3) a) Calcule la dérivée de la fonction $f(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$
 b) En déduis une primitive de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$
- 4) Détermine les primitives sur $]0; 1[$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

| | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|------------------|
| Lycée Classique d'Abidjan | DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES | 2022-2023 |
| Classe : 1 ^{ère} D | Durée : 2h | Date : 6/02/2023 |

EXERCICE 1

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque affirmation suivie de VRAI si celle-ci est vraie ou FAUX si celle-ci est fautive.

- 1) Si $z = (1 + \sqrt{5})(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$ alors un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$ **F**
- 2) Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes.
Le conjugué du nombre complexe $z = z_1 + iz_2$ est $\bar{z} = z_1 - iz_2$ **V**
- 3) Si $z = 4i - 3$ alors la partie réelle de iz est 4 **F**
- 4) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 4$ est la médiatrice de $[AB]$ avec A d'affixe $2i$ et B d'affixe 4 **V**

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque affirmation suivie de la lettre correspondante à la bonne réponse.

| x | Affirmations | Réponses | |
|---|--|----------|---|
| | | A | B |
| 1 | Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$ | A | $f'(x) = 2 \ln x$ |
| | | B | f Admet un maximum en 1 |
| | | C | f Admet un minimum en 1 |
| 2 | Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$ sur $] -\infty; 0[$ est la fonction | A | $x \mapsto -2 \ln(-x)$ |
| | | B | $x \mapsto -2 \ln x$ |
| | | C | $x \mapsto 2 \ln(-x)$ |
| 3 | L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln \left \frac{1-\ln x}{1+\ln x} \right $ est | A | $]0; +\infty[\setminus \{e^{-1}; e\}$ |
| | | B | $]0; +\infty[\setminus \{-e; e\}$ |
| | | C | $]0; +\infty[\setminus \{e^{-1}; -e\}$ |
| 4 | La fonction $x \mapsto (x-1) \ln(x^2-1)$ a pour limite en 1 | A | 0 |
| | | B | $-\infty$ |
| | | C | 1 |

EXERCICE 3

- 1) Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes $1 + i$ et $\sqrt{3} + i$
- 2) On donne le nombre complexe $u = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$
 - a) Ecris sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique le nombre complexe u .
 - b) En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
 - c) Calcule u^{2023} **6**
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . A, B et C sont les points d'affixes respectives $1 + i$ et $\sqrt{3} + i$ et $1 + i\sqrt{3}$.
 - a) Justifie que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
 - b) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.
- 4) A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-\sqrt{3}+i}{z-1-i\sqrt{3}}$

- a) Détermine l'ensemble (D) des points M du plan tels que $|z'|=1$.
 b) Pour tout $z \neq 1 + i\sqrt{3}$, montre que $(z' - 1)(z - 1 - i\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$
 c) Détermine l'ensemble décrit par M lorsque M' décrit le cercle de centre I et de rayon 2

EXERCICE :4

1. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + (x - 2)\ln x$
- a) Démontre que $\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln x$
 b) Déduis que $\forall x \in]0, 1[$, $g'(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $g'(x) > 0$
 c) Dresse le tableau de variation de g
 d) Justifie que $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) > 0$
2. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - x \ln x - 1$
- a) Calcule la limite de f en 0. Interprète le résultat
 b) Calcule la limite de f puis de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Interprète le résultat
 c) Justifie que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-g(x)}{x}$
 d) En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation
3. a) Justifie que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera
 b) soit f^{-1} sa bijection réciproque.
 Calcule $f(e)$. f^{-1} est-elle dérivable en $-e$? Justifie.
 c) Dresse le tableau de variation de f^{-1}
4. Justifie que la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x(\ln x)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\ln x + \frac{1}{4}x^2 + x$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$

EXERCICE :5

Une entreprise met en vente pour le mois de février 2023 (qui compte 28 jours) une partie de ses actions. Un agent économique souhaite acquérir ces actions.

Après investigation, celui-ci est informé que la valeur totale de ces actions qui varie selon le jour, est modélisée, en millions de francs CFA par la relation $f(x) = -(x + 1)^2 + 648 \ln(x + 1) + 1550$ où x désigne l'ordre des jours du mois de février.

Par ailleurs, le gain tiré des actions est d'autant plus grand que la valeur totale des actions est élevée.

L'agent économique souhaite connaître le jour du mois de février le mieux indiqué pour obtenir un gain maximal de l'acquisition de ces actions. Ne sachant comment s'y prendre il te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en mathématiques, rédige la réponse que tu lui proposeras.

LYCÉE CLASSIQUE ABIDJAN



08 BP 39 ABIDJAN 09

22 44 35 17

Cherche, trouve et jamais n'abandonne

**DEVOIR DE NIVEAU DE
MATHÉMATIQUES n°2**

Prof : CE MATH.

Classe : **T^{le}D** Durée : 2 h Date : Lundi 16 janvier 2023
Ce devoir comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (2 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro suivi de Vrai si elle est correcte ou le numéro suivi de Faux si elle ne l'est pas.

- La fonction $H: \mapsto 2x^2\sqrt{x}$ est une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction $h: \mapsto 5x\sqrt{x}$.
- On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où pile apparaît.
Alors $p(X = 2) = \frac{3}{8}$.
- Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

| | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $p(X = x_i)$ | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,3 |

Alors :

- $E(X) = 2$
- $V(X) = \frac{5}{2}$
- $\sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- F étant la fonction de répartition de la variable aléatoire X , on a : $F(3,5) = 0,6$.

EXERCICE 2 (2 pts)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une, et une seule est exacte. Indique-la en notant par exemple : 1. a ou 1. b ou 1. c .

| Questions | Réponses | | |
|---|------------------------------|-------------------------|---------------------|
| | a | b | c |
| 1. L'égalité $\ln x^2 = 2\ln x$ est vraie pour tout x de ... | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $]0; +\infty[$ | \mathbb{R} |
| 2. $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 3\ln 4 + \ln(2e) = \dots$ | $-3\ln e$ | $1 + 6\ln 2$ | 4 |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \dots$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| 4. Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$. Alors, $\forall x \in] -1; +\infty[$, $g'(x) = \dots$ | $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ | $\frac{-1}{(x+1)(x+2)}$ | $\frac{1}{(x+2)^2}$ |

EXERCICE 3 (pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-3)^2}$.

- Détermine trois nombres a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$.
- Déduis-en la primitive F de f sur $] -\infty; 3[$ qui s'annule en 2 .

EXERCICE 4 (pts)

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $\begin{cases} \forall x > 0, g(x) = x(\ln x)^2 + x - 1 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de g dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 5 cm

1. Etudie la continuité de g en 0.
2. a. Justifie que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+1}{x} = +\infty$.
 b. g est-elle dérivable en 0 ?
 c. Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.
3. a. Calcule la limite de g en $+\infty$.
 b. Justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.
 c. Donne une interprétation graphique des résultats précédents.
4. On admet que g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 a. Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[\quad g'(x) = (1 + \ln x)^2$.
 b. Dédus-en les variations de g puis dresse son tableau de variation.
5. Justifie que le point $A\left(\frac{1}{e}; \frac{2}{e} - 1\right)$ est un point d'inflexion de (\mathcal{C}) .
6. a. Détermine une équation de la tangente (\mathcal{T}) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1.
 b. Etudie la position relative de (\mathcal{C}) et de (\mathcal{T}) .
7. Construis (\mathcal{T}) et (\mathcal{C}) sur $[0; 3]$.

EXERCICE 5 (pts)

Au cours d'une kermesse, le jeu suivant est proposé aux élèves.

Le joueur pioche trois boules en prenant successivement une dans chacune des urnes suivantes :

- L'urne 1 contenant une boule rouge et une boule noire ;
- L'urne 2 contenant une boule rouge et deux boules noires ;
- L'urne 3 contenant une boule rouge et trois boules noires.

Voulant participer à la partie, un élève affirme qu'il a plus de chance de tirer un nombre impair de boules rouges.

En te basant sur tes connaissances mathématiques, donne ton point de vue sur ses affirmations.

DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2h ; Niveau : T¹ED

Exercice 1 (2pts)

Écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si cette affirmation est vraie et FAUX si cette affirmation est fausse. Exemple : 5- VRAI

- 1) La fonction \ln est une bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $]0 ; +\infty[$.
- 2) La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.
- 3) L'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, \ln(-x-1) < 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Exercice 2 : (3pts)

Pour chacune des lignes du tableau suivant, une seule des trois réponses est correcte. Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse. Exemple : 5-D

| Affirmations | A | B | C |
|---|--|--|----------------------------|
| 1) L'argument principal du nombre complexe $3-i\sqrt{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 2) Soit C et D deux points du plan complexe d'affixe respectives z_C et z_D . Si $ z_C = z_D $ alors C et D sont | symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. | symétriques par rapport à l'axe des abscisses. | Situés sur un même cercle. |
| 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on donne les points E, F et G d'affixes respectives $2-i$, $2+i$ et $\sqrt{3}+2$. Le triangle EFG est | Rectangle en G | Isocèle en G | Équilatéral |
| 4) i^i est égal à | $e^{-\frac{\pi}{2}}$ | $e^{\frac{\pi}{2}}$ | 1 |

Exercice 3 : (4pts)

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$
- 2) Résous dans \mathbb{R} l'inéquation (I) : $\ln(x+1) + \ln(x-2) \geq 2\ln(3-x)$

Exercice 4 :(6pts)

A tout complexe z , on associe dans le plan les points M d'affixe z , M' d'affixe $z+i$ et M'' d'affixe iz

1a- Pour quel nombre z , les points O et M' sont-ils confondus ?

b- Pour quel nombre z , les points M' et M'' sont-ils confondus ?

2- On suppose que z est différent de 0 , de $-i$ et de $\frac{1-i}{2}$

a- Montre que les points O , M' et M'' sont alignés si et seulement si $\frac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.

b- Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Calculer la partie imaginaire de $\frac{z+i}{iz}$ en fonction de x et de y .

3- Détermine et représente l'ensemble (\mathcal{E}) des points M tels que O , M' et M'' soient deux à deux distincts et alignés

Exercice 5 : (5pts)

Lors d'une conférence, sur la santé pulmonaire, prononcée par le médecin du LCA, les élèves de la Terminale D ont noté les informations suivantes :

« La capacité pulmonaire d'un être humain est la quantité d'air présente dans les poumons, mesurée à des fins diagnostiques lors d'une exploration fonctionnelle respiratoire. Elle est exprimée en litres et dépend de plusieurs facteurs dont l'âge.

On peut la modéliser par la fonction f définie par $f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$ où x désigne l'âge ($x \in [10 ; 90]$) et la capacité pulmonaire reste supérieure à 4,5L dans une certaine tranche d'âge »

Enthousiasmés par les propos du médecin, les élèves cherchent, à partir de leurs connaissances mathématiques, à déterminer la tranche d'âge dont parle le médecin.

| | | |
|---------------------------|-------------------------|--------------------|
| Lycée Classique d'Abidjan | DEVOIR DE MATHÉMATIQUES | 2022-2023 |
| Classe : TLED | Durée : 2h | Date : 02 /03/2023 |

EXERCICE : 1

Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivie de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse

- 1) Soit z un nombre complexe . Le conjugué de $\frac{1-z}{1-i}$ est $\frac{1+\bar{z}}{1+i}$ ✓
- 2) Pour tout réel θ , $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$. ✓
- 3) Soit z un nombre complexe. Si $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ alors $z = 8 - 2i$ ✗
- 4) La forme exponentielle de $1-i$ est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ✓

EXERCICE : 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, une seule des trois réponses est exacte. Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse

| n° | Affirmations | Réponses | |
|----|---|----------|----------------------|
| | | A | B |
| 1 | Une solution de l'équation $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$ est | A | $\ln 5$ |
| | | B | $\ln 3$ ✓ |
| | | C | 0 |
| 2 | Soit $g(x) = xe^{x^2}$ g a pour primitive | A | $\frac{1}{2}e^{x^2}$ |
| | | B | $2xe^{x^2}$ ✓ |
| | | C | $2e^{x^2}$ |
| 3 | 3^x est égale à | A | $e^{3\ln x}$ |
| | | B | $e^{x\ln 3}$ |
| | | C | $e^{\ln 3}$ |
| 4 | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{3e^x - 1} =$ | A | 1 ✓ |
| | | B | $+\infty$ |
| | | C | $-\infty$ |

EXERCICE : 3

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E): $Z^3 - (ia + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0, a \in \mathbb{R}$

- 1) Détermine le nombre réel a pour que $-2i$ soit une solution de (E).
- 2) Détermine le polynôme complexe Q de degré 2 tel que pour $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (2i - 2\sqrt{3})z^2 + (4i - 4i\sqrt{3})z + 8i = (z - \sqrt{3} - i)Q(z)$.
- 3) Résous dans \mathbb{C} l'équation (E) pour $a = -2$.
- 4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) on donne les points A, B, et C d'affixes respectives $\sqrt{3} + i, -2i$ et $\sqrt{3} - i$
 - a) Représente dans le repère (O, I, J) , les points A, B et C (on prendra 3 cm pour
 - b) D est le symétrique de A par rapport à (OJ)
démontre que le triangle DAC est rectangle en A.
 - c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques

EXERCICE :4

Soit f la fonction défini sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f noté D_f .
- 2) a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$,
 b) Calcule les limites de f en $\ln 2$ à gauche et à droite. Interprète les résultats
- 3) a) Montre que $(D): y = x$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$,
 b) Etudie les positions relatives des (Cf) et (D) .
 c) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]$ et interprète le résultat.
- 4) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$.
 b) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
- 5) Soit g la restriction de f à $] -\infty; 0]$.
 a) Montre que g réalise une bijection de $] -\infty; 0]$ sur un intervalle K à préciser.
 b) Calculer $g(o)$ et $(g^{-1})'(-\frac{1}{2})$.
- 6) Construis (cf) et les asymptotes.

EXERCICE :5

Une société de vente de portables GSA décide à l'approche des fêtes de fin d'année d'agrandir et d'embellir sa boutique. Pour cela plusieurs objets de décoration ont été prévus par le technicien convié à la tâche.

- La réalisation en plexiglas transparent d'un solide ayant la forme d'un rectangle dont les dimensions sont la partie réelle et la partie imaginaire, solution de l'équation $(1 + 4i)z + (3 - 4i)\bar{z} = 4 - 8i$ ou \bar{z} est le conjugué de z .
- La réalisation de la configuration (Γ) dont l'ensemble des points M d'affixes z du plan complexe tel que $Re(z) = 0$ avec $z = \frac{z}{z+2i}$

Monsieur Jean propriétaire de la société veut se faire une idée de ce qui est prévu pour la décoration. Il sollicite alors son fils élève en classe de terminale D qui affirme reconnaître ces configurations.

A l'aide de tes connaissances en mathématique, aide le fils à répondre aux préoccupations de son père.